Mathematik

Das Fach Mathematik ist Pflichtfach für die gesamte Dauer des Besuchs der Oberstufe bis zum Abitur. Dabei werden (hier nur grob umrissen) folgende Inhalte behandelt:

Vorkurs (1. Semester) :

Algebra, Arithmetik und Grundlagen der Mengenlehre
- Rechnen mit Zahlen
- Rechnen mit Variablen
- Termumformungen: Rechenoperationen, Zusammenfassen, Auflösen von Klammern, Faktorisieren, Kürzen, Erweitern
- Potenzrechnung, Wurzeln
- Lineare Gleichungen
- Lineare Gleichungssysteme
- Quadratische Gleichungen

Einführungsphase (2. und 3. Semester) :

Grundlagen der Geometrie und Trigonometrie, einfache Funktionen
- Geometrische Grundlagen und Sätze
- Ebene Trigonometrie
- Lineare Funktionen
- Quadratische Funktionen
- Einfache gebrochen-rationale Funktionen

Kurssystem (3. - 7. Semester) :

Grundkurs
- Analysis
- Vektorrechnung

Leistungskurs
- Analysis
- Lineare Algebra und Analytische Geometrie
- Stochastik

Ein kurzer (historischer) Überblick über Zahlensysteme

Die einfachste Methode, Zahlen darzustellen, ist die so genannte **Reihung**:
Es werden einfach so viele Striche hinter einander gesetzt, wie zur Darstellung der gewünschten Zahl nötig sind: |||||||||||||||||||| .
Das wird auch heute noch benutzt, z.B. von Kellnern oder Barkeepern.
Ein Nachteil liegt klar auf der Hand: Bei größeren Zahlen wird es recht unübersichtlich, das "Lesen" der Zahl erfordert das Abzählen der Striche.
Ein Vorteil ist, dass man mit nur einem einzigen Symbol auskommt!
Die Reihung kann übersichtlicher gestaltet werden durch **Bündelung**: 𝍸 𝍸 𝍸 .
So macht z.B. der Mensch an der Bar bei jedem fünften Bier statt des senkrechten Striches einen waagerechten Strich, jedes so entstandene "Bündel" steht also für eine Anzahl von fünf Bieren, so gewinnt man viel leichter einen Überblick über die Anzahl.

Eine andere Möglichkeit bietet die spezielle Anordnung, wie sie u.a. von den Ägyptern und Babyloniern benutzt wurde, wobei das Symbol der Babylonier für "1" eher ein Keil war, etwa so: ϒ .) :

Ägypter: ||||||||| → | | | | |
| | | |

Babylonier: ||||||||| → ϒϒϒ
ϒϒϒ
ϒϒϒ

Der Zahlenraum der so darstellbaren Zahlen ist doch sehr begrenzt. Wenn man bedenkt, dass (nicht nur) in Ägypten sehr viele Menschen in einer recht entwickelten Gesellschaft lebten, so erforderte dies einfachere und übersichtlichere Zahlendarstellungen.
Dies wurde dadurch erreicht, dass man neue Symbole für Bündel einführte (die unten benutzten Symbole sind natürlich die in einem normalen Zeichensatz darstellbaren Zeichen, die Zeichen der Ägypter waren dagegen sehr gegenständlich).

Ägypter: | | | | |
| | | | | → ∩ (Ochsenjoch: 10)

Römer: ||||| → V

Babylonier: ϒϒϒ
ϒϒϒ → ≺
ϒϒϒ
ϒ

Dann konnten wiederum Bündel von Bündeln gebildet werden:
Ägypter: ∩∩∩∩∩∩∩∩∩∩ → "Maßband" @ : 100)
Lotosblüte 1000; Schilfkolben 10000; Frosch 100000

Babylonier:

≺
≺
≺ ≺ → ϒ : 60 (!!)
≺
≺

Römer:

V : 5
X : 10
L : 50
C : 100
D : 500
M : 1000

Die Bündelung erfolgte nicht immer in gleichen Abständen!

Besonders problematisch war, dass die Babylonier das Symbol ϒ sowohl für "1" als auch für "60" benutzten. Dies führte einerseits zwar zunächst zu Missverständnissen, aber auch zu einer genialen Idee, wie wir unten sehen werden.
Im antiken Griechenland, welches berühmte Mathematiker hervorbrachte, benutzte man ein recht unpraktisches Symbolsystem, nämlich die Buchstaben als Zahlen:
$\alpha=1$, $\beta = 2$, usw.; $\kappa= 20$, $\lambda = 30$, es gab keine Bündelung.
Dadurch wurden in Rechenoperationen Analogien nicht sichtbar, die für uns selbstverständlich sind:

$\beta + \epsilon = \zeta$ $\quad$ 2 + 5 = 7

$\kappa + \nu = o$ $\quad$ 20 + 50 = 70

$\varsigma + \phi = \psi$ $\quad$ 200 + 500 = 700

Auch andere Rechenoperationen waren - wie übrigens mit den römischen Ziffern ebenfalls - sehr unübersichtlich.

Zurück zu den Babyloniern:
Die Darstellung von Zahlen durch nur zwei Symbole, ≺ und ϒ, die zudem noch mehrfache

Bedeutung hatten (ϒ = 1 oder 60 oder 3600 oder 216000 oder ...), führte auf die Idee, die Symbole nach ihrer Position innerhalb der Zahlendarstellung anders zu bewerten: Das Stellenwertsystem war geboren.
Jede "Stelle" (im Folgenden dargestellt durch eine Tafel) wurde bis maximal 59 aufgefüllt, danach ("Überlauf") geht es eine Stelle weiter nach vorn mit 60 wieder von vorn los.

Einfache Beispiele

	≺≺ ϒ ϒ ϒ ϒ ϒ (25)
≺ ϒ (11x60)	≺≺ ϒ (21)

≺≺ ϒ ϒ	≺	ϒ ϒ	≺≺ ϒ	≺≺≺≺≺ ϒ ϒ ϒ ϒ ϒ ϒ ϒ ϒ ϒ
22 x60x60x60x60	10 x60x60x60	2 x60x60	21 x60	59

Der Vorteil bestand darin, dass mit nur zwei Symbolen und nur wenigen "Stellen" auch sehr große Zahlen dargestellt werden konnten.

Allerdings waren die Zahlendarstellungen nicht eindeutig, es konnte z.B. ϒ ≺ für 70 oder für 3610 stehen.
Um eindeutige Zahlendarstellungen zu erhalten, wurde deswegen später sogar ein der "Null" entsprechendes Symbol benutzt.
Der große Nachteil, der bis in die heutige Zeit reicht, war aber folgender:
Das kleine "Einmaleins", bei uns bis 9 mal 9, geht bis 59 mal 59, da "Ziffern" von 1 bis 59 auftreten! Dies erforderte sehr gute Rechenkünste von den damit Befassten.
Aus dieser Zeit kommt übrigens das Vorurteil, dass Mathematik nur etwas für Schlaue ist: Ein "kleines Einmaleins" dieser Größe ist nur etwas für Leute mit einem phänomenalen Gedächtnis...

Auch wenn man es kaum glauben möchte: Das Zahlensystem der Babylonier wird heutzutage immer noch täglich benutzt!
Wenn wir zwei Zeiten addieren, so verfahren wir wie die alten Babylonier :
3h 25min 17s + 6h 38min 45s = 10h 4min 2s oder abgekürzt:
3 25 17 + 6 38 45 = 10 4 2.
Gleiche Rechenoperationen tauchen auf beim Arbeiten mit Winkeln, die in Grad, Minuten und Sekunden gemessen werden.

Die beschriebenen Schwierigkeiten haben dazu geführt, dass sich eine Zahl zur Basis eines Stellenwertsystems durchgesetzt hat, welche uns wegen unserer Körperkonstruktion sehr sympathisch und natürlich erscheint: Die Zahl 10 (Anmerkung: Auch 20 liegt nahe, wie es noch im Französischen erhalten ist); und dies, obwohl unser Gehirn Schwierigkeiten hat, Zahlen mit mehr als sieben Ziffern auf Anhieb zu erkennen.
Im Dezimalsystem mit seinen 10 Ziffernsymbolen bedeutet eine Ziffer, je nach ihrem Standort in der Zahl, etwas Anderes: So kann eine "3" eben für 3 Hunderter, aber auch für 3 Tausendstel stehen.
Seit dem Einsatz von Maschinen zur Lösung von Rechenoperationen haben neue, weitere Zahlensysteme Einzug gehalten:
Dualsystem: Es gibt nur die beiden Ziffern 0 und 1, wenn "2" erreicht ist, wird eine neue Stelle eingerichtet

0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000 usw.

Vorteil: Man benötigt nur die beiden Ziffern "1" und "0" (entsprechend den Schaltzuständen "ein" und "aus", Rechenoperationen sind extrem einfach, das "kleine Einmaleins" besteht lediglich aus 1 mal 1 = 1 .
Nachteil: Die Darstellung der Zahlen ist unheimlich lang, bereits relativ kleine Zahlen überschreiten die 7-Stelligkeit (s.o.) .
Beispiel:

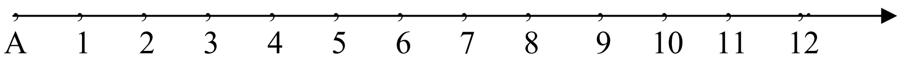
```
  1100100  dual für 100
 11001000  dual für 200
------------
100101100  dual für 300
```

Dem gegenüber hat das Hexadezimalsystem (oder auch Sedezimalsystem) andere Vor- und Nachteile.
Es gibt 16 Ziffern 0,1,2,...,9,A,B,C,D,E,F, eine neue Stelle wird also jeweils erst dann eingerichtet, wenn 16 erreicht sind.
Beispiele: A = 10;
9F = 9 x 16 + 15 = 159;
FF = 15 x 16 + 15 = 255;
A7F3 = 10 x 16 x16 x 16 + 7 x 16 x 16 + 15 x 16 + 3 = 42995
Der Vorteil ist klar: Die Zahlendarstellungen werden (insbesondere bei sehr großen Zahlen) erheblich kleiner.
Nachteil ist wieder, zwar nicht ganz so schlimm wie bei den Babyloniern, die Größe des "Einmaleins".
Zusammenfassend ist zu sagen, dass man im Prinzip jede Zahl als Basis nehmen kann: Eine größere Anzahl von Ziffern verkürzt die Zahldarstellung, vergrößert aber das "Einmaleins" .

Rechenoperationen in der Menge der natürlichen und der ganzen Zahlen

Definition : Menge der natürlichen Zahlen
Die Menge der Zahlen, die beim Abzählen entsteht, heißt Menge der natürlichen Zahlen und wird $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$ geschrieben.

