Raumfahrttechnik
1. Hausaufgabe

Gruppe 14

Stefan Breit (310692)   Dimitri Sokolyuk (321116)

17. November 2009

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Aufgabe: Hohmann-Transfer

In der ersten Aufgabe wird ein Flug in den geostationären Orbit (GEO) mit Hilfe eines Hohmann-übergangs betrachtet. Desweiteren wird von einem Kreisorbit (LEO) mit dem Radius von 500 km und einer Inklination von 7° bzw. 28° ausgegangen. Die Aufgabe besteht darin, den Antriebsbedarf für die Vier möglichen Fälle zu berechnen: einfache Drehung im Perigäum, einfache Drehung im Apogäum, kombinierte Drehung im Perigäum und die kombinierte Drehung im Apogäum. Anschließend soll erläutert werden, welches Manöver am energetisch günstigsten ist und wie lange der Hohmanntransfer dauert.

Der Aufgabenteil b) beinhaltet die Berechnung des Antriebsbedarfes, um den Parkorbit im LEO unter dem Einfluss der Erde zu verlassen.

Um die Aufgabe lösen zu können, benötigt man einige gegebene Werte, wie zum Beispiel den Erdradius mit 6378.14 km, den Radius im LEO mit 500 km und den Radius im GEO 35837.3 km. Aus diesen Radien kann man nun die große Halbachse a bestimmen.

$$a = \frac{r_{GEO} + r_{LEO} + 2r_E}{2}$$

Ein weiterer wichtiger Wert ist der Gravitationsparameter der Erde $\mu_E = 398600\,\mathrm{km^3/s^2}$.

Jetzt kann begonnen werden den Hohmanntransfer für den Antriebsbedarf einer einfachen Drehung im Perigäum zu berechnen. Hierzu beginnt man erst zu ermitteln, wie groß die Kreisbahngeschwindigkeit im GEO sein muss, um in 500 km Entfernung auf einer Kreisbahn um die Erde zu fliegen. Diese beträgt ca. 7.613 km/s. Dieser Wert ergibt aus folgender Formel

$$V_{LEO} = \sqrt{\frac{\mu_E}{r_E + r_{LEO}}}$$

Der nächste Schritt ist die Berechnung der Transfergeschwindigkeit im Perigäum. Diese benötigt man, um die Kreisbahn um die Erde zu verlassen und auf die nächst höhere Kreisbahn zu gelangen. Die Formel zur Berechnung der Transfergeschwindigkeit lautet

$$V_p = \sqrt{\mu_E \left(\frac{2}{r_{LEO} + r_E} - \frac{1}{a} \right)}$$

Aus der Formel beträgt die Transfergeschwindigkeit ca. 9.983 km/s. Die Differenz der beiden Geschwindigkeiten, Kreisbahn- und Transfergeschwindigkeit liefert die benötigte Beschleunigung, welche ca. 2.371 km/s beträgt. Anschließend wird die Inklinationsgeschwindigkeit für die in der Aufgabe gestellten gradwerte berechnet. Für 7° sieht die Rechnung wie folgt aus.

$$\Delta V_i = 2V_{t_{GEO}} \sin(7^\circ)$$

Die Inklinationsgeschwindigkeit für 28° ist analog zu berechnen mit dem Unterschied, dass man den Sinus von 28 Grad einsetzt. Es ergibt sich aus den Formeln, dass die Inklinationsgeschwindigkeit die Werte für $7^\circ = 0.929\,\mathrm{km/s}$ und für $28^\circ = 3.683\,\mathrm{km/s}$ annehmen. Hiernach kann man sich der Kreisbahngeschwindigkeit am Ziel widmen. Man weiß, dass die Kreisbahngeschwindigkeit am Ziel geringer sein muss, als die Geschwindigkeit der Kreisbahn am Start. So lässt sich das Ergebnis aus der Formel später grob nachprüfen. Die Kreisbahngeschwindigkeit am Ziel beträgt ca. $3.073\,\mathrm{km/s}$. Die Transfergeschwindigkeit im Apogäum beträgt nach der Formel $1.627\,\mathrm{km/s}$. Um nun wieder aus dem Apogäum in das Perigäum zu gelangen, muss man die Kreisbahngeschwindigkeit verringern, um nicht - im Falle einer Geschwindigkeitserhöhung – auf die nächst höhere Ebene zu kommen. Die Differenz aus der Kreisbahngeschwindigkeit und der Transfergeschwindigkeit im Apogäum ergibt die nötige verringerung des Schubs, um die Kreisbahn wieder zu verlassen und ins Perigäum zu gelangen. Aus der Differenz ergibt sich wiederum eine Geschwindigkeitsverringerung von $1.446\,\mathrm{km/s}$. Für die gesamte Inklinationsgeschwindigkeit werden die einzelnen Inklinationsgeschwindigkeiten addiert. Daraus ergibt sich eine gesamte Inklinationsgeschwindigkeit für $7^\circ = 4.746\,\mathrm{km/s}$ und für $28^\circ = 7.5\,\mathrm{km/s}$.

Bei der Berechnung der einfachen Drehung im Apogäum ändern sich gegenüber der einfachen Drehung im Perigäum nur die Inklinationsgeschwindigkeiten. Die betragen für $7^\circ = 0.375\,\mathrm{km/s}$ und für $28^\circ = 1.487\,\mathrm{km/s}$. Daraus folgend ändern sich auch die gesamten Inklinationsgeschwindigkeiten. Diese betragen im Apogäum für $7^\circ = 2.069\,\mathrm{km/s}$ und für $28^\circ = 3.181\,\mathrm{km/s}$.

Der Antriebsbedarf für die kombinierte Drehung im Perigäum lässt sich zusätzlich mit der Formel

$$\Delta v = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 - 2V_1V_2\cos(i)}$$

berechnen. Daraus ergibt sich durch eine Inklinationsgeschwindigkeit der kombinierten Drehung für 7° von $2.599\,\mathrm{km/s}$ und für 28° eine Geschwindigkeit von $4.839\,\mathrm{km/s}$. Nach der Formel für die gesamte Inklinationsgeschwindigkeit ergibt sich wiederum für 7° ein Wert von $4.045\,\mathrm{km/s}$ und für 28° ein Wert von $6.284\,\mathrm{km/s}$.

Analog zu Berechnung des Antriebsbedarfes der kombinierten Drehung im Perigäum ergeben sich folgende Werte für Die Berechnung im Apogäum. Daraus lassen sich folgende Werte für die Inklinationsgeschwindigkeiten errechnen. Für 7° beträgt die Geschwindigkeit $2.166\,\mathrm{km/s}$ und für 28° 3.262 km/s. Die gesamten Geschwindigkeiten betragen für sieben Grad $3.612\,\mathrm{km/s}$ und für 28 grad $4.708\,\mathrm{km/s}$.

Auf Grund der oben errechneten Ergebnisse lässt sich feststellen, dass das Manöver der kombinierten Drehung im Apogäum am energetisch günstigsten ist.

Zum zweiten Teil der ersten Aufgabe benutzt man lediglich eine Formel aus dem Skript

$$V_E = \sqrt{\mu_E \frac{2}{r_{LEO} + r_E}}$$

Aus dieser ergibt sich, dass der Satellit ein Antriebsbedarf von 10.766 km/s benötigt, um den Erdorbit zu verlassen.

2 Aufgabe: Erde-Mond-Transfer

Es gilt den Antriebsbedarf für den Erde-Mond-Transfer ausgehend von einem 500 km LEO mit 7° Inklination nach einen 100 km LUO mit 1° Inklination über den Librationspunkt L1 für den energetisch günstigsten Fall zu bestimmen.