$\mathbb{N}$ lässt sich anschaulich an einem Zahlenstrahl darstellen:

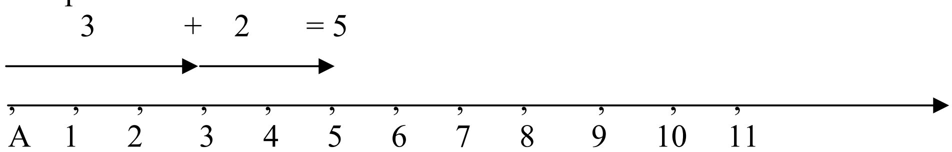


Der Anfangspunkt wird (zunächst) mit A bezeichnet. Durch eine Pfeilspitze wird kenntlich gemacht, in welcher Richtung die Zahlen größer werden, der Strahl erhält so einen "Durchlaufsinn", eine "Orientierung". Wenn eine Zahl a, z.B. 3, links von einer anderen Zahl b, z.B. 7, liegt, so ist a kleiner als b, im Beispiel also 3 kleiner als 7. Wir schreiben dafür 3 < 7 oder allgemein a < b (gelesen: "a kleiner b"), gleichbedeutend damit ist natürlich b > a ("b größer als a").
Der Zahlenstrahl ist nach oben nicht beschränkt, die Menge der natürlichen Zahlen ist also eine Menge, die unendlich viele Zahlen enthält.

Zum Rechnen muss man zunächst Rechenoperationen definieren.
Dazu benutzen wir das so genannte Pfeilmodell:
Jeder natürlichen Zahl z entspricht ein Pfeil, der von A zum Punkt Z führt, A nennt man den Angriffspunkt, Z ist der Zielpunkt. Der Pfeil, der zu einer Zahl gehört, muss aber nicht notwendig bei A beginnen: Er kann beliebig verschoben werden, nur seine Länge und seine Orientierung dürfen nicht verändert werden. Die Zahl "3" wird also durch einen Pfeil, der drei Einheiten lang ist und nach rechts weist, dargestellt.

Definition: Addition
Zwei Zahlen werden addiert, indem man den Pfeil der 2.Zahl mit seinem Angriffspunkt an den Zielpunkt des 1.Pfeils (mit Angriffspunkt A) anhängt. Das Ergebnis ist der Pfeil, der den Angriffspunkt A und den Zielpunkt des angehängten Pfeils besitzt.

Beispiel:

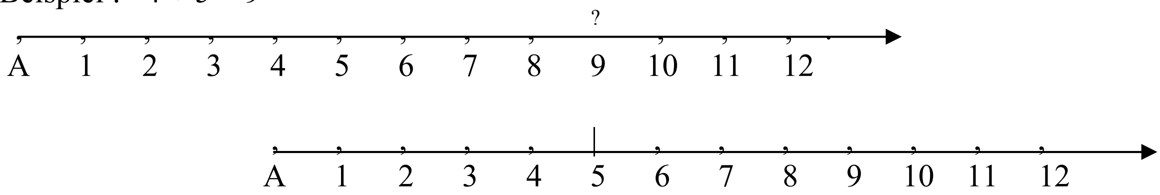


Die bekannte Addition (Operationszeichen ‘‘+‘‘) ist in ℕ uneingeschränkt durchführbar, d.h. bei Addition zweier natürlicher Zahlen entsteht wieder eine natürliche Zahl. Die beiden zu addierenden Zahlen nennt man Summanden, das Ergebnis einer Addition heißt Summe:

$$\boxed{\textbf{Summand 1 + Summand 2 = Summe}} \; .$$

Anmerkung: Man kann zur Veranschaulichung der Operation ‘‘+‘‘ am Zahlenstrahl auch zwei Zahlenstrahlen benutzen, je einen für die beiden Summanden. Trägt man den ersten Summanden auf dem ersten Strahl ab und legt den zweiten Zahlenstrahl mit seinem Anfangspunkt A an diese Stelle, so liegt das Ergebnis der Addition der beiden Zahlen auf dem ersten Strahl dort, wo der zweite Summand auf dem zweiten Strahl liegt.

Beispiel : 4 + 5 = 9



Die Reihenfolge bei der Addition ist offenbar beliebig, die **Addition ist** also **kommutativ** (lat.: vertauschbar), die beiden Summanden sind vertauschbar.

Anmerkung: Das Pfeilmodell entspricht der Addition von Vektoren, wie sie z.B. in der Physik oder in den Ingenieurwissenschaften benutzt wird.

Subtraktion

Die Subtraktion (Operationszeichen ‘‘-´‘) wird in der Grundschule zunächst als eine eigenständige Rechenoperation auf ℕ eingeführt.

Die beiden an der Subtraktion beteiligten Zahlen nennt man Minuend (lat. von 'minuere' (vermindern): Die zu vermindernde Zahl) und Subtrahend (lat. von 'subtrahere' (wegnehmen): Die wegzunehmende Zahl), das Ergebnis heißt Differenz (lat.: Unterschied) :

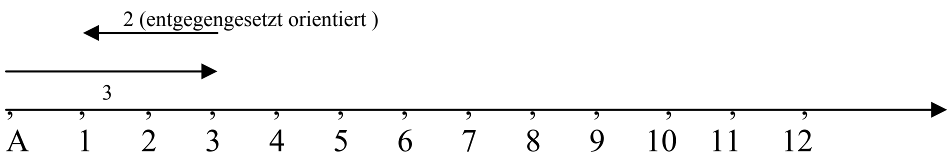
$$\boxed{\textbf{Minuend - Subtrahend = Differenz}}$$

Die Subtraktion wird wie die Addition mit dem Pfeilmodell definiert:

Definition : Subtraktion
Zwei Zahlen werden subtrahiert, indem man den entgegengesetzt orientierten Pfeil der 2.Zahl (also des Subtrahenden) mit seinem Angriffspunkt an den Zielpunkt des 1.Pfeils (des Minuenden, mit Angriffspunkt A) anhängt. Das Ergebnis ist der Pfeil, der den Angriffspunkt A und den Zielpunkt des angehängten Pfeils besitzt.

Anmerkung: Die Subtraktion ist in ℕ darauf beschränkt, dass der Minuend größer ist als der Subtrahend (in der Grundschule sagt man z.B. "4 - 6 geht nicht ") .

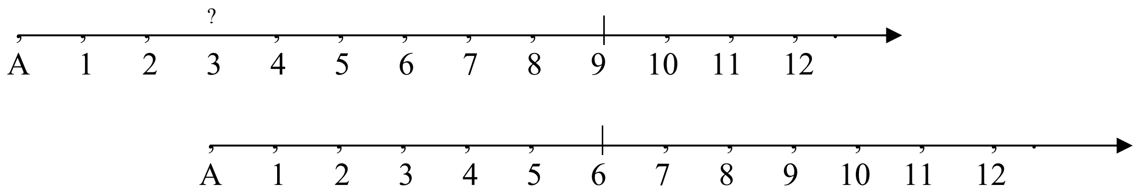
Beispiel: 3 - 2 = 1



Analog zur Addition kann man sich die Subtraktion auch mit zwei Zahlenstrahlen klar machen:

Die Zahlenstrahlen für Minuend und Subtrahend werden so gelegt, dass beide Zahlen übereinander liegen. Dann liegt die Differenz auf dem Minuend-Zahlenstrahl dort, wo der Anfangspunkt des Subtrahend-Zahlenstrahls liegt.

Beispiel: 9 - 6 = 3



Die Ausdehnung der Subtraktion auf die anderen Fälle (Subtrahend gleich dem oder größer als der Minuend) führte zur Einführung der Null und der negativen Zahlen, was für uns heute (im Zeitalter von Krediten und Sollzinsen...) selbstverständlich scheint, aber für die Menschheit einen großen Schritt bedeutete, den sie erst im 16. Jahrhundert vollzog.
Setzt man den Zahlenstrahl zur anderen Seite fort, so entsteht eine Zahlengerade, der Pfeil zeigt nach wie vor die Orientierung an. Die Zahlen, die auf der Zahlengeraden links vom bisherigen Anfangspunkt liegen, heißen **negative Zahlen** (die rechts davon liegenden Zahlen heißen dagegen **positiv**). Um keine neuen Zahlen oder Ziffernsymbole einführen zu müssen, werden die gleichen Zahlen benutzt, sie erhalten jedoch ein ‘‘-‘‘ als so genanntes **Vorzeichen** (dieses "minus" gelesene Vorzeichen entstand übrigens aus einem schlampig geschriebenen "m" als Abkürzung für "minus" (lat.: weniger); zur Verdeutlichung schreiben wir (zunächst) die positiven Zahlen mit einem "+" als Vorzeichen. Die zum bisherigen Anfangspunkt A gehörige Zahl wird 0 genannt, sie ist weder positiv noch negativ. Sind zwei Zahlen jeweils gleich weit von der 0 entfernt, z.B. 3 und –3, so sagt man, die beiden Zahlen haben den gleichen **Betrag** und bezeichnet sie zueinander als **Gegenzahlen**.
Wichtig ist es, den Unterschied zwischen dem Vorzeichen "-" und dem Rechenzeichen "-" zu beachten.

Definition : Betrag
Der Betrag einer Zahl a ist die Entfernung der Zahl zur Null auf der Zahlengeraden, er wird bezeichnet mit $|a|$.

Beispiele: $|-3| = 3$, $|5| = 5$.

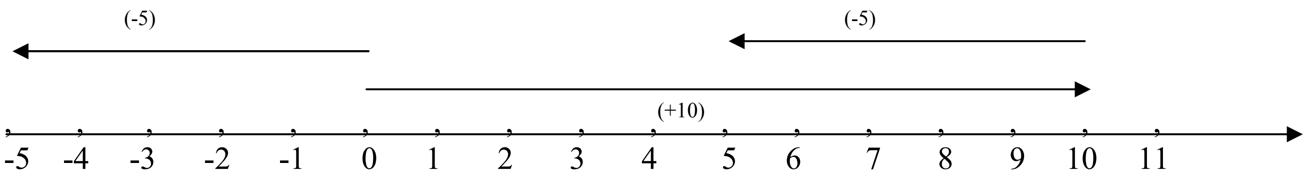
Die Menge, die aus den natürlichen Zahlen, der Null und den ‘neuen‘, nämlich den aus den natürlichen Zahlen mit negativem Vorzeichen gebildeten Zahlen, besteht, heißt die Menge der ganzen Zahlen:

Definition : Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Z} = \{ 0;\ \pm 1; \pm 2 ; \pm 3 ; ... \}$ heißt die Menge der ganzen Zahlen.

In $\mathbb{Z}$ ist auch die Subtraktion uneingeschränkt ausführbar.
Addition und Subtraktion der negativen Zahlen im Pfeilmodell erfolgt wie bei den positiven Zahlen, die zu negativen Zahlen gehörenden Pfeile haben die gleiche Länge wie ihre Gegenzahl, sind jedoch entgegengesetzt orientiert.

Beispiel: (Der Deutlichkeit halber, um Vor- und Rechenzeichen voneinander zu trennen, schreiben wir zunächst alle Zahlen mit Vorzeichen und setzen Klammern darum.)

(+10) + (-5) = (+5)



Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man rechnet (+10) - (+5) = (+5) .
Das bedeutet: Die **Subtraktion ist** also nichts anderes als die **Addition der Gegenzahl** (*), sie ist somit keine eigenständige Rechenoperation.

Aus der Definition ergeben sich die folgenden Regeln für die Addition : (**)

Addition von Summanden mit <u>gleichem</u> Vorzeichen: **Summe der Beträge bilden, Vorzeichen bleibt erhalten** **Addition von Summanden mit <u>verschiedenem</u> Vorzeichen:** **Differenz der Beträge bilden, Vorzeichen der Summe ist das Vorzeichen des betragsmäßig größeren Summanden**

Beispiele: (+3) + (+7) = (+10)
(-3) + (- 7) = (- 10)
(+3) + (-7) = (-4) da | -7| > |3|
(-3) + (+7) = (+4) da | -3| < |7|

Sind mehrere Operationen ‘‘+‘‘ bzw. ‘‘-‘‘ auszuführen, so nennt man das Ganze eine **algebraische Summe**.
Beispiel: (+3) + (-2) - (- 4) - (+6) = ..
Dabei sind die Operationen der Reihe nach gleichberechtigt untereinander auszuführen, und zwar nach den Regeln (*) und (**).
Solange man Schwierigkeiten bei der Addition bzw. Subtraktion von Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen hat, kann man wie folgt vorgehen:

1) Man wandelt die Summe so um, dass als **Rechen**zeichen nur noch ‘‘+‘‘ vorkommt (*).
2) Man addiert nach den Regeln (**)

Beispiel: (+3) + (-2) - (-4) - (+6) | Bilden der Gegenzahl bei Operation "-"
= (+3) + (-2) + (+4) + (-6) | Addieren der ersten beiden Zahlen
= (+1) + (+4) + (-6) | Addieren der ersten beiden Zahlen
= (+5) + (-6) | Addieren
= (-1)

Natürlich wird man nach kurzer Zeit kürzer schreiben und (im Kopf) zusammenfassen oder **Umordnungen** vornehmen. Welche Regeln gelten dafür ?
Bekannt: (+3) + (+5) = (+5) + (+3) = (+8) (vgl.: Kommutativität der Addition in $\mathbb{N}$)
Dies gilt auch für negative Zahlen, z.B. (+3) + (-5) = (-5) + (+3) = (-2) .

Diese Vertauschbarkeit (Kommutativität) gilt für alle Zahlen bezüglich der Addition:

Die Summe zweier Zahlen ist nicht abhängig von der Reihenfolge der Summanden: **a + b = b + a (Kommutativgesetz der Addition)**

Das Kommutativgesetz gilt aber nicht für die Subtraktion, wie ein Gegenbeispiel zeigt:
Es ist (+3) - (+5) = (-2) , aber (+5) - (+3) = (+2). Also gilt (+3) - (+5) $\neq$ (+5) - (+3) .
Man kann aber leicht folgendes Gesetz (die Mathematiker nennen eine solche Folgerung einen Satz) zeigen:

Satz:
Bei der Vertauschung von Minuend und Subtrahend ändert sich das Vorzeichen der Differenz: $\mathbf{a - b = -(b - a)}$ **.**

Bekannt: Bei der Addition von mehr als zwei Zahlen kann man zusammenfassen:
$((+5) + (+3)) + (+7) = (+5) + ((+3) + (+7)) = (+15)$
Diese Zusammenfassbarkeit (Assoziativität) gilt für alle Zahlen bezüglich der Addition:

Die Summe mehrerer Zahlen ist nicht abhängig von der Zusammenfassung zweier Zahlen bei der Summenbildung:
$\mathbf{(a + b) + c = a + (b + c)}$ **(Assoziativgesetz der Addition)**

Unter Anwendung dieser Grundsätze kann man nun beliebige algebraische Summen bilden. Will man andere Prioritäten setzen, so setzt man Klammern; wenn Klammern gesetzt sind, ist der Inhalt einer Klammer wie eine eigenständige algebraische Summe zu behandeln:
Beispiel: $(+3) - ((-2) + (-5)) + (9)$

Anmerkung: Nachdem nun die Zusammenhänge zwischen Vor- und Rechenzeichen geklärt sind, können wir natürlich die recht lästigen Klammern weglassen.
Analog kann man die Addition und Subtraktion für Variable an Zahlenstrahl und Zahlengerade erklären:
So wie auf einem Zollstock ein Strich 1cm bzw. 1mm entspricht, kann man als Einheit beliebige Buchstaben, die ggfs. später durch Zahlen ersetzt werden können, als Einheit auf dem Zahlenstrahl anbringen, z.B. a. Deswegen heißt a auch Platzhalter oder Variable.
Die doppelte Entfernung zu 0 ist dann 2a, die dreifache 3a usw., analog im negativen Bereich.
Die Zahlen vor der Variablen heißen Vorzahlen oder Koeffizienten. Analog zu den normalen Zahlen kann man damit rechnen.

-5a -4a -3a -2a -1a 0 1a 2a 3a 4a 5a

Dabei ist klar, dass jeweils nur gleiche Größen bzw. Buchstaben addiert bzw. subtrahiert werden können: Man kann ja auch nicht unmittelbar 2cm und 3mm addieren oder gar 3min und 2m.
Es gelten hier wieder die Regeln (*) und (**) .

Multiplikation in $\mathbb{Z}$

Die Multiplikation ist eine Abkürzung der mehrfachen Addition: Statt
2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 schreibt man kurz $12 \cdot 2$, denn es wird 12 mal die 2 addiert.
Die beiden zu multiplizierenden Zahlen heißen Faktoren, das Ergebnis heißt Produkt:

Faktor · Faktor = Produkt .

Aus den Rechenregeln für die Addition ergeben sich die folgenden so genannten Vorzeichenregeln:
Klar ist nach Definition $(+4) \cdot (+2) = (+2) + (+2) + (+2) + (+2) = (+8)$.
Genauso klar ist dann $(+4) \cdot (-2) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = (-8)$.
Nicht so einfach nachvollziehbar ist dann aber $(-4) \cdot (+2)$.
Eine Möglichkeit, sich das klar zu machen bzw. die Festlegung zu motivieren ist:
Man erhebt die Forderung, dass die Multiplikation ebenfalls kommutativ ist:

Das Produkt ist nicht abhängig von der Reihenfolge der Faktoren:
$\mathbf{a \cdot b = b \cdot a}$ **(Kommutativgesetz der Multiplikation)**

Dann gilt natürlich $(-4) \cdot (+2) = (+2) \cdot (-4) = (-8)$ (s.o.) . Dass diese Forderung sinnvoll ist, überlegt man z.B. so:

Man schreibt sich nebenstehende Reihe auf und beobachtet, dass bei der Verringerung des ersten Faktors um 1 das Ergebnis jeweils um 2 abnimmt (bis zur 3.Zeile ist das die alte Definition und die 4.Zeile ist auch noch anschaulich). Bei der Fortsetzung der Multiplikation auf die negativen Zahlen muss dies ebenfalls der Fall sein (5.Zeile ff). Dies ist das sogenannte **Permanenzprinzip**, welches man bei der Erweiterung eines Zahlenbereiches fordert: Es sichert, dass die Rechenregeln, die in der "kleineren" Zahlenmenge gelten, auch in der größeren Zahlenmenge gelten.

$3 \cdot 2 = 6$	(1)
$2 \cdot 2 = 4$	(2)
$1 \cdot 2 = 2$	(3)
$0 \cdot 2 = 0$	(4)
$-1 \cdot 2 = -2$	(5)
$-2 \cdot 2 = -4$	(6)
	usw.

Analog kann man dann $(-4) \cdot (-2) = (+8)$ überlegen: Aus der obigen Tabelle, z.B. Zeile (3) und Zeile (5), entnimmt man, dass bei einer Vorzeichenänderung auf der linken Seite sich auch rechts das Vorzeichen ändert. Eine weitere Vorzeichenänderung auf der linken Seite muss also wiederum rechts das Vorzeichen ändern:
Aus $(-4) \cdot (+2) = (-8)$ folgt so $(-4) \cdot (-2) = (+8)$.
Man kann aber auch wie oben das Permanenzprinzip anwenden:

$$3 \cdot (-2) = -6$$
$$2 \cdot (-2) = -4 \quad \text{usw.}\ .$$

Aus dem Vorangegangenen ergeben sich folgende Vorzeichenregeln für die Multiplikation:

Das Produkt zweier Zahlen mit gleichem Vorzeichen ist positiv.
Das Produkt zweier Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen ist negativ.
Der Betrag des Produktes gleich dem Produkt der Beträge.

Leicht(er) merkt man sich diese Regeln oft als
"plus mal plus gleich plus", "plus mal minus gleich minus", "minus mal plus gleich minus" und "minus mal minus gleich minus" .

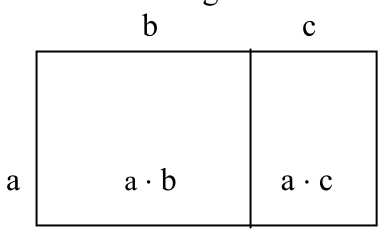
Analog zur Addition gilt:

Die Multiplikation mehrerer Zahlen ist nicht von der Zusammenfassung der Faktoren abhängig:
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (Assoziativgesetz der Multiplikation)

Zwischen den beiden Operationen gilt das folgende „Verteilungsgesetz“:

Wird eine Zahl mit einer Summe multipliziert, so verteilt sich die Zahl auf beide Summanden:
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Distributivgesetz)

Das Distributivgesetz wird sofort aus folgender Flächenberechnung einsichtig:



Der Inhalt der Gesamtfläche ist "Breite mal Gesamtlänge", also $a \cdot (b + c)$.
Er ist genau so groß wie die Summe der Inhalte der beiden Einzelflächen, nämlich $a \cdot b + a \cdot c$.

Das Distributivgesetz liefert eine weitere Bestätigung der Vorzeichenregel "minus mal minus gleich plus":
Es gilt z.B. $(-2)\,((+3) + (-3)) = (-2) \cdot 0 = 0$ (in der Klammer stehen Gegenzahlen!). Nach dem Distributivgesetz gilt aber auch
$(-2)\,((+3) + (-3)) = (-2)(+3) + (-2)(-3) = (-6) + (-2)(-3)$
Da die linke Seite gleich ist, muss die rechte Seite ebenfalls 0 sein; dies bedeutet wiederum, dass $(-2)(-3)$ die Gegenzahl von (-6) sein muss. Also gilt $(-2)(-3) = (+6)$.