Da der Hohmann-Transfer den energiegünstisten Fall darstellt, wird der Flug mit zwei Hohmann-Transfers von LEO zum L1 und von L1 zum LUO vollzogen. Die Inklinationkorrektur erfolt in L1 mit Hilfe von der kombinierten Drehung. Die Übersicht der Flugbahn ist in der Abbildung 1 auf der Seite 6 dargestellt.

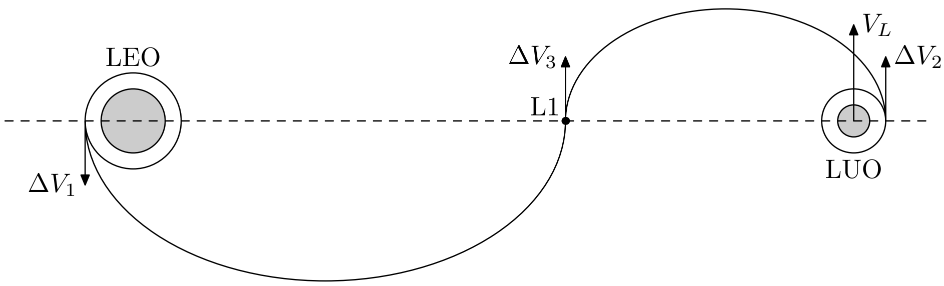

Abbildung 1: Erd-Mond-Transfer

Librationspunkt Als erstes wird die Position von L1 benötigt. L1 lässt sich mit Hilfe von dem allgemeinen Gravitationsgesetz wie folgt bestimmen. Das allgemeine Gravitationsgezetz lautet

$$F = -G\frac{Mm}{r^2}$$

In dem Librationspunt L1 heben sich die Gravitationkäfte von Mond und Erde auf. D.h. $F_E = F_L$. Ferner gilt $r = r_1 + r_2$, wobei $r = 384000$ km mittlerer Bahnradius von dem Mond, r_1 Abstand Erde-L1, r_2 Abstand L1-Mond ist. Eingesetz und vereinfacht erhält man

$$\frac{\mu_E}{r_1^2} = \frac{\mu_L}{(r - r_1)^2}$$

dabei sind $\mu_E = 3.986 \cdot 10^5\ {}^{\mathrm{km}^3}/_{\mathrm{s}^2}$ und $\mu_L = 4.903 \cdot 10^3\ {}^{\mathrm{km}^3}/_{\mathrm{s}^2}$ die Gravitationsparameter von Mond und Erde entsprechend. Die Lösung der Gleichung liefert die jeweiligen Abstände $r_1 = 345663$ km und $r_2 = 38337$ km.

Transfer LEO-L1 Für den Transfer LEO-L1 benötig man als wesentlichen Parameter die Haupthalbachse a_1 der elliptischen Bahn. Dazu sind $r_E = 6378.4km$ mittlerer Radius der Erde und $r_{LEO} = 500km$ und r_1 nötig:

$$a_1 = \frac{r_{LEO} + r_E + r_1}{2} = 176271.0km$$

Die Kreisbahngeschwindigkeit auf LEO

$$V_{LEO} = \sqrt{\frac{\mu_E}{r_{LEO} + r_E}} = 7.612\,\mathrm{km/s}$$

Transfergeschwindigkeit für die elliptische Bahn in Perigäum

$$V_{T1P} = \sqrt{\mu_E \left(\frac{2}{r_{LEO} + r_E} - \frac{1}{a_1}\right)} = 10.870\,\mathrm{km/s}$$

Somit ergibt sich der Antriebsbedarf für die elliptische Bahn

$$\Delta V_1 = |V_{T1P} - V_{LEO}| = 3.258\,\mathrm{km/s}$$

Ferner für die weitere Berechungen benötigte Transfergeschwindigkeit für die elliptische Bahn in Apogäum

$$V_{T1A} = \sqrt{\mu_E \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a_1}\right)} = 2.137\,\mathrm{km/s}$$

Transfer L1-LUO Die Haupthalbachse a_2 der elliptischen Bahn für den L1-LUO Transfer lässt sich analog zu a_1 mit folgenden Werten bestimmen: $r_L = 1738.0\,\mathrm{km}$ mittlerer Mondradius, $r_{LUO} = 100\,\mathrm{km}$ und r_2

$$a_2 = \frac{r_{LUO} + r_L + r_2}{2} = 20087.5km$$

Die Kreisbahngeschwindigkeit auf LUO

$$V_{LUO} = \sqrt{\frac{\mu_L}{r_{LUO} + r_L}} = 1.633\,\mathrm{km/s}$$

Transfergeschwindigkeit für die elliptische Bahn in Perigäum

$$V_{T2P} = \sqrt{\mu_L \left(\frac{2}{r_{LUO} + r_L} - \frac{1}{a_2}\right)} = 2.362\,\mathrm{km/s}$$

Somit ergibt sich der Antriebsbedarf

$$\Delta V_2 = |V_{T2P} - V_{LUO}| = 0.729\,{}^{\mathrm{km}}\!/\!_{\mathrm{s}}$$

Ferner für die weitere Berechungen benötige Transfergeschwindigkeit in Apogäum

$$V_{T2A} = \sqrt{\mu_L \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a_2} \right)} = 0.707\,{}^{\mathrm{km}}\!/\!_{\mathrm{s}}$$

Inklinationskorrektur in L1 Die Bezugsebene ist die Ebene der Mondbahn um die Erde, die um 5.15° zur Ekliptik geneigt ist. Darüber hinaus ist bekannt, dass die Neigung des Erdäquators zur Ekliptik 23.44° und die des Mondäquators 1.56° betragen. Somit beträgt die Neigung des Erdäquators zur Bezugsebene 23.44° + 5.15° = 28.59°. Die Neigung des Mondäquators zur Bezugsebene ist entsprechend 1.56° + 5.15° = 6.71°. Die Inklination der Startbahn beträgt 7°. Bezogen auf die Bezugsebene ergibt sich eine Inklination von 35.6°. Die Inklination der Zielbahn soll 1° betragen. Bezogen auf die Bezugsebene ergibt sich eine Inklination von 7.71°. Der Zusammenhang der o.g. Winkel ist in der Abbildung 2 auf der Seite 8 dargestellt.

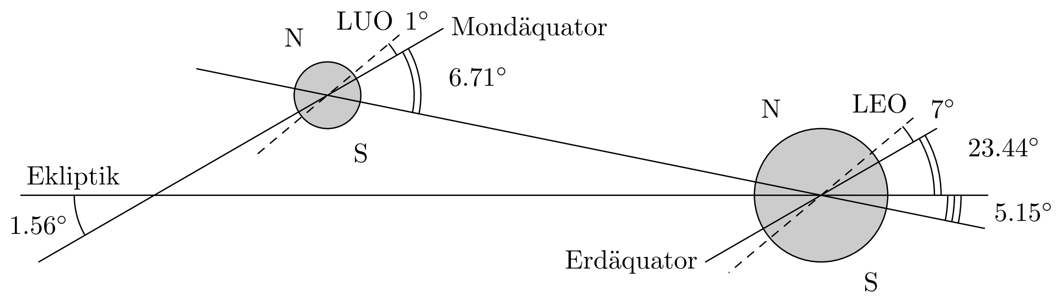

Abbildung 2: Winkelbeziehungen Mond-Erde-Ekliptik

Der in dem Librationspunkt erforderliche Antriebsbedarf setzt sich aus der Inklinationsänderung und dem Übergang von einer elliptischen Bahn auf die andere zusammen. Dabei findet ein Wechsel von dem Bezugssystem statt. Der Transfer von LEO nach L1 findet im ruhenden geleozentrischen System statt. Der Transfer von L1 nach LUO ist hingegen in einem Bewegten geleozentrischen System. Dabei muss die Geschwindigkeit vom Mond mit berücksichtigt werden.