Folgende weitere Vereinbarungen dienen der Klarstellung bzw. Vereinfachung.
Die Operation " · " ist gegenüber der Addition und Subtraktion vorrangig
(Merkregel aus der Grundschule: "Punktrechnung vor Strichrechnung") .
Man sagt auch, die Multiplikation ist eine Operation der 2.Stufe, während Addition und Subtraktion Operationen der 1.Stufe sind.
Beispiele: $3 \cdot 4 + 5 = 12 + 5 = 17$
$3 + 4 \cdot 5 = 3 + 20 = 23$

Rechen- und Vorzeichen sind durch Klammern zu trennen:
Beispiel: $3 \cdot (-4) = 3(-4) = ...$

Das Zeichen " · " kann weg gelassen werden, wenn keine Verwechslung möglich ist:
Beispiel: Man schreibt $3 \cdot (4 + 5) = 3\,(4 + 5) = ...$.
Achtung: Die Abkürzung $3 \cdot 4 = 3\ 4$ ist (natürlich !) nicht zulässig.

Addition und Multiplikation mit Variablen

Neben Zahlen werden in der Mathematik Buchstaben (manchmal auch andere Symbole) benutzt, die als Variable bezeichnet werden, weil sie durch (beliebige) Zahlen ersetzt werden können, praktisch also variable Zahlen sind. Statt Variable benutzen manche das Wort "Platzhalter" oder auch "Leerstelle".
Wie bei der Einführung der Multiplikation bei ganzen Zahlen kann man das Produkt einer Zahl mit einer Variablen bzw. von zwei Variablen miteinander erklären:
Man schreibt $a + a + a + a + a + a = 5 \cdot a = 5a$.
5 heißt auch die "Beizahl" oder der "Koeffizient" von a, als Produkt interpretiert sind 5 und a Faktoren, die das Produkt 5a bilden.
Wie addiert man nun solche "Zahlen" und unter welchen Voraussetzungen?
Dies kann man sich klar machen, indem man auf die Definition zurück geht:
Beispiel: $3a + 5a = (a + a + a) + (a + a + a + a + a) = a + a + a + a + a + a + a + a = 8a$;
bei gleichartigen Summanden braucht man bei der Addition also nur die Koeffizienten zu addieren.
$3a + 4b = a + a + a + b + b + b + b$ kann man nicht weiter sinnvoll zusammen fassen.
Dies ist längst bekannt aus der Rechnung mit Größen, z.B. gilt 3 cm + 4cm = 7 cm; nicht (unmittelbar) kann man 3cm + 4 mm zusammen fassen, überhaupt nicht 3cm + 4 kg.
Verallgemeinert man die obige Multiplikationsdefinition, so kann man leicht einsehen, was unter a □ b zu verstehen ist:
$$\underbrace{b + b + b + ... + b}_{\text{(a Summanden)}} = a \cdot b = ab .$$

Wegen der Kommutativität ist dies das Gleiche wie
$$\underbrace{a + a + a + ... + a}_{\text{(b Summanden)}} = b \cdot a = ba .$$

Multiplikation von Variablen bedeutet also nur, die Variablen hinter einander (wie bei einem Wort) auf zu schreiben (auch hier wird das Multiplikationssymbol weg gelassen). Damit das Ganze übersichtlicher wird, hat man die Vereinbarung getroffen, die Buchstaben in alfabetischer Reihenfolge zu schreiben, sofern nicht andere Vereinbarungen dagegen sprechen.
Beispiel: $d \cdot x \cdot a \cdot z = adxz$
Auch hier kann man gleichartige Summanden wie gehabt zusammen fassen, verschiedenartige dagegen nicht:
Beispiel: $3ab + 4ac - 5ab - 7ac = -2ab - 3ac$
Allgemein kann man sich die Rechenregel zur Addition von Summanden, die Variable enthalten, wie folgt merken:

Gleichartige Summanden werden addiert, indem man die Koeffizienten addiert:

$$\mathbf{ma + na = (m + n)\,a} \quad .$$

Verschiedenartige Summanden können nicht addiert werden.

Der erste Teil dieser Rechenregel ist letztlich wieder nichts Anderes als das Distributivgesetz, dessen Wichtigkeit erst beim Rechnen mit Variablen zu Tage tritt:
Während man Summen von Zahlen vor einer Multiplikation bilden kann, geht das bei Variablen nicht; oft werden Vereinfachungen erst durch die Anwendung des Distributivgesetzes möglich.
Das Gleiche gilt auch für die Multiplikation von Summen miteinander, wie wir auf der nächsten Seite sehen werden.
Aus dem Distributivgesetz ergibt sich sofort die folgende Multiplikationsregel:

Wird eine Summe mit einer weiteren Summe multipliziert, so ist jeder Summand der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe zu multiplizieren:

$$\mathbf{(a + b)\,(c + d) = a\,c + a\,d + b\,c + b\,d}$$

Beweis: $(a + b)\,(c + d) = (a + b)\,c + (a + b)\,d$ (Distributivgesetz mit $(a + b)$ als 1. Faktor)
$= a\,c + a\,d + b\,c + b\,d$ (Distributivgesetz mit Vertauschung der Faktoren)

Diese Multiplikationsregel kann man (natürlich..) auch für Summen mit mehr als zwei Summanden anwenden, die Anzahl der entstehenden Summanden wächst aber sehr schnell ins Unangenehme...
Besondere Beachtung verdienen (weil hier leider immer wieder Fehler auftreten..) die Vorzeichen: Das Vorzeichen eines Faktors vor der Klammer wirkt (wegen des Distributivgesetzes) gemäß den Vorzeichenregeln auf jeden sich ergebenden Summanden!
Beispiele:
1) $-3(a - b + c) = -3a + 3b - 3c$
2) $(2a - 3b)(-5c - 3d) = -10ac - 6ad + 15bc + 9bd$

Das Distributivgesetz haben wir zum Ausmultiplizieren von Klammer bisher nur von links nach rechts gelesen.
Liest man es dagegen von rechts nach links, so beschreibt es, wie man aus einer Summe ein Produkt macht. Diesen Vorgang nennt man **Ausklammern** oder **Faktorisieren**. Das bedeutet (zunächst), dass man Faktoren, die in jedem Summanden vorhanden sind, vor (oder auch hinter) eine Klammer schreibt, in der Klammer stehen dann die übrigen Faktoren.
Beispiele:
1) $3a + 6b = \mathbf{3}a + 2 \cdot \mathbf{3}b = \mathbf{3}\,(a + 2b)$
2) $3abc + 9ace - 27acd + 3ac$
$= \mathbf{3a}b\mathbf{c} + 3 \cdot \mathbf{3ac}e - 9 \cdot \mathbf{3ac}d + 1 \cdot \mathbf{3ac}$
$= \mathbf{3ac}\,(b + 3e - 9d + 1)$

Auch eine Multiplikation von zwei Summen kann man durch **partielles Ausklammern** (oft) wieder rückgängig machen.

Beispiele:
1) $3a + 3b + ac + bc$ (Ausklammern von 3 bzw. c aus je zwei Summanden)
$= 3\,(a + b) + c\,(a + b)$ (Ausklammern des Klammerfaktors $(a + b)$)
$= (a + b)\,(3 + c)$
2) $2a - 4b - ad + 2bd$ (Ausklammern von 2 bzw. (-d) aus je zwei Summanden)
$= 2\,(a - 2b) - d\,(a - 2b)$ (Ausklammern des Klammerfaktors $(a - 2b)$)
$= (a - 2b)\,(2 - d)$

Der Begriff des Terms

Definition:
Ein mathematischer Ausdruck T, der beliebig viele Variablen enthalten kann und beim Ersetzen der Variablen durch Zahlen in eine Zahl übergeht, heißt Term.
Alle die Zahlen, die man für die Variablen einsetzen kann, bilden den Definitionsbereich des Terms.
Zwei Terme $T_{1,2}$, die beim Ersetzen durch gleiche Zahlen gleiche Werte annehmen und den gleichen Definitionsbereich haben, heißen äquivalent; man schreibt dann $T_1 = T_2$.

Äquivalenzumformungen eines Terms sind z.B. Faktorisieren und Ausmultiplizieren, aber auch andere Umformungen, die wir später behandeln werden, wie z.B. Kürzen und Erweitern eines Bruches .

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Ähnlich wie bei der Subtraktion als Umkehrung der Addition die Ausführung in der Menge der natürlichen Zahlen nur dann möglich ist, wenn der Subtrahend kleiner als der Minuend ist (und dies zur Einführung einer neuen, größeren Menge, der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ zwang), verhält es sich bei der Umkehrung der Multiplikation.
Teilt man eine ganze Zahl, z.B. 56, durch eine andere ganze Zahl, z.B. 7, (in Zeichen: 56 : 7 oder auch 56 / 7) so ergibt sich 8, weil $7 \cdot 8 = 56$ ist. Es ist klar, dass sich eine solche Teilbarkeit in der Menge der ganzen Zahlen auf diejenigen Zahlen beschränkt, die ein Vielfaches der Anderen sind.
In der Grundschule behilft man sich zunächst damit, dass man Reste angibt:
17 : 4 = 4 Rest 1 . Eine solche Schreibweise ist manchmal durchaus nützlich.
Genauso wie die oben erwähnte Erweiterung der Subtraktion auf die anderen Fälle (Subtrahend größer als Minuend) zur Schaffung der neuen Zahlenmenge $\mathbb{Z}$ führte, wird auch für diese Rechenoperation eine neue Zahlenmenge eingeführt, in der die Operation "Division" uneingeschränkt durchführbar ist: Die Menge der rationalen Zahlen, bezeichnet mit $\mathbb{Q}$.
Die Bezeichnung dieser Zahlenmenge mit dem Buchstaben $\mathbb{Q}$ rührt von der Bezeichnung der Operanden bei der Division her:

Dividend : Divisor = Quotient

Die Bezeichnung als "rationale" Zahlen kommt daher, dass man sich andere als solche Zahlen nicht mehr vorstellen konnte, diese waren also "irrational".
Statt der etwas unangenehmen Schreibweise mit dem Operationszeichen ":" oder auch "/" benutzt man bekanntlich die Bruchschreibweise

$$\frac{Dividend}{Divisor} = \frac{Z\ddot{a}hler}{Nenner} = Quotient$$

und bezeichnet diese Ausdrücke als Brüche. Die Menge der rationalen Zahlen ist also die Menge aller Zahlen, die man als Bruch schreiben kann:

$$\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q} \ \ mit \ \ p \in \mathbb{Z} \ \ und \ \ q \in \mathbb{N}\}$$

(Gelesen: Q ist die Menge aller Elemente x mit (der Eigenschaft) x gleich p durch q mit p Element von Z und q Element von N) . Dabei wird durch die Vorgabe "$q \in \mathbb{N}$ " sicher gestellt, dass der Nenner nicht Null wird (eine Division durch Null ist nicht definiert).