Die Mondbahngeschwindigkeit beträgt

$$V_L = \sqrt{\frac{\mu_E}{r}} = 1.019\,{}^{\mathrm{km}}\!/\!_{\mathrm{s}}$$

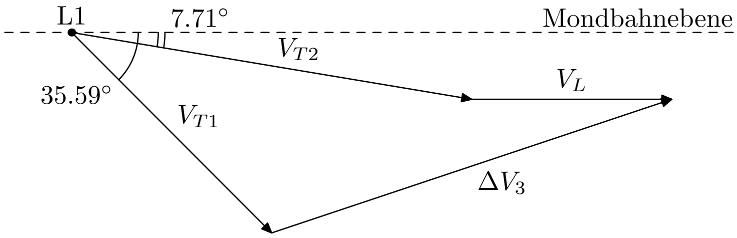

Abbildung 3: Winkelbeziehungen der Geschwidigkeiten in L1

wobei $r = 384000\,\text{km}$ mittlerer Mondbahnradius und μ_E Gravitationsparameter der Erde ist.

Der Zusammenhang der Winkel und der Geschwidigkeiten bei der kombinierten Inlinationsänderung in L1 ist in der Abbildung 3 auf der Seite 9 dargestellt. Der Mond bewegt sich in die gleiche Richtung wie der Körper, somit muss seine Geschwindigkeit vektoriell zu V_{T2} aufaddiert werden.

Der notwendige Antriebsbedarf ist somit $\Delta\vec{V_3} = \vec{V}_{T2A} + \vec{V}_L - \vec{V}_{T1A}$:

$$\Delta V_3 = \left|\Delta\vec{V_3}\right| = \left|\vec{V}_{T2A}\begin{pmatrix}\cos(7.71°)\\ \sin(7.71°\end{pmatrix} + \vec{V}_L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \vec{V}_{T1A}\begin{pmatrix}\cos(35.59°)\\ \sin(35.59°)\end{pmatrix}\right| = 1.149\,\text{km}/\text{s}$$

Der Gesamtantriebsbedarf beträgt somit

$$\Delta v = \sum_{n=1}^{3} |\Delta V_n| = 5.136\,\text{km}/\text{s}$$

3 Aufgabe: Erde-Jupiter-Transfer

Zu berechnen ist der Anatriebsbedarf von einem Transfer aus einem 500 km LEO mit Inklination von $7°$ in ein $2 \cdot 10^5$ km JO mit beliebiger Inklination.

3.1 Energieärmste Bahn

Der Transfer ist in drei bereiche unterteilt: Erdumgebung, Interplantetarer Flug und Jupiterumgebung. Der Interplanetare Flug erfolgt auf der elliptischen Hohmann-Transfer-Bahn. Die Übersicht der Bahn ist in Abbildung 7 auf der Seite 13 skizziert.

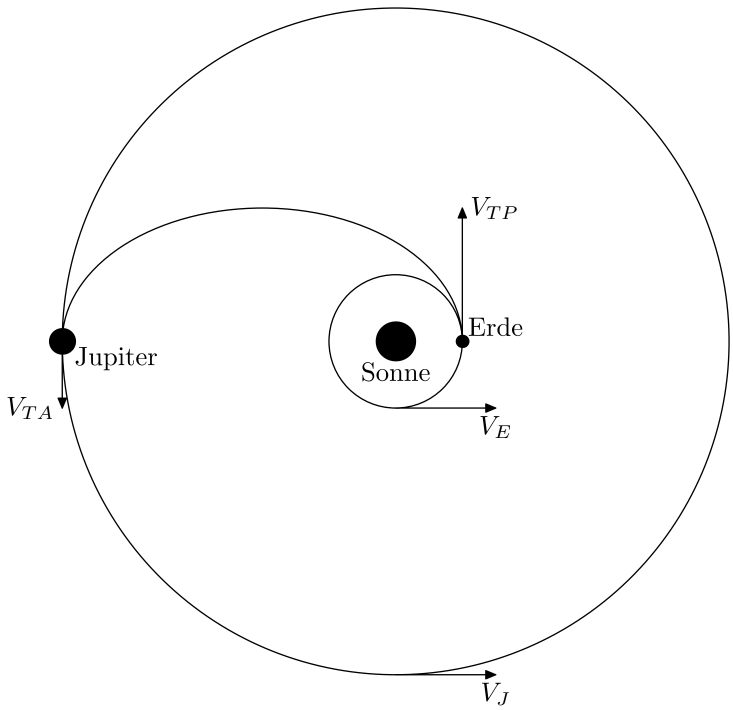

Abbildung 4: Hohmann-Transfer Erde-Jupiter

Interplanetarer Flug Die Erde und der Jupiter werden als Massepunkte angenommen. Der Flug erfolgt auf einer elliptischen Bahn. Die Erde befindet sich im Perihel, der Jupiter im Aphel.

Die Haupthalbachse beträgt $a = \frac{r_E + r_J}{2} = 3.102\,\mathrm{AU}$, wobei $r_E = 1\,\mathrm{AU}$ mittlerer Radius der Erdbahn, und $r_J = 5.203\,\mathrm{AU}$ mittlerer Radius der Jupiterbahn sind.

Transfergeschwindigkeit im Perihel, wobei $\mu_S = 1.327 \cdot 10^1 1\, \mathrm{km^3/s^2}$ der Gravitationsparameter der Sonne ist, beträgt

$$V_{TP} = \sqrt{\mu_S \left(\frac{2}{r_E} - \frac{1}{a} \right)} = 38.576\, \mathrm{km/s}$$

im Aphel

$$V_{TA} = \sqrt{\mu_S \left(\frac{2}{r_J} - \frac{1}{a} \right)} = 7.414\, \mathrm{km/s}$$

Die Bahngeschwindigkeit von Jupiter ist

$$V_J = \sqrt{\frac{\mu_S}{r_J}} = 13.057\, \mathrm{km/s}$$

Da $V_J > V_{TA}$ gilt, wird im Aphel ein Antriebsaufwand von

$$\Delta V_1 = |V_J - V_{TA}| = 5.643\, \mathrm{km/s}$$

benötigt, um den Jupiter einzuholen.

Erdumgebung Die hyperbolische Bahn in Erdumgebung ist in der Abbildung 5 auf der Seite 12 dargestellt. Die Gravitationswirkung der Sonne wird vernachlässigt. Die Geschwindigkeiten V_E und V_∞ sind kollinear.

Ausgangsorbtit ist LEO in 500 km Höhe mit Inklination von 7°. Die Kreisbahngeschwindigkeit beträgt

$$V_{LEO} = \sqrt{\frac{\mu_E}{r_E + r_{LEO}}} = 7.613\, \mathrm{km/s}$$

wobei $\mu_E = 3.986 \cdot 10^5\, \mathrm{km^3/s^2}$ Gravitationsparameter der Erde, $r_E = 6378.4\, \mathrm{km}$ mittlrer Erdraduis und $r_{LEO} = 500\, \mathrm{km}$ Orbithöhe ist.

Zum bestimmen der Transfergeschwindigkeit V_{T1} wird die hyperbolische Überschußgeschwindikeit V_∞ benötigt, die sich aus der Periheltransfergeschwindigkeit V_{TP} und der Erdbahngeswindigkeit besimmen lässt.

Die Erdbahngeschwindikteit beträgt

$$V_E = \sqrt{\frac{\mu_S}{r_e}} = 29.783\, \mathrm{km/s}$$

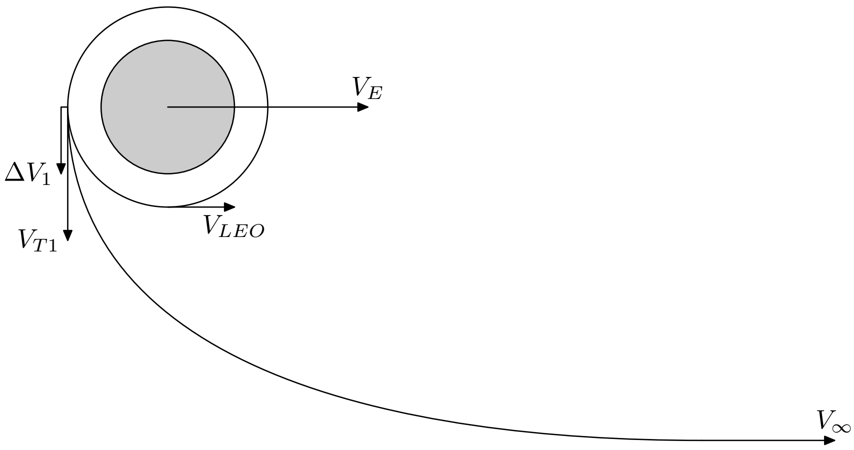

Abbildung 5: Bahn in Erdumgebung

die Periheltransfergeschwindikeit wurde im vorigen Paragraphen bestimmt und beträgt $V_{TP} = 38.582\,{}^{\mathrm{km}}\!/\!_{\mathrm{s}}$. Die hyperbolische Transfergeschwindikeit ist somit

$$V_\infty = V_{TP} - V_E = 8.792\,{}^{\mathrm{km}}\!/\!_{\mathrm{s}}$$

Es wird dabei vorausgesetzt, dass die Transfergeschwindigkeit in Perihel tangential zur Erdgeschwindigkeit ist.

Somit beträgt die Transfergeschwindigkeit V_{T1}

$$V_{T1} = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu_E}{r_E + r_{LEO}}} = 13.904\,{}^{\mathrm{km}}\!/\!_{\mathrm{s}}$$

Die Formel lässt sich unmittelbar aus dem Energieerhaltungssatz herleiten.

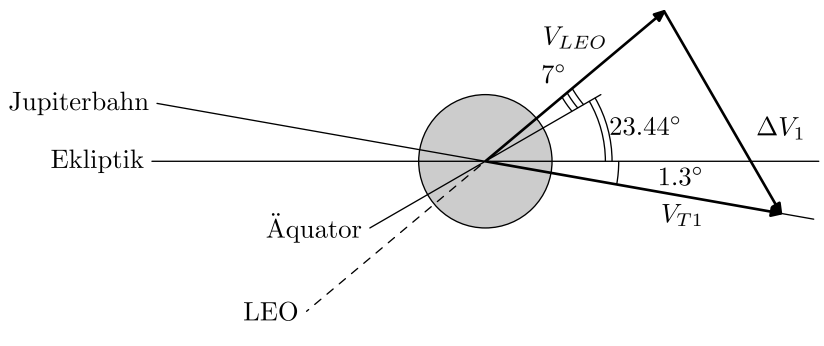

Abbildung 6: Zusammenhang der Winkel und Geschwindigkeiten bei kombinierter Drehung in LEO

Unter Berücksichtigung der Winkelbeziehungen, die in der Abbildung 6 auf der Seite 12 dargestellt sind, lässt sich nun der Antriebsbedarf für diese Phase des Fluges bestimmen.

Der Winkel der Kreisbangeschwindigkeit bezogen auf die Jupiterbahn beträgt $7° + 23.44° + 1.3° = 31.74°$. Der Winkel der Transfergeschwindikeit ist demzufolge $0°$.

$$\Delta V_1 = \left|\Delta \vec{V}_1\right| = \left|\vec{V}_{T1} - \vec{V}_{LEO}\right| = \left|V_{T1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - V_{LEO}\begin{pmatrix}\cos(31.74°)\\\sin(31.74°)\end{pmatrix}\right| = 8.437\,\mathrm{km/s}$$

Jupiterumgebung Die parabolische Bahn in der Jupiterumgebung ist in der Abbildung 7 auf der Seite 13 dargestellt. Die Gravitationswirkung der Sonne wird hierbei vernachlässigt. Die Geschwindigkeiten V_J und V_∞ sind kollinear.

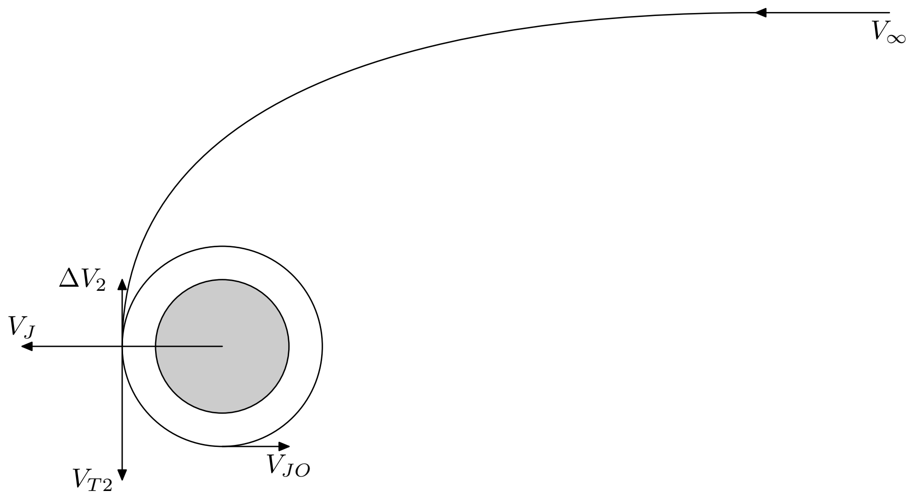

Abbildung 7: Bahn in Jupiterumgebung

Beim Eintritt in die Gravitationswirkung vom Jupiter ist die hyperbolische Überschußgeschwindigkeit $V_\infty = V_J - (V_{TA} + \Delta V_3) = 0.00\,\mathrm{km/s}$. Somit ist die Transfergeschwindigkeit in JO

$$V_{T2} = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu_J}{r_j + r_{JO}}} = 30.576\,\mathrm{km/s}$$

wobei $r_j = 11.14 r_e$ der mittlere Jupiterradius, $r_{JO} = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$ die Höhe des Jupiterorbits und $\mu_J = 1.267 \cdot 10^8\,\mathrm{km^3/s^2}$ der Gravitationsparameter von Jupiter ist.

Die Geschwindigkeit der Jupiterkreisbahn ist

$$V_{JO} = \sqrt{\frac{\mu_J}{r_j + r_{JO}}} = 21.620\,\mathrm{km/s}$$

Da keine Inklinationsänderung gefordert wird, ist der notwendige Antriebsbedarf

$$\Delta V_2 = |V_{T2} - V_{JO}| = 8.955\,\mathrm{km/s}$$

Der Gesamtantriebsbedarf für den ganzen Flug ist somit

$$\Delta V = \sum_{n=1}^{3} |\Delta V_n| = 23.035\,\mathrm{km/s}$$

3.2 Kegelschnitt

Die Übersicht der Kegelschnittbahn kann der Abbildung 8 auf der Seite 14 entnommen werden.