Definition: **Echte und unechte Brüche, Stammbrüche, gleichnamige Brüche, reziproke Brüche**

a) Ein Bruch, dessen Zähler kleiner ist als sein Nenner heißt ein **echter Bruch**.
b) Ein Bruch, dessen Zähler größer ist als sein Nenner oder gleich dem Nenner ist, heißt ein **unechter Bruch**.
c) Ein Bruch mit dem Zähler 1 heißt **Stammbruch**.
d) Zwei Brüche mit gleichem Nenner heißen **gleichnamige Brüche** (sonst ungleichnamig).
e) Zwei Brüche, bei denen der Zähler des einen gleich dem Nenner des Anderen ist und umgekehrt heißen zueinander **reziprok** .

Beispiele:

a) $\frac{3}{4};\frac{7}{10}$ sind echte Brüche b) $\frac{3}{2};\frac{7}{7}$ sind unechte Brüche c) $\frac{1}{4};\frac{1}{10}$ sind Stammbrüche

d) $\frac{3}{4};\frac{7}{4}$ sind gleichnamige Brüche, $\frac{3}{4};\frac{7}{5}$ sind ungleichnamige Brüche

e) $\frac{3}{4};\frac{4}{3}$ sind reziproke Brüche .

Analog zur Bildung von Termen aus Variablen und Zahlen mit Hilfe von Addition und Multiplikation kann man Brüche, die Variable enthalten, bilden.
Dabei ist jedoch stets zu bedenken, dass eine Multiplikation durch Null nicht definiert ist, ein Bruchterm also **nicht definiert** ist **für** diejenigen Zahlen, die den **Nenner Null** werden lassen.
Beispiel:

1) Der Term $\frac{x+1}{x-1}$ ist nicht definiert für x = 1 (oder anders herum: Der Term ist definiert für $x \neq 1$) .
2) Der Term $\frac{1}{ab-1}$ ist nicht definiert, wenn $a \cdot b = 1$ ist.

Wichtig: Der Zähler kann natürlich Null sein, da Null dividiert durch eine Zahl, die nicht selbst Null ist, wieder Null ergibt.

Rechenregeln für Brüche

Aus den bekannten Axiomen und Rechenregeln für die Addition und die Multiplikation ergeben sich die folgenden Regeln für die Rechenoperationen mit Brüchen:

Erweitern :
Der Wert eines Bruches ändert sich nicht, wenn man im Zähler und im Nenner mit der gleichen von Null verschiedenen Zahl multipliziert.
Kürzen :
Der Wert eines Bruches ändert sich nicht, wenn man im Zähler und im Nenner durch die gleiche von Null verschiedene Zahl dividiert.

Beispiele:

a) $\frac{1}{4}=\frac{2}{8}=\frac{6}{24}$ b) $\frac{16}{24}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2}=\frac{8a}{16a}\ (a \neq 0)$

d) $\frac{(a-1)(b+1)}{2(a-1)}=\frac{b+1}{2}\ (a \neq 1)$

Addition / Subtraktion :
Gleichnamige Brüche können addiert bzw. subtrahiert werden, indem die Zähler addiert bzw. subtrahiert werden (und der Nenner beibehalten wird) .
Wenn zwei ungleichnamige Brüche addiert / subtrahiert werden sollen, müssen sie zuvor durch Erweitern oder Kürzen gleichnamig gemacht werden.

Beispiele:

a) $\frac{1}{4}+\frac{5}{4}=\frac{6}{4}$ b) $\frac{11}{24}-\frac{8}{24}=\frac{3}{24}$ c) $\frac{1}{2a}+\frac{7}{2a}=\frac{8}{2a}$ $(a \neq 0)$

d) $\frac{a}{4b}+\frac{2}{8b}=\frac{2a}{8b}+\frac{2}{8b}=\frac{2a+2}{8b}$ $(b \neq 0)$

Multiplikation :
Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man jeweils die Zähler und die Nenner miteinander multipliziert ("Zähler mal Zähler und Nenner mal Nenner") .

Beispiele:

a) $\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{8}$ b) $\frac{3}{4a}\cdot\frac{5c}{4b}=\frac{15c}{16ab}$ $(a,b \neq 0)$

Division :
Zwei Brüche werden durcheinander dividiert, indem man den Dividend mit dem Reziproken des Divisors multipliziert ("Multiplizieren mit dem Kehrwert") .

Beispiele:

a) $\frac{3}{2}:\frac{5}{4}=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}$ b) $\frac{3}{4a}:\frac{5c}{4b}=\frac{3}{4a}\cdot\frac{4b}{5c}=\frac{12b}{20ac}$ $(a,b,c \neq 0)$

Vorzeichenregeln :
Die bekannten Vorzeichenregeln für die Multiplikation übertragen sich, da die Division nichts Anderes ist als die Multiplikation mit dem Reziproken des Divisors:
Der Quotient zweier Zahlen mit gleichem Vorzeichen ist positiv, der Quotient zweier Zahlen mit verschiedenem Vorzeichen ist negativ.
(Oder: $\frac{+}{+}=+$; $\frac{-}{-}=+$; $\frac{+}{-}=-$; $\frac{-}{+}=-$)

Umwandlung von Brüchen in Dezimalzahlen (und umgekehrt)

Jeden Bruch kann man durch Ausdividieren des Quotienten in eine Dezimalzahl umwandeln. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Die Division bricht nach einer beliebigen Anzahl von Schritten ab.
b) Die Division erbringt eine unendliche periodische Dezimalzahl.

Beispiele:

a) $\frac{5}{4}=1{,}25$; $\frac{4}{5}=0{,}8$; $\frac{3}{8}=0{,}375$

b) $\frac{1}{6}=0{,}16666...$; $\frac{2}{9}=0{,}22222...$; $\frac{3}{7}=0{,}428571428571428571...$;

$\frac{2}{17}=0{,}117647058823529411764705882352941176470588235294...$

Dabei hat die Periode maximal eine Stelle weniger als die Zahl im Nenner beträgt:
Ein Bruch mit dem Nenner 7 hat z.B. eine 6-stellige Periode.

Man schreibt periodische Dezimalbrüche kürzer, indem man die Periode angibt und überstreicht:

$\frac{1}{6}=0,1\overline{6}$; $\frac{2}{9}=0,\overline{2}$; $\frac{3}{7}=0,\overline{428571}$; $\frac{2}{17}=0,\overline{1176470588235294}$

Umgekehrt kann man jede endliche oder unendlich-periodische Dezimalzahl in einen Bruch umwandeln:

a) Eine endliche Dezimalzahl ist ein Bruch, dessen Zähler aus den Ziffern hinter dem Komma besteht. Sein Nenner ergibt sich daraus, dass hinter dem Komma (nach dem Stellenwertsystem) Zehntel, Hundertstel, Tausendstel usw. stehen: Eine Eins mit der gleichen Anzahl von Nullen, wie die Zahl nach dem Komma besitzt.

b) Eine unendlich-periodische Dezimalzahl mit unmittelbar nach dem Komma einsetzender Periode ist ein Bruch, dessen Zähler aus den Ziffern der Periode besteht. Sein Nenner besteht aus der gleichen Anzahl von Neunen.

Beispiele:

a) $0,25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$; $0,375=\frac{375}{1000}=\frac{3}{8}$; $0,17957=\frac{17957}{100000}$

b) $0,\overline{2}=\frac{2}{9}$; $0,\overline{27}=\frac{27}{99}=\frac{3}{11}$; $0,\overline{2313}=\frac{2313}{9999}=\frac{257}{1111}$

Beweis zu b) für eine Dezimalzahl mit einer dreistelligen Periode:

Gegeben sei die Dezimalzahl $0,\overline{abc}$.

Multipliziert man diese Zahl mit 1000, so ergibt sich $1000\cdot 0,\overline{abc}=abc,\overline{abc}$.

Nun subtrahiert man von dieser Zahl die gegebene Zahl und es ergibt sich

$$1000\cdot 0,\overline{abc}-1\cdot 0,\overline{abc}=999\cdot 0,\overline{abc}\,. \quad (*)$$

Andererseits fällt beim Subtrahieren alles, was nach dem Komma steht, weg:

$$abc,\overline{abc}-0,\overline{abc}=abc\ . \quad (**)$$

Da in (*) und (**) auf der linken Seite das Gleiche steht, müssen die Zahlen auf den rechten Seiten auch gleich sein:

$$999\cdot 0,\overline{abc}=abc\ . \ (***)$$

Teilt man (***) durch 999, so steht das Behauptete da:

$$0,\overline{abc}=\frac{abc}{999}\ .$$

Dies könnte man analog für eine Zahl mit beliebig langer Periode durchführen, also ist die Behauptung bewiesen.

c) Setzt bei einer unendlich-periodischen Dezimalzahl die Periode **nicht** unmittelbar nach dem Komma ein, so muss man die Methode, die zu der Darstellung in b) führt, in Abwandlung durchführen.

Als Beispiel möchte ich das für die Zahl $0,8\overline{3}$ zeigen:

Es gilt

$$10\cdot 0,8\overline{3}=8,\overline{3} \quad \text{und} \quad 0,8\overline{3}=0,8+0,0\overline{3} \quad (*).$$

Bildet man nun wie in b) die Differenz, so erhält man einerseits

$$10\cdot 0,8\overline{3}-1\cdot 0,8\overline{3}=9\cdot 0,8\overline{3} \quad (**)\,,$$

andererseits erhält man durch Einsetzen von (*) in (**)

$$10\cdot 0,8\overline{3}-0,8\overline{3}=8,\overline{3}-(0,8+0,0\overline{3})=7,5=9\cdot 0,8\overline{3} \quad (***)\,.$$

Teilt man (***) durch 9, erweitert den Bruch erst mit 2 und kürzt dann durch 3, so ergibt sich:

$$0,8\overline{3}=\frac{7,5}{9}=\frac{15}{18}=\frac{5}{6}\ .$$

Zur Beruhigung sei gesagt: Mir fällt nicht direkt ein, wozu man das ernsthaft braucht....

Zusammenfassung:
Man kann also jeden Bruch in eine endliche oder unendlich-periodische Dezimalzahl umwandeln und umgekehrt.
Daraus lässt sich aber sofort erkennen, dass es neben den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (das sind ja alle Zahlen, die man als Bruch schreiben kann) noch andere Zahlen gibt, nämlich solche Zahlen, die eben keine endliche oder unendlich-periodische Dezimaldarstellung besitzen.
Diese Zahlen werden als "irrationale Zahlen" bezeichnet (die Wortwahl macht schon klar, wie unvorstellbar diese Tatsache den Menschen zunächst war..).
Nimmt man zu der Menge der rationalen Zahlen die Menge aller irrationalen Zahlen hinzu, so erhält man die Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{R}$.
Man kann dann zeigen, dass diese Menge allen möglichen Punkten auf der Zahlengeraden entspricht: Zu jedem Punkt gehört genau eine reelle Zahl, und zu jeder reellen Zahl gehört genau ein Punkt.

Potenzrechnung

Analog, wie man zur Abkürzung bei der wiederholten Addition ein und derselben Zahl die Multiplikation einführte (und so zu einer neuen Rechenoperation einer höheren Stufe kam), führt man eine Abkürzung bei der wiederholten Multiplikation ein und derselben Zahl ein:

$2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^9$ (gelesen: " 2 hoch 9").

$$a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=a^9$$

$$\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{(n\ Faktoren)}=a^n$$

a^n heißt "Potenz", die Zahl a heißt die Basis (oder die Grundzahl) der Potenz, n der Exponent (oder die Hochzahl). Der Exponent ist von dieser Definition her (allerdings nur vorläufig) auf die natürlichen Zahlen beschränkt.
Wie oben bereits erwähnt, entsteht auch hier eine Rechenoperation einer höheren Stufe, die bekannte Regel für die Reihenfolge der Rechenoperationen ist also zu erweitern:

Potenzrechnung vor Punktrechnung vor Strichrechnung

Dies ist besonders zu beachten, wenn es gilt, die Basis einer Potenz zu erkennen:
Da der Exponent sich immer auf die Zahl bezieht, die unmittelbar davor steht, muss man gegebenenfalls Klammern setzen, um die Priorität aufzuheben.
Beispiele:

2^9	Basis: 2
$2a^9$	Basis: a
$(2a)^9$	Basis: 2a
$-2a^9$	Basis: a
$-(2a)^9$	Basis: 2a
$(-2a)^9$	Basis: -2a

Da es sich bei der Potenzrechnung um eine fort gesetzte Multiplikation handelt, übertragen sich die Vorzeichenregeln auf Potenzen:

Vorzeichen bei Potenzen:

a) Jede Potenz einer positiven Basis ist positiv:

$$a > 0 \Rightarrow a^n > 0$$

b) Jede gerade Potenz einer negativen Basis ist positiv, jede ungerade Potenz einer negativen Basis ist negativ:

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} a^{2n} > 0 \\ a^{2n-1} < 0 \end{cases}$$

Im Folgenden werden die Rechenregeln für Potenzen zusammengestellt; sie ergeben sich sämtlich aus den bisher bekannten Rechenregeln der Addition und der Multiplikation.
Da in einer Potenz zwei Zahlen auftreten (Basis und Exponent), sind jeweils die möglichen Fälle gesondert zu betrachten (denn Potenzen sind nur dann gleich, wenn sie in Basis und Exponent übereinstimmen).

Addition / Subtraktion

a) Gleiche Potenzen (Basis und Exponent sind identisch):

$$a^3 + a^3 = a \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot a = a \cdot a \cdot a(1+1) = a \cdot a \cdot a \cdot 2 = 2 \cdot a^3 = 2a^3$$

Die Vorzahl (der Koeffizient) einer Potenz entsteht also völlig analog wie der Koeffizient bei der Rechnung mit Variablen (vgl. S. 9 bzw. S. 11), man sieht sofort ein, dass z.B. $2a^4 + 5a^4 - 4a^4 = 3a^4$.

b) Identische Basis, verschiedene Exponenten:

$$a^3 + a^2 = a \cdot a \cdot a + a \cdot a = a \cdot a(a+1) = a^2(a+1)$$

Eine weitere Zusammenfassung ist nicht möglich.

c) Identische Exponenten, verschiedene Basen:

$$a^3 + b^3 = a \cdot a \cdot a + b \cdot b \cdot b$$

Eine weitere Zusammenfassung ist nicht möglich.

d) Verschiedene Exponenten, verschiedene Basen:

$$a^3 + b^2 = a \cdot a \cdot a + b \cdot b$$

Eine weitere Zusammenfassung ist nicht möglich.

Addition von Potenzen:
Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten (und beliebigen Koeffizienten) werden addiert, indem man die Koeffizienten addiert und Basis sowie Exponent beibehält:

$$xa^n + ya^n = (x+y)a^n$$

Multiplikation

a) Identische Basis, verschiedene Exponenten:

$$a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

b) Identische Exponenten, verschiedene Basen:

$$a^3 \cdot b^3 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot b)^3 = (ab)^3$$

c) Verschiedene Exponenten, verschiedene Basen:

$$a^3 \cdot b^2 = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b = a^3 b^2$$

Eine weitere Zusammenfassung ist nicht möglich.

Multiplikation von Potenzen:

a) Potenzen mit gleicher Basis und beliebigen Exponenten werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält:

$$a^m \cdot a^n = a^{n+m}$$

b) Potenzen mit verschiedenen Basen und gleichen Exponenten werden multipliziert, indem man die Exponenten beibehält und die Basen multipliziert :

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Anmerkung:
Wenn die einzelnen Potenzen Koeffizienten besitzen, dann sind diese wie alle anderen Faktoren zu behandeln, sie können also (wegen der Kommutativität) ausmultipliziert werden.

Division

a) Identische Basis, verschiedene Exponenten:

$$a^4 : a^2 = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^{4-2} = a^2 \quad (a \neq 0)$$

Da man gleiche Faktoren kürzen kann, reduziert sich die Anzahl der Faktoren im Zähler um die Anzahl der Faktoren im Nenner.
Setzt man dies konsequent auf die Fälle fort, in denen im Nenner genau so viele Faktoren stehen wie im Zähler oder gar noch mehr, so ergibt sich eine Erweiterung des Potenzbegriffes:
Einerseits ist nach obiger Rechenregel

$$a^2 : a^2 = \frac{a \cdot a}{a \cdot a} = a^{2-2} = a^0 \ ,$$

andererseits ist aber auch

$$a^2 : a^2 = \frac{a^2}{a^2} = 1 \ .$$

Es gilt also offenbar

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0) \ .$$

Wenn im Nenner eine höhere Potenz steht, ergibt sich Folgendes:

$$a^2 : a^4 = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = a^{2-4} = a^{-2} \quad (a \neq 0) \ .$$

Da aber auch gilt

$$a^2 : a^4 = \frac{a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2} \quad (a \neq 0) \ ,$$

bedeutet dies:

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} \quad (a \neq 0) \ .$$

b) Identische Exponenten, verschiedene Basen:

$$a^3 : b^3 = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^3$$

c) Verschiedene Exponenten, verschiedene Basen:

$$a^3 : b^2 = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b} = \frac{a^3}{b^2}$$

Eine weitere Zusammenfassung ist nicht möglich.

Division von Potenzen:

a) Potenzen mit gleicher Basis und beliebigen Exponenten werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert und die Basis beibehält:

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} a^{n-m} \quad (a \neq 0)$$

b) Potenzen mit verschiedenen Basen und gleichen Exponenten werden dividiert, indem man die Exponenten beibehält und die Basen dividiert :

$$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0)$$

Anmerkung:
Wenn die einzelnen Potenzen Koeffizienten besitzen, dann sind diese wie alle anderen Faktoren zu behandeln, sie werden also in die Division mit einbezogen.

Da bei der Division zweier Potenzen mit gleicher Basis (vgl. S. 19) im Nenner eine gleich hohe oder höhere Potenz als im Zähler auftreten kann, kann der Begriff der Potenz sinnvoll auch auf nicht-positive, ganzzahlige Exponenten erweitert werden.

Erweiterung des Potenzbegriffes :

Sei $a \neq 0$. Dann gilt

a) $a^0 = 1$ und b) $\mathrm{a}^{-\mathrm{n}} = \frac{1}{\mathrm{a}^\mathrm{n}}$ $(\mathrm{n} \in \mathbb{Z})$.

Beispiele:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 1$; $\left(\frac{3ab}{47cd}\right)^0 = 1$ $(b, c \neq 0)$; $49\left(\frac{5}{7}\right)^0 = 49$

b) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$; $10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100000} = 0{,}00001$;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \frac{a^{-2}}{b^{-2}} = \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \quad (a, b \neq 0)$$

Anmerkung:
Die Regel für die Umwandlung eines negativen Exponenten in einen positiven ermöglicht das Verschieben einer Potenz vom Zähler in den Nenner bzw. die Vermeidung von Bruchstrichen:
Beispiel:

$$\frac{a^2b^3c^{-4}}{a^3b^{-1}c^{-3}} = a^2b^3c^{-4}a^{-3}b^1c^3 = a^{-1}b^4c^{-1} = \frac{b^4}{a^1c^1} = \frac{b^4}{ac}$$

Potenzieren

Aus der Definition der Potenz für natürliche Exponenten und der Übertragung auf beliebige ganzzahlige Exponenten ergibt sich die Regel für das Potenzieren von Potenzen.

Beispiele:

a) $(3^5)^3 = 3^5 \cdot 3^5 \cdot 3^5 = 3^{5+5+5} = 3^{3\cdot 5} = 3^{15}$ b) $(a^5)^{-2} = \frac{1}{(a^5)^2} = \frac{1}{a^{10}} = a^{-10}$ $(a \neq 0)$

Potenzieren von Potenzen :
Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert und die Basis beibehält:

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

Potenzieren von Summen (Binomische Formeln)

Das Potenzieren einer Summe ist ein (gegebenenfalls mehrfach angewandter) Spezialfall des bekannten Distributivgesetzes (vgl. S.10 und 12).
Wenn man eine zweigliedrige Summe (ein so genanntes Binom) quadriert, so ergibt sich
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
Dies ist die "1. Binomische Formel"; analog überlegt man die (an sich überflüssige) "2. Binomische Formel", die das Quadrieren einer Differenz beschreibt.
Die "3. Binomische Formel" beschreibt das Produkt aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen, diese Formel ist immer dann wichtig, wenn eine Differenz von Quadraten zu faktorisieren ist.

Multipliziert man nämlich aus, so ergibt sich:
$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - .b^2$.
Wir haben so die drei binomischen Formeln her geleitet:

Binomische Formeln

Für beliebige Zahlen a und b gilt :
1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3) $(a+b)(a-b) = a^2 - .b^2$

Wenn man höhere Potenzen einer Summe berechnen will, so wird das sehr schnell umständlich und rechenaufwändig:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) =$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Schreibt man einmal alle bisher berechneten Potenzen von (a + b) auf und notiert dazu alle Koeffizienten, so ergibt sich das so genannte Pascal'sche Dreieck:

$(a+b)^0$	1
$(a+b)^1$	1 1
$(a+b)^2$	1 2 1
$(a+b)^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5$	1 5 10 10 5 1

Die fünfte Zeile haben wir oben nicht berechnet, aber das braucht man auch nicht, weil man jede Zahl im Innern des Dreiecks aus der Summe der beiden darüber stehenden Zahlen erhält (und am Rand nur die "1" hinzu fügen muss) . Dieser Rechenvorgang ergibt sich aus dem Multiplikationsvorgang, wie er oben angedeutet ist.