Der Flug erfolgt analog zu der Teilaufgabe 3.1 in drei Phasen: Erdumgebung, Jupiterumgebung und interplanetare Flug. In dieser Arbeit wird mit dem interplanetaren Flug, um die Randbedingungen für zwei andere Phasen zu bestimmen, begonnen.

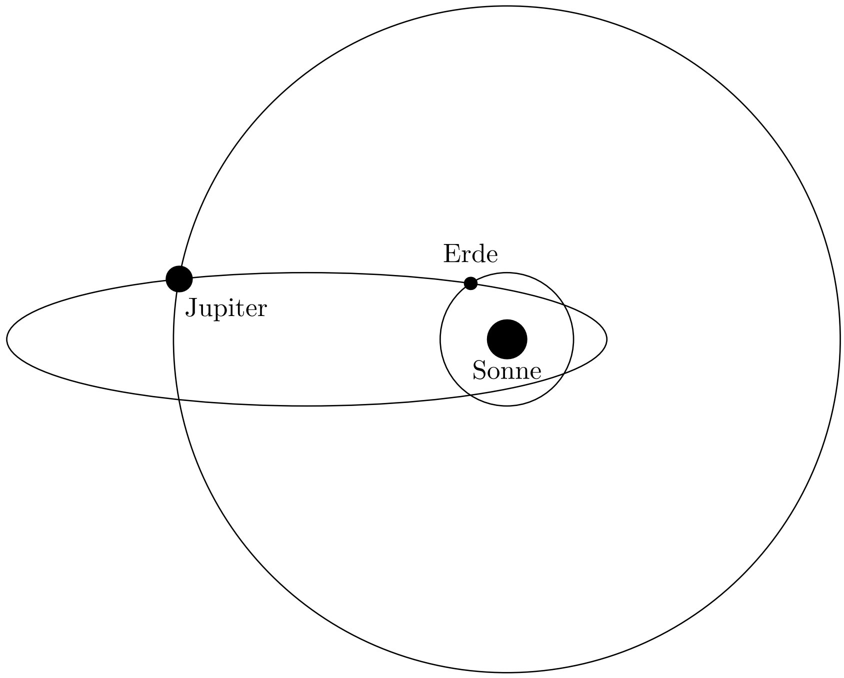

Abbildung 8: Erde-Jupiter-Transfer Kegelschnitt

Interplanetarer Flug Der Flug in der interplanetaren Phase erfolgt entlang der Kegelschnittbahn, bestimmt durch die Haupthalbachse $a = 4.395\,\mathrm{AU}$ und Aphelradius $r_a = 7.892\,\mathrm{AU}$. Die Geschwindigkeit in Aphel beträgt

$$V_a = \sqrt{\mu_S \left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a}\right)} = 4.792\,\mathrm{km/s}$$

Die Winkelbeziehung der Transfergeschwindigkeit zur Planetengeschwindigkeit wird durch

$$\sigma = \arccos\left(\frac{r_a V_a}{r_p V_p}\right)$$

ausgedrückt, wobei r_a der Aphelradius, V_a Transfergeschwindigkeit in Aphel, r_p Planetenbahnradius und V_p Transfergeschwindigkeit auf dem Planetenbahnradius sind.

Die Transfergeschwindigkeit am Anfang der Transfer ist

$$V_{TE} = \sqrt{\mu_S\left(\frac{2}{r_E} - \frac{1}{a}\right)} = 39.652\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$$

wobei r_E mittlerer Bahnradius der Erde ist. Der dazugehöriger Winkel zur Erdbahn:

$$\sigma_{TE} = \arccos\left(\frac{r_a V_a}{r_E V_{T1}}\right) = 17.482°$$

Die Transfergeschwindigkeit am Ende des Transfers ist

$$V_{TJ} = \sqrt{\mu_S\left(\frac{2}{r_J} - \frac{1}{a}\right)} = 11.796\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$$

wobei r_J mittlerer Bahnradius von Jupiter ist. Der dazugehörige Winkel zur Jupiterbahn ist:

$$\sigma_{TJ} = \arccos\left(\frac{r_a V_a}{r_J V_{T2}}\right) = 51.959°$$

Erdumgebung Die Transferbahn in der Erdumgebung ist in der Abbildung 9 auf der Seite 16 dargestellt. Die Gravitationswirkung der Sonne wird vernachlässigt. Wie aus der Zeichnung entnommen werden kann, beträgt die hyperbolische Überschußgeschwindigkeit

$$V_\infty = \left|\vec{V}_{TE} - \vec{V}_E\right| = \left|V_{TE}\begin{pmatrix}\cos(\sigma_E)\\ \sin(\sigma_E)\end{pmatrix} - V_E\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right| = 14.369\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$$

Die Transfergeschwindigkeit in LEO folgt aus dem Energieerhaltungsgesetz:

$$V_{T1} = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu_E}{r_e + r_{LEO}}} = 17.955\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$$

Der Zusammenhang der Winkel in LEO ist der Gleiche, wie in der Aufgabe 3.1 und ist in der Abbildung 6 auf der Seite 12 abgebildet. Demnach ist der notwendige Antriebsbedarf für die kombinierte Drehung in LEO

$$\Delta V_1 = \left|\vec{V}_{T1} - \vec{V}_{LEO}\right| = \left|V_{T1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} - V_{LEO}\begin{pmatrix}\cos(31.74°)\\ \sin(31.74°)\end{pmatrix}\right| = 12.159\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$$

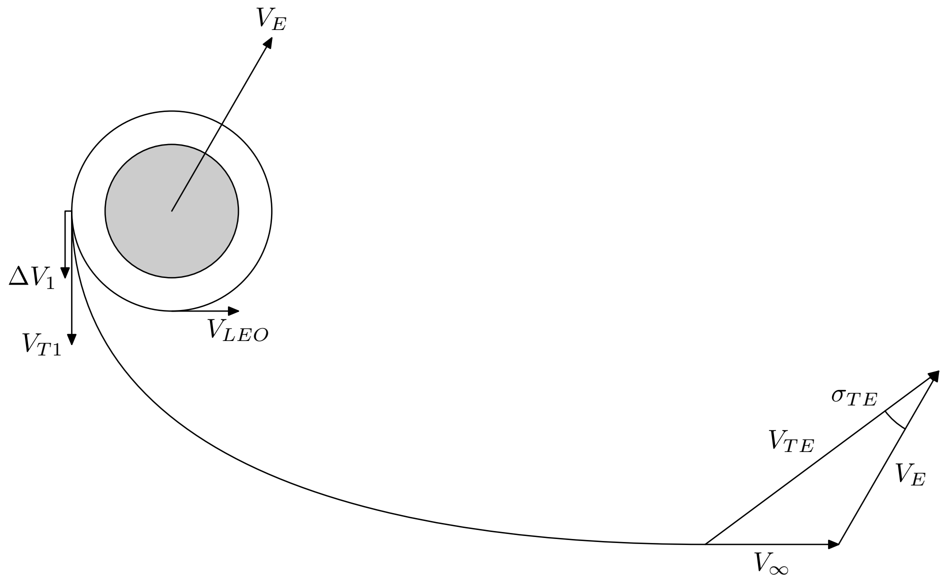

Abbildung 9: Transferbahn in der Erdumgebung

Jupiterumgebung Die Transferbahn in der Jupiterumgebung ist in der Abbildung 10 auf der Seite 17 dargestellt. Die Gravitationswirkung der Sonne wird vernachlässigt. Wie aus der Zeichnung entnommen werden kann, beträgt die hyperbolische Überschußgeschwindigkeit

$$V_\infty = \left|\vec{V}_{TJ} - \vec{V}_J\right| = \left|V_{TJ}\begin{pmatrix}\cos(\sigma_J)\\ \sin(\sigma_J)\end{pmatrix} - \vec{V}_J\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right| = 10.946\,\mathrm{km/s}$$

Die Transfergeschwindigkeit in JO aus dem Energieerhaltungsgesetz

$$V_{T2} = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu_J}{r_j + r_{JO}}} = 32.476\,\mathrm{km/s}$$

Da keine Inklinationsanpassung vorausgesetzt wird, beträgt der notwendige Antriebsbedarf, um in JO einzuschwenken

$$\Delta V_2 = V_{T2} - V_{JO} = 10.856\,\mathrm{km/s}$$

wobei V_{JO} die Kreisbahngeschwindigkeit in JO ist.

Der Gesamtantriebsbedarf für den ganzen Flug ist somit

$$\Delta V = \sum_{n=1}^{2} |V_n| = 23.015\,\mathrm{km/s}$$

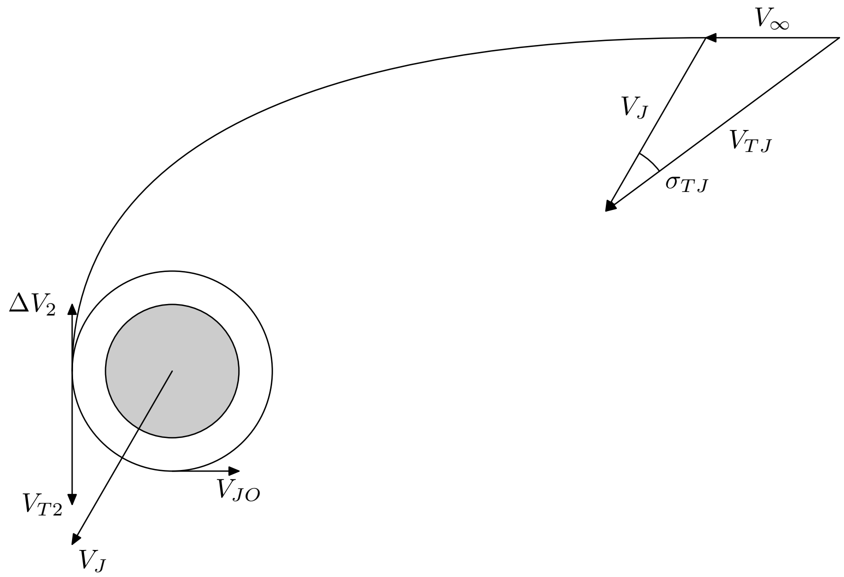

Abbildung 10: Transferbahn in der Jupiterumgebung

3.3 Swing-by am Mars

Die Übersicht von Erde-Jupiter-Transfer mit Swing-by am Mars ist in der Abbildung 11 auf der Seite 18 dargestellt. Der Flug erfolgt in fünf Phasen: Erdumgebung, interplanetarer Flug zum Mars, Swing-by am Mars, interplanetarer Flug zum Jupiter und Jupiterumgebung.

Interplanetarer Flug Erde-Mars Die Flugbahn ist die gleiche Kegelschnittbahn, wie in der Aufgabe 3.2. Die Haupthalbachse beträgt $a_1 = 4.395\,\mathrm{AU}$, der Aphelradius $r_a = 7.892\,\mathrm{AU}$. Die Tranfergeschwindigkeit in Aphel beträgt, wie bereits in der Aufgabe 3.2 bestimmt, $V_a = 4.792\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$. Die Transfergeschwindigkeit auf der Erdbahn beträgt $V_{TE} = 39.652\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$ mit dem Winkel zur Erdbahn $\sigma_{TE} = 17.482°$.

Die Transfergeschwindigkeit auf der Marsbahn beträgt

$$V_{TM} = \sqrt{\mu_S \left(\frac{2}{r_M} - \frac{1}{a_1}\right)} = 31.119\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$$

wobei $r_M = 1.516\,\mathrm{AU}$ der mittlere Radius der Marsbahn ist. Der Winkel zur Marsbahn beträgt

$$\sigma_M = \arccos\left(\frac{r_a V_a}{r_M v_{TM}}\right) = 36.710°$$

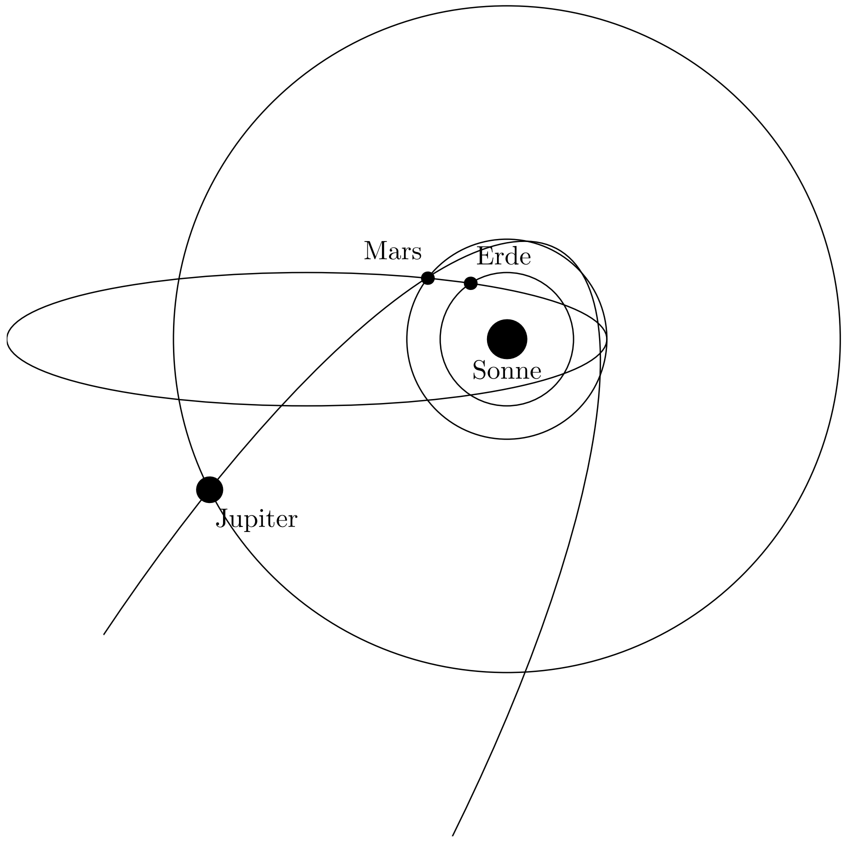

Abbildung 11: Erde-Jupiter-Transfer mit Swing-by am Mars

Marsumgebung, Swing-by Manöver Der Swing-by Manöver ist in der Abbildung 12 auf der Seite 19 dargestellt. Die Intension des Manövers ist die Erhöhung der Transfergeschwindigkeit und Umlenkung auf eine andere Bahn. Der Vorbeiflug erfolgt somit hinter dem Himmelskörper bezüglich seiner Bewegungsrichtung.