Hier nur ein kurzer Hinweis für Profis (oder solche, die es werden wollen ...):
Man kann diese Zahlen, die so genannten Binomialkoeffizienten auch einzeln berechnen.
Die Zahl im Dreieck, die in der Zeile der Potenz "n" an der Stelle "k" nach der "1" steht (diese etwas eigenwillig erscheinende Zählart liegt daran, dass mit der "0" zu zählen begonnen wird) lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-k)} \ .$$

So ergibt sich z.B. der siebente Koeffizient für $(a+b)^{10}$ zu

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 120 \ .$$

Dies sind die so genannten Binomialkoeffizienten.
Da die Exponenten von a abfallen, die von b steigen und die Summe der Exponenten immer n beträgt, lautet die komplette Potenz zu dem oben betrachteten Koeffizienten $120a^3b^7$.
Einfacher merkt man sich die Bedeutung von k und n so:n ist der Exponent der Summe, k der Exponent einer der beiden Variablen (der andere Exponent ist dann n-k) .
Die Ergebnisse des letzten Abschnittes kann man dann noch zusammen fassen zum "Binomischen Lehrsatz" :
Für beliebige Zahlen a und b gilt:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^{n-(n-1)}b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \ .$$

Noch einmal betont: Die letzten Ausführungen stehen hier nur der Vollständigkeit halber und sind nur für diejenigen wichtig, die sich weiter gehend mit Mathematik beschäftigen wollen.

Wurzeln

Die oben erkannten Rechenregeln für Potenzen und ihre konsequente Fortsetzung ermöglichen einen Zugang zum Begriff der Wurzel und eine Schreibweise als Potenz.

> Definition:
>
> Es sei a eine positive Zahl.
> Die n-te Wurzel aus a, in Zeichen $\sqrt[n]{a}$, ist diejenige positive Zahl, welche als n-te Potenz a besitzt. Es gilt also $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.
> n heißt der Wurzelexponent, a der Radikand.
> Im Fall n = 2 spricht man dann von der "Quadratwurzel" (oder kurz "Wurzel", wenn keine Verwechslung möglich ist) und lässt den Wurzelexponenten weg.

Diese Wurzelschreibweise ist manchmal lästig, man kann auf Grund einer relativ einfachen Überlegung eine Wurzel als Potenz schreiben:
Nehmen wir zunächst eine spezielle Wurzel, z.B. $\sqrt[4]{16}$. Nach der Definition ist das die Zahl, welche als 4.Potenz die 16 besitzt: Es gilt also $\left(\sqrt[4]{16}\right)^4 = 16$.

Beachtet man nun, dass $16 = 16^1$ ist, so ist es sinnvoll $\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}}$ zu schreiben, denn nach der Regel über das Potenzieren gilt dann $\left(\sqrt[4]{16}\right)^4 = \left(16^{\frac{1}{4}}\right)^4 = 16^{\frac{1}{4}\cdot 4} = 16^1 = 16$.

Dies kann man allgemein für jede Wurzel mit beliebigem Wurzelexponenten und positivem Radikanden überlegen, so dass sich folgende Schreibweise ergibt:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

Diese Schreibweise hat den Vorteil, dass man jede Wurzel als Potenz schreiben kann und jede Rechnung mit Wurzeln als Rechnung mit Potenzen durchführen kann.
Eine Wurzel aus einer negativen Zahl kann nicht eindeutig definiert werden. Es ist klar, dass eine Quadratwurzel aus einer negativen Zahl nicht im Reellen existiert, denn es müsste sich um eine Zahl handeln, die als Quadrat eine negative Zahl besitzt (und das ist wegen der Vorzeichenregeln nicht möglich). Man könnte nun versucht sein, z.B. für eine dritte Wurzel aus einer negativen Zahl eine negative Zahl zu definieren (was die Vorzeichenregeln hergeben würden). Aber auch das führt zu Widersprüchen, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:
Da $(-2)^3 = -8$ gilt, könnte man rechnen:

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = 8^{\frac{2}{6}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Der Widerspruch -2 = 2 ist offensichtlich, eine **Wurzel aus einer negativen Zahl kann nicht gezogen werden.**

Aussagen, Aussageformen, Gleichungen, Ungleichungen, Lösung

Definition:

Ein Satz, dessen Wahrheitsgehalt feststeht, heißt **Aussage** .

Ein Satz, der eine oder mehrere Leerstellen (auch Platzhalter oder Variable genannt) enthält, der beim Ersetzen dieser Leerstellen durch geeignete Objekte zu einer Aussage wird, heißt **Aussageform** .
Die Menge der zum Einsetzen vorgesehenen Elemente heißt die **Grundmenge** G.
Je nach Anzahl der Variablen heißt die Aussageform **ein- oder mehrstellig**.
Eine Aussage oder Aussageform, die ein " = " enthält, heißt **Gleichung**, enthält sie die Zeichen " < " , " > " , " ≤ " oder " ≥ " , so heißt sie **Ungleichung**.

Beispiele:

Aussagen : $3 + 4 = 7$; $3 + 4 = 8$; $3 + 4 > 1$; $3 + 4 \leq 7$; "Heute hat es in Berlin geregnet"
keine Aussagen : $3 + 4$; $a + b = 4$; "Paul ist ein cooler Typ"

Aussageformen: $3 + x = 7$ (einstellig) ; $3x + 4y = 4z$; $3 + 4x - 3y \leq z$ (beide dreistellig);
"...... Meyer ist geboren am ... . 19.... in ...." (fünfstellig)
Gleichungen: $3 + 5 = 7$; $3 + x = 5$; $4 + 2x - 3y = 0$

Ungleichungen : $x + y \leq 8$; $x > 7$

Definition:

Ein Element der Grundmenge heißt **Lösung** der Aussageform, wenn beim Einsetzen eine wahre Aussage entsteht. Die Menge aller Lösungen heißt die **Lösungsmenge** der Aussageform.

Beispiele:
$3 + x = 10$ hat die Lösungsmenge L = { 7 } bzw. die Lösung $x = 7$

$x^2 = 9$ hat die Lösungsmenge L = { ± 3} bzw. die Lösungen $x = 3$ und $x = -3$.

Man unterscheidet Aussageformen nach ihrer Lösungsmenge:

Definition:

Eine Aussageformen heißt in der Grundmenge G
allgemeingültig, wenn L = G ,
teilgültig, wenn L eine Teilmenge von G und
nicht erfüllbar, wenn L = { } gilt.

Beispiele:
a) (a - b)(a + b) = a² - b² (allgemeingültig in $\mathbb{R}$)
b) x² + 2x = 0 (teilgültig in $\mathbb{Z}$, nicht erfüllbar in $\mathbb{N}$)
c) x² = -17 (nicht erfüllbar in $\mathbb{R}$, teilgültig in $\mathbb{C}$)

Definition:

Zwei (Un-) Gleichungen, die die gleiche Lösungsmenge haben, heißen äquivalent .
Eine Umformung einer Gleichung (oder Ungleichung), welche die Lösungsmenge nicht verändert, heißt Äquivalenzumformung . Dass zwei (Un-)Gleichungen äquivalent sind, wird durch das Zeichen "$\Leftrightarrow$" gekennzeichnet.

Wir werden uns jedoch zunächst nur mit Gleichungen beschäftigen.
Beispiele für Äquivalenzumformungen von Gleichungen :

a) Vertauschen der Seiten :
$a+b=3 \Leftrightarrow 3=a+b$
b) Zusammenfassen, Umformungen auf einer oder beiden Seiten :
$3x+2x-4x=8+3-9 \Leftrightarrow x=2$
c) Addieren/Subtrahieren einer Zahl oder eines Terms auf beiden Seiten:
$x+4=18 \Leftrightarrow x=2$; $x-4=13 \Leftrightarrow x=17$
d) Multiplikation mit einer/ Division durch eine Zahl, die verschieden von Null ist, auf beiden Seiten:
$3x=15 \Leftrightarrow x=5$
$\frac{1}{3}x=5 \Leftrightarrow x=15$

Das Quadrieren und das "einfache" Wurzelziehen ist **keine** Äquivalenzumformung, wie folgende Beispiele zeigen:
Quadriert man z.B. die Gleichung
$x-5=2$ (Lösung x = 7) auf beiden Seiten, so erhält man
$(x-5)^2=4 \Leftrightarrow x^2-10x+25=4$.
Diese Gleichung hat die Lösungen $x_1=7$ und $x_2=3$, die Lösungsmenge ist also größer geworden, die Gleichungen sind nicht äquivalent.
Zieht man auf dagegen auf beiden Seiten einer Gleichung die Wurzel, so ergibt sich z.B. Folgendes:
$x^2=16$ hat die Lösungen $x_1=4$ und $x_2=-4$, die unachtsam auf beiden Seiten durch Wurzelziehen bearbeitete Gleichung x = 4 hat nur noch die Lösung $x_1=4$.
Hier kommt man aber zu einer Äquivalenzumformung, wenn man ansetzt wie folgt:
$x^2=16 \Leftrightarrow |x|=4 \Leftrightarrow x=4 \vee x=-4$ (Das Zeichen "$\vee$" ist das aussagenlogische "oder".)

Definition:
Die Menge der Zahlen, für die sämtliche in einer (Un-) Gleichung auftretenden Terme definiert sind, heißt die Definitionsmenge der Gleichung.

Beispiel:
Die Gleichung $\frac{x^2-4}{x-2}=x$ hat die Definitionsmenge $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.
Deswegen kann man in D auf beiden Seiten mit dem Nenner (x - 2) multiplizieren, es gilt also
$\frac{x^2-4}{x-2}=x \Leftrightarrow x^2-4=x^2-2x \Leftrightarrow -4=-2x \Leftrightarrow x=2 \quad (x\in D)$.
Diese "Lösung" ist jedoch **keine** Lösung der Gleichung, da die Zahl 2 ja nicht in der Definitionsmenge der Gleichung liegt!

Das Lösen einer Gleichung bedeutet also die Umformung der Gleichung durch beliebig viele Äquivalenzumformungen, und zwar so lange, bis man die Lösung(en) ablesen kann.

Lineare Gleichungen

Definition:
Eine Gleichung der Form ax + b = c $a,b,c\in\mathbb{R}$, in der die Variable also nur in der ersten Potenz vorkommt, heißt **Lineare Gleichung**.

Die Lösung einer linearen Gleichung erfolgt durch das Isolieren der Variablen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & 3x-4=5x+6 \,|\, -5x+4 \\ \Leftrightarrow\ & -2x=10 \,|\, :(-2) \\ \Leftrightarrow\ & x=-5 \\ & L=\{-5\} \end{aligned}$$

Sind in einer linearen Gleichung mehrere Variablen enthalten, wobei eine der Variablen die zu Bestimmende ist und die Anderen nur so genannte Formvariablen sind, so kann man die Gleichung nach der gesuchten Variablen auflösen, man sagt auch, man stellt nach der Unbekannten um.