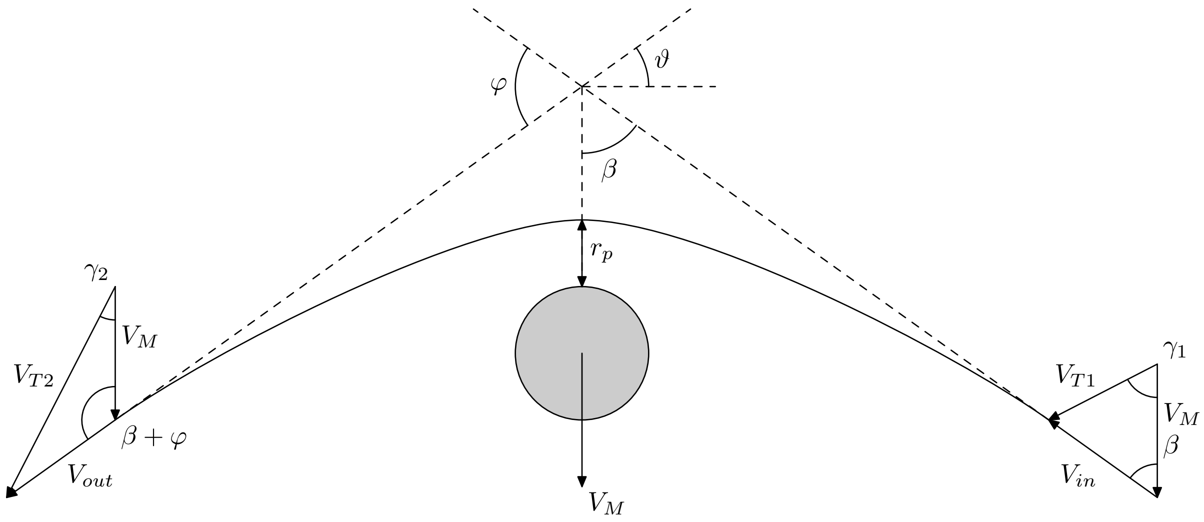

Abbildung 12: Swing-by Manöver

Die Geschwindigkeit von Mars auf seiner Bahn beträgt

$$V_M = \sqrt{\frac{\mu_S}{r_M}} = 24.189\,\mathrm{km/s}$$

Die hyperbolische Überschußgeschwindigkeit beträgt

$$V_{in} = \left|\vec{V}_{T1} - \vec{V}_M\right| = \left|V_{T1}\begin{pmatrix}\cos(\gamma_1)\\ \sin(\gamma_1)\end{pmatrix} - V_M\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\right| = 18.618\,\mathrm{km/s}$$

wobei $\gamma_1 = \sigma_M$ und $v_{T1} = v_{TM}$ (vgl. Abb. 12). Ferner ist bekannt, dass $V_{in} = V_{out}$.

Der Öffnungswinkel der Hyperbel beträgt somit

$$\vartheta = \arcsin\left(\frac{1}{1 + \frac{(r_p+r_m)V_{in}^2}{\mu_M}}\right) = 1.811°$$

wobei $r_p = 300\,\mathrm{km}$ der Abstand vom Scheitelpunkt der Hyperbel zur Marsoberfläche, $r_m = 3499.0\,\mathrm{km}$ mitterer Marsradius und $\mu_M = 4.298 \cdot 10^4\,\mathrm{km^3/s^2}$ der Gravitationsparameter von Mars ist.

Der Winkel β lässt sich aus der vektoriellen Beziehung von V_{in} und V_M bestimmen:

$$\beta = \arccos\left(\frac{\left|\vec{V}_M \cdot \vec{V}_{in}\right|}{\left|\vec{V}_M\right| \cdot \left|\vec{V}_{in}\right|}\right) = 92.334°$$

Somit beträgt die Transfergeschwindigkeit zum Jupiter

$$V_{T2} = \left|\vec{V}_M + \vec{V}_{out}\right| = \left|V_M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + V_{out} \begin{pmatrix} \cos(180° - (\beta + \varphi)) \\ \sin(180° - (\beta + \varphi) \end{pmatrix}\right| = 32.019\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$$

Die Haupthalbachse der neuen Transferbahn beträgt

$$a_2 = \frac{1}{\frac{2}{r_M} - \frac{V_{T2}^2}{\mu_S}} = 6.116\,\mathrm{AU}$$

Beim Verlassen des Gravitationswirkungsbereiches vom Mars ist eine Bahnkorrektur notwendig, um auf die Transferbahn zum Jupiter einzuschwenken. Der Ort ist so gewählt, da die hyperbolische Überschußgeschwindigkeit V_{out} im Wirkungsbereich des Marses hier am geringsten ist. Für die Bahnkorrektur ist nur eine Richtungsänderung notwendig. Der Betrag der Geschwindigkeit bleibt konstant. Der Änderungswinkel ist die Differenz der Neigungen von Mars- (1.3°) und Jupiterbahnen (1.85°) zur Ekliptik: $|1.3° - 1.85°| = 0.55°$. Der Antriebsbedarf beträgt somit

$$\Delta V = 2V_{out} \sin\left(\frac{0.55°}{2}\right) = 0.179\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$$

Interplanetarer Flug Mars-Jupiter Die Transfergerschwindigkeit an der Jupiterbahn beträgt

$$V_{TJ} = \sqrt{\mu_S \left(\frac{2}{r_J} - \frac{1}{a_2}\right)} = 13.998\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$$

Der Winkel der Transferbahn zur Jupiterbahn beträgt

$$\sigma_J = \arccos\left(\frac{r_a V_a}{r_J V_{TJ}}\right) = 58.715°$$

wobei r_a der Aphelradius, V_a Aphelgeschwindigkeit, r_J der mittlere Jupiterbahnradius und V_{TJ} die Transfergeschwindigkeit an der Jupiterbahn sind.

Erdumgebung Der Ausgangsorbit ist LEO in 500 km Höhe mit 7° Inklination. Die Kreisbahngeschwindigkeit beträgt $V_{LEO} = 7.613\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$, wie bereits in der Aufgabe 3.1 bestimmt. Die Geschwindigkeit der Erde beträgt $V_E = 29.783\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$. Die Transfergeschwindigkeit zum Mars beträgt $V_{TE} = 39.652\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$, die Neigung der Transfehrbahn zu der Erdbahn $\sigma_{TE} = 17.482°$. Die hyperbolische Transferbahn ist in der Abbildung 9 auf der Seite 16 abgebildet. Die hyperbolische Überschußgeschwindigkeit beträgt somit

$$V_\infty = \left|\vec{V}_{TE} - \vec{V}_E\right| = \left|V_{TE}\begin{pmatrix}\cos(\sigma_{TE})\\ \sin(\sigma_{TE})\end{pmatrix} - V_E\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right| = 14.370\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$$

Die Transfergeschwindigkeit in LEO folgt aus dem Energieerhaltungsgesetz:

$$V_{T1} = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu_E}{r_e + r_{LEO}}} = 17.955\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$$

Die Winkelbeziehungen für die kombinierte Drehung in LEO können der Abbildung 13 auf der Seite 21 entnommen werden. So beträgt die Gesamtinklinationsänderung $7° + 23.44° + 1.85° = 32.29°$. Der notwendige Antriebsbedarf beträgt somit

$$\Delta V_1 = \left|\vec{V}_{T1} - \vec{V}_{LEO}\right| = \left|V_{T1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - V_{LEO}\begin{pmatrix}\cos(32.29°)\\ \sin(32.29°)\end{pmatrix}\right| = 12.217\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$$

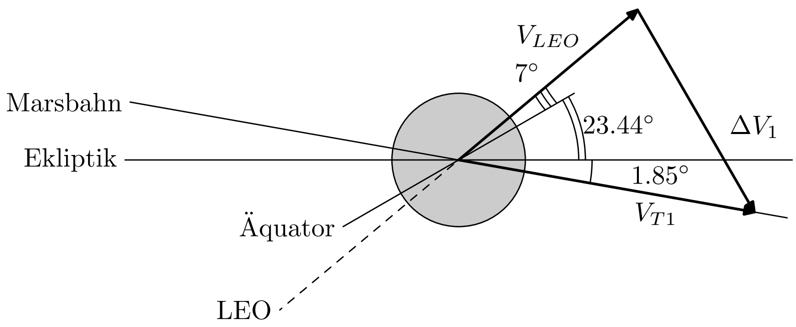

Abbildung 13: Kombinierte Drehung in LEO

Jupiterumgebung Die Tansferbahn in der Jupiterumgebung ist analog zu der Aufgabe 3.2 und ist in der Abbildung 10 auf der Seite 17 abgebildet. Die Gravitationswirkung der Sonne wird vernachlässigt.

Die hyperbolische Tansfergeschwindigkeit V_∞ beträgt

$$V_\infty = \left|\vec{V}_{TJ} - \vec{V}_J\right| = 13.289\,{}^{\mathrm{km}}/_{\mathrm{s}}$$

Die Transfergeschwindigkeit in JO lässt sich mit dem Energieerhaltungsgesetz wie folgt bestimmen:

$$V_{TJO} = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu_J}{r_j + r_{JO}}} = 33.339\,{}^{\mathrm{km}}\!/_{\mathrm{s}}$$

Die Kreisbahngeschwindigkeit in JO, wie bereits in der Aufgabe 3.2 bestimmt, beträgt $V_{JO} = 21.620\,{}^{\mathrm{km}}\!/_{\mathrm{s}}$. Da keine Inklinationskorrektur gefordert ist, beträgt der notwendige Antriebsbedarf

$$\Delta V_{JO} = |V_{TJO} - V_{JO}| = 11.718\,{}^{\mathrm{km}}\!/_{\mathrm{s}}$$

Der Gesamtantriebsbedarf des ganzen Transfers beträgt schließlich

$$\Delta V = 24.114\,{}^{\mathrm{km}}\!/_{\mathrm{s}}$$

Schlußbetrachtung Es gilt herauszufinden, welche Flugbahn von der Erde zum Jupiter die Praktikabelste in Bezug auf die Flugzeit im Abhängigkeit der Flugstrecke und der energetischen Ersparnis im Flug ist.

Im Allgemeinen ist der Hohmann-Transfer die energetisch günstigste Variante, um von einer Kreisförmigen Umlaufbahn in die nächst höhere zu gelangen. Beim Beschleunigen von der Erde bekommt man die gesamte Erdgeschwindigkeit zur eigenen Beschleunigung aufaddiert. Dennoch vergrößert sich die aufzubringende Zeit um ein Vielfaches, da die Flugstrecke länger ist, als beispielsweise beim Kegelschnitt. Der Übergang zwischen den Umlaufbahnen erfolgt über eine Ellipse.

Im Gegensatz zum Hohmann-Transfer bietet die Aufgabe auch das Fliegen entlang eines bereits erwähnten Kegelschnittes. Dieser bietet den Vorteil der Zeitersparnis durch die Reduzierung der Flugstrecke. Jedoch ist die Variante energetisch ungünstiger als der Hohmann-Transfer, da man nicht die gesamte Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn ausnutzen kann. Man fliegt in einem Winkel von der Erde weg und verliert den Vorteil der Geschwindigkeit der Erde.

Die dritte und letzte Variante ist der sogenannte Swing-by beim Mars. Hierbei wird zwar die Flugstrecke erheblich verlängert, jedoch spart man bei Swing-by Energie ein, denn man nutzt die Eigengeschwindigkeit des Marses zum eigenen Vorteil aus und gewinnt ohne großen energetischen Aufwand eine Geschwindigkeitserhöhung, um sich dem jupiter zu nähern. Diese gewonnene Geschwindigkeitsänderung wirkt sich demnach wieder positiv auf die Flugzeit aus. Dennoch ist die Flugstrecke und damit auch die Flugzeit zu lang, um den Swing-by als günstigstes Manöver zu betiteln.

Auf Grund der aus den Aufgaben berechneten Werte und der oben angeführten Argumente ist der Hohmann-Transfer die im Ganzen gesehen energetisch günstigste Flugbahn, um von der Erde zum Jupiter zu gelangen.

Winkel zwischen Transfer- und Plantenbahn Zu zeigen ist, warum die folgende Aussage gilt:

$$\sigma = \arccos\left(\frac{r_{SA}v_{TA}}{r_{SP}v_{TP}}\right)$$

wobei r_{SA} Abstand Sonne-Aphel, v_{TA} Transfergeschwindigkeit in Aphel, r_{SP} Abstand Sonne-Planet und v_{TP} Transfergeschwindigkeit auf der Planetenbahn sind.

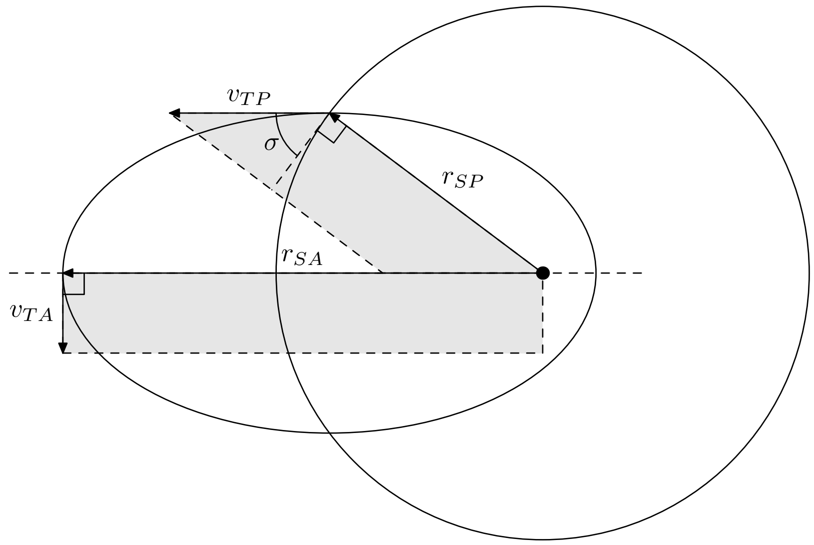

Abbildung 14: Winkel zwischen Transfer- und Plantenbahn

Die vom Körper zurückgelegte Strecke ist direktproporzional zu der Geschwindigkeit $ds = V dt$. Aus geometrischen Betrachtung folgt, dass die Vektoren r_{SA} und $v_{TA}\,dt$ eine infinitesimale Fläche $dA_A = r_{SA}\,v_{SA}\,dt$ einschließen. Die Vektoren r_{SP} und $v_{TP}\,dt$ schließen entsprechend eine infenitesimale Fläche $dA_S = r_{SP}\,v_{VT}\,dt\,\cos(\sigma)$ ein, wobei σ Winkel zwischen der Transfergeschwindigkeit V_{TP} und der Tangente zur Kreisbahn ist. Der Zusammenhang der Abstände und der Geschwindigkeiten ist in der Abbildung 14 auf der Seite 23 dargestellt.

Ferner ist es aus dem 2. Keplerschen Gesetz bekannt, dass in gleichen Zeiten der Fahstrahl die Gleichen Flächen überstreitet. Somit gilt $dA_S = dA_A$. Die Gleichung

$$\sigma = \arccos\left(\frac{r_{SA}v_{TA}}{r_{SP}v_{TP}}\right)$$

folgt dann unmittelbar daraus.

4 Eidesstattliche Erklärung

Wir erklären hiermit an Eides Statt, dass wir die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt haben. Die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.