Beispiel:

$$\begin{aligned} & 3x-4b=5x+6a \,|\, -5x+4b \\ \Leftrightarrow\ & -2x=6a+4b \,|\, :(-2) \\ \Leftrightarrow\ & x=\frac{6a+4b}{-2}=-3a-2b \\ & L=\{-3a-2b\} \end{aligned}$$

Lineare Gleichungssysteme

Wenn eine Gleichung mehrere Variable enthält, so kann man diese nicht allein aus dieser einen Gleichung berechnen. Man kann zwar die Gleichung nach jeder der Variablen auflösen (dazu sagt man auch, man stelle die Gleichung um), aber es ergibt sich kein Wert für die einzelnen Variablen.
Beispiel:

$$x-4y=2 \Leftrightarrow x=4y+2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$$

Da man aus einer Gleichung eine Unbekannte berechnen kann, kann man aus zwei Gleichungen zwei Unbekannte, aus drei Gleichungen drei Unbekannte usw. berechnen.

> Definition:
>
> Wenn für ein und dieselben Unbekannten verschiedene Gleichungen gelten müssen, so nennt man dies ein **Gleichungssystem**.
> Wenn die Gleichungen sämtlich linear sind, so nennt man das System ein **lineares Gleichungssystem** (kurz: LGS).
> Ein LGS heißt
> **unterbestimmt**, wenn mehr Unbekannte als Gleichungen vorliegen
> **überbestimmt**, wenn mehr Gleichungen als Unbekannte vorliegen und
> **wohlbestimmt**, wenn genau so viele Gleichungen wie Unbekannte vorliegen .

Zum Lösen eines LGS gibt es drei Verfahren, die man je nach der Struktur der Gleichungen benutzt. Diese Verfahren sollen hier zunächst für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (so genannte 2 x 2 - Systeme) erläutert werden; für größere Systeme ergibt sich dann eine Lösung durch fort gesetztes Anwenden dieser Verfahren.

Gleichsetzungsverfahren

Wenn auf einer Seite beider Gleichungen jeweils das Gleiche steht, so müssen die anderen Seiten auch gleich sein; dadurch ist eine Unbekannte eliminiert:

$$\left\{\begin{array}{ll} y=3x+3 & (1) \\ y=2x-4 & (2) \end{array}\right\} \Rightarrow 3x+3=2x-4 \Leftrightarrow x=-7$$

Setzt man den Wert für x in Gleichung (1) oder (2) ein, ergibt sich y = - 18.
Man überzeugt sich leicht, dass diese beiden Zahlen **beide** Gleichungen erfüllen.
Man schreibt dann die Lösung auch als (x/y) = (-7/-18), also L = {(-7/-18)}.

Einsetzungsverfahren

Wenn eine der Gleichungen bereits nach einer der Variablen aufgelöst ist, so kann man diesen Wert dann in die zweite Gleichung einsetzen; dadurch ist eine Unbekannte eliminiert:

$$\left\{\begin{array}{ll} 2y-3x=3 & (1) \\ y=2x-4 & (2) \end{array}\right\} \Rightarrow 2(2x-4)-3x=3 \Leftrightarrow 4x-8-3x=3 \Leftrightarrow x=11$$

Setzt man den Wert für x in Gleichung (2) ein, ergibt sich y = 18.
Man überzeugt sich leicht, dass diese beiden Zahlen **beide** Gleichungen erfüllen;
es gilt L = {(11/18)}.

Additionsverfahren

Liegt keiner der beiden obigen Spezialfälle vor, so ist es meist praktisch, durch Addition oder Subtraktion der beiden Gleichungen eine der Unbekannten zu eliminieren. Es ist meist zusätzlich notwendig, durch geeignete Multiplikation oder Division der Gleichungen die beiden Koeffizienten der zur Elimination ausgewählten Unbekannten gleich oder gegengleich zu machen.

$$\left\{\begin{array}{l} 2y-3x=3 \quad (1)\,|\cdot 4 \\ -3y+4x=4 \quad (2)\,|\cdot 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8y-12x=12 \quad (1) \\ -9y+12x=12 \quad (2) \end{array}\right\} \Rightarrow -y=24 \Leftrightarrow y=-24$$

Setzt man den Wert für y in Gleichung (1) oder (2) ein, ergibt sich x = - 17.
Man überzeugt sich leicht, dass diese beiden Zahlen **beide** Gleichungen erfüllen;
es gilt L = {(-17/-24)}.

Die vorgestellten Verfahren kann man auch für größere Systeme anwenden. Dabei müssen die Verfahren jedoch mehrfach hintereinander durchgeführt werden, wie das folgende Beispiel der Lösung eines 3 x 3 - Systems zeigt:

$$\left\{\begin{array}{l} x+3y-2z=1 \quad (1) \\ 2x-2y+z=1 \quad (2)\,|\cdot 2 \\ 3x-2y-z=-4\ (3)\,|\cdot 2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+3y-2z=1 \quad (1) \\ 4x-4y+2z=2 \quad (2) \\ 6x-4y-2z=-8\ (3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Durch Addition von (1) + (2) = (4) bzw. (2) + (3) = (5) ergibt sich ein 2 x 2 - System:

$$\left\{\begin{array}{l} 5x-y=3 \quad (4)\,|\cdot 8 \\ 10x-8y=-6 \quad (5) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 40x-8y=24 \quad (6)\,| \\ 10x-8y=-6 \quad (5) \end{array}\right\} \Rightarrow 30x=30 \Leftrightarrow x=1$$

Einsetzen von x z.B. in (5) ergibt y = 2; Einsetzen von x und y z.B. in (2) liefert z = 3.
Insgesamt gilt also L = {(1/2/3)}.

Mit den vorgestellten Methoden wird man in den meisten Fällen eine Lösung erhalten.

Spezialfälle

Es können jedoch auch zwei andere Fälle auftreten, die hier mit Beispielen erläutert werden sollen:

a) $$\left\{\begin{array}{l} 2y-3x=3 \quad (1)\,|\cdot 3 \\ -6y+9x=-12 \quad (2) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6y-9x=9 \quad (1)\,|\cdot 3 \\ -6y+9x=-12 \quad (2) \end{array}\right\} \Rightarrow 0=-3$$

Da dies ein Widerspruch ist, besitzt das LGS **keine Lösung**.

b) $$\left\{\begin{array}{l} 2y-3x=3 \quad (1)\,|\cdot 3 \\ -6y+9x=-9 \quad (2) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 6y-9x=9 \quad (1)\,|\cdot 3 \\ -6y+9x=-9 \quad (2) \end{array}\right\} \Rightarrow 0=0$$

Es ergibt sich kein Widerspruch, aber auch keine Lösung. Dies liegt daran, dass die 2. Gleichung durch Multiplikation aus der 1. Gleichung hervor geht; man nennt solche Gleichungen **linear abhängig**. Das bedeutet, dass die 2. Gleichung keine neue Information über die beiden Unbekannten liefert, man kann (wie eingangs erwähnt) nur Umstellungen vornehmen, wie z.B. $2y-3x=3 \Leftrightarrow -3x=3-2y \Leftrightarrow x=-1+\frac{2}{3}y$.

Für jeden Wert, den man für y einsetzt, erhält man einen Wert für x, z.B. ist (1/3) eine Lösung, aber ebenfalls (3/6). Es ergeben sich demnach **unendlich viele Lösungen**!

Quadratische Gleichungen

Definition:
Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a,b,c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$, in der die Variable also in der zweiten Potenz vorkommt, heißt **Quadratische Gleichung**.

Wir unterscheiden drei Fälle:
a) b = 0 rein-quadratische Gleichung,
b) c = 0 unvollständig gemischt-quadratische Gleichung,
c) $b, c \neq 0$ vollständig gemischt-quadratische Gleichung .

Für jeden dieser Fälle sollt man die entsprechende Methode benutzen, um unnötige Fehler zu vermeiden.

Rein-quadratische Gleichung

Beispiel:

Lösung durch Isolieren:

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 3x^2 = 12 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 = 4 \\ \Leftrightarrow\quad & x_1 = 2 \vee x_2 = -2 \end{aligned}$$

Lösung durch Faktorisieren:

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x-2)(x+2) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x_1 = 2 \vee x_2 = -2 \end{aligned}$$

Dabei wird beim Isolieren in der dritten Zeile benutzt, dass sowohl das Quadrat von 2 als auch das von -2 vier ergibt.
Beim Faktorisieren wird dagegen in der dritten Zeile die Tatsache benutzt, dass ein Produkt genau dann Null wird, wenn wenigstens ein Faktor Null ist.

Unvollständig gemischt-quadratische Gleichung

Beispiel (Lösung durch Faktorisieren)

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 12x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3x(x-4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = 0 \vee x_2 = 4 \end{aligned}$$

Vollständig gemischt-quadratische Gleichung

Beispiel (Lösung durch quadratische Ergänzung)

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 12x + 9 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 4x + 3 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 4x + 4 + 3 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)^2 + 3 = 4 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & x - 2 = 1 \vee x - 2 = -1 \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = 3 \vee x_2 = 1 \end{aligned}$$

Die quadratische Ergänzung beruht darauf, dass man ein unvollständiges Quadrat zu einem vollständigen Quadrat ergänzt und dann weiter wie bei einer rein-quadratischen Gleichung rechnet. Da die quadratische Ergänzung ziemlich umständlich ist, wollen wir eine Formel dafür entwickeln, die so genannte pq-Formel.

Die allgemeine Form einer vollständig gemischt-quadratische Gleichung lautet

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)\ .$$

Da a nicht Null ist, kann man durch a dividieren:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad (2)\ .$$

Zur Abkürzung ersetzt man in (2) die Brüche durch p bzw. q:

$$\frac{b}{a}:=p;\ \frac{c}{a}:=q \qquad (3)\ .$$

$$x^2+px+q=0$$

Um ein vollständiges Quadrat gemäß der 1. Binomischen Formel zu erhalten, muss der Term x^2+px durch $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ ergänzt werden, dies geschieht durch Addition auf beiden Seiten der Gleichung.

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=\left(\frac{p}{2}\right)^2 \qquad (4)\ .$$

Nunmehr können die ersten drei Summanden gemäß der 1. Binomischen Formel zusammen gefasst werden, das q wird subtrahiert:

$$\left(x+\left(\frac{p}{2}\right)\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q \qquad (5)\ .$$

Analog wie bei der rein-quadratischen Gleichung bereits erläutert, ergeben sich die beiden Möglichkeiten

$$x_1+\left(\frac{p}{2}\right)=+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \text{ oder } x_2+\left(\frac{p}{2}\right)=-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad (6)\ .$$

Durch Subtraktion des Summanden $\frac{p}{2}$ ergeben sich die beiden Lösungen

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \qquad (7)\ .$$

Zusammen gefasst ergibt sich die Lösungsformel für eine vollständig gemischt-quadratische Gleichung:

$$\boxed{x^2+px+q=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}}$$

Beispiel:

$$x^2+4x+3=0$$

$$\Leftrightarrow \qquad x_{1,2}=-\frac{4}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-3}$$

$$=-2\pm\sqrt{1}=-2\pm1$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1=-1\vee x_2=-3$$

Hiermit ist der Stoff des Vorkurses vollständig dargestellt. Schöne Ferien !