Vorlesungsmitschriften zu den Vorlesungen

Analysis 1 bis 4

(WS 2002/03 bis SS 2004 bei Prof. Brüning)

Martin Weilandt <weilandt@math.hu-berlin.de>
Frank Lapp <Franklappbln@aol.com>
Martin Altmann <maltmann@math.hu-berlin.de>
Markus Hihn <mhihn@gmx.de>
Martin Stigge <mstigge@informatik.hu-berlin.de>

Letzte Änderung: 2004-10-17

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Die reellen Zahlen

1.1 Die natürlichen Zahlen

VL: Do, 2002-10-17

1.1.1 Definition

Eine Abbildung $\phi : A \to B$ heißt

injektiv, wenn aus $a, b \in A, a \neq b$ auch $\phi(a) \neq \phi(b)$ folgt.

surjektiv, wenn es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ gibt mit $\phi(a) = b$.

bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

1.1.2 Definition

Eine Menge A *hat n Elemente*, wenn es eine bijektive Abbildung

$$\phi : A \to \underbrace{\{1, \ldots, n\}}_{=\mathbb{N}_n}$$

gibt.

1.1.3 Definition

Zwei Mengen heißen *äquivalent*, wenn es eine bijektive Abbildung $\phi : A \to B$ gibt. Wir schreiben dann $A \sim B$.

1.1.4 Hilfssatz

Die Äquivalenz von Mengen erfüllt die folgenden Relationen:

1. $A \sim A$ (Reflexivität)
2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (Symmetrie)
3. $A \sim B$ und $B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (Transitivität)

Beweis:

1. zu zeigen: Es gibt eine bijektive Abbildung $\phi : A \to A$.
   Die gibt es: $A \ni a \mapsto a \in A$

2. zu zeigen: wenn es eine bijektive Abb. $\phi : A \longrightarrow B$ gibt, dann gibt es auch eine bijektive Abb. $\psi : B \to A$.
   Die gibt es: $B \ni b = \phi(a) \mapsto a \in A$

3. z.z.: wenn es bijektive Abbn. $\phi : A \to B$, $\psi : B \to C$ gibt, dann gibt es auch eine bijektive Abb. $\chi : A \to C$.
   Die gibt es: $A \ni a \mapsto \psi(\phi(a)) \in C$
   Injektiv: $a \neq b \Rightarrow \phi(a) \neq \phi(b)$ (da ϕ injektiv)
   $\Rightarrow \psi(\phi(a)) \neq \psi(\phi(b))$ (da ψ injektiv)
   Surjektiv: $c \in C \Rightarrow$ es gibt $b \in B$ mit $\psi(b) = c$ und $a \in A$ mit $\phi(a) = b$, weil ϕ, ψ surjektiv sind. $\Rightarrow c = \psi(\phi(a))$

□

1.1.5 Definitionen

1. Die Abbildung $A \ni a \mapsto a \in A$ heißt *identische Abbildung* id_A

2. Die Abbildung $\psi : B \ni b = \phi(a) \mapsto a \in A$ für bij. $\phi : A \to B$ heißt die *inverse Abbildung* oder *Umkehrabbildung* von ϕ, also $\phi^{-1} := \psi$.

3. Sind $\phi : A \to B$, $\psi : B \to C$ Abbn., so heißt $\psi \circ \phi(a) := \psi(\phi(a))$ die zusammengesetzte Abb. oder die Verknüpfung von ϕ und ψ („Psi nach Phi").

4. Die Zahl n heißt die *Kardinalzahl* der Mengen mit n Elementen.

1.1.6 Definition

Seien m, n natürliche Zahlen, dann heißt n *größer als* m, in Zeichen $n > m$ oder $m < n$, wenn es eine natürliche Zahl l gibt mit $n = m + l$. (D.h. 1 erzeugt die natürlichen Zahlen durch wiederholte Addition.)

1.1.7 Hilfssatz

$\mathbb{N}$ ist unendlich, d.h. $\mathbb{N}$ ist nicht äquivalent zu einer Menge mit n Elementen.

Beweis:

Annahme: $\mathbb{N}$ ist äquivalent zu einer Menge mit n Elementen. Dann gibt es unter den n Zahlen in $\mathbb{N}$ eine größte, etwa m. Dann ist auch $m+1 \in \mathbb{N}$ mit $m+1 > n$. Wid. Annahme falsch, d.h. $\mathbb{N}$ ist unendlich. □

(In der Mathematik ist jede vernünftige Aussage *wahr* oder *falsch*, d.h. p ist wahr oder non p ist wahr. Der Widerspruch hat immer die Form „p und non p sind wahr".)

1.1.8 Definition

Die Menge aller natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet,

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}_n := \{m; m \in \mathbb{N}_n \text{ für ein } n\}$$

VL: Mo, 2002-10-21

1.1.9 Definition

Eine Menge heißt *endlich*, wenn sie n Elemente hat für ein $n \in \mathbb{N}$. Andernfalls heißt die Menge *unendlich*.

Das Prinzip der *vollständigen Induktion*

Es sei $M \subset \mathbb{N}$ („M ist Teilmenge von $\mathbb{N}$“) eine Menge natürlicher Zahlen mit den Eigenschaften

1. $1 \in M$,
2. ist $m \in M$, so auch $m + 1 \in M$

Dann ist $M = \mathbb{N}$.

1.1.10 Satz

Es ist $s(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Beweis: Wir setzen $M := \left\{n \in \mathbb{N}; s(n) = \frac{n(n+1)}{2}\right\}$
z.z.: $M = \mathbb{N}$, Wir wenden das Prinzip der vollständigen Induktion an

1. $s(1) = 1, \frac{1\cdot 2}{2} = 1 \Rightarrow 1 \in M$
2. Annahme: $n \in \mathbb{N}$ erfüllt $s(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.
   Dann ist aber $s(n+1) = s(n) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ □

1.1.11 Satz

Es sei $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Aussage. Dann ist $P(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn gilt:

1. $P(1)$ ist wahr
2. $P(n)$ ist wahr $\Rightarrow P(n+1)$ wahr

Beweis: $M := \{n \in \mathbb{N}; P(n) \text{ ist wahr}\}$

1.1.12 Hilfssatz

Ist $P(n)$ wahr für $n = n_0 \in \mathbb{N}$ und folgt aus $P(n)$ für ein $n \geqslant n_0$ auch $P(n+1)$, so ist $P(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant n_0$.

Beispiel

$\mathbb{N}_n$ - wie viele Teilmengen hat $\mathbb{N}_n$? Anzahl nennen wir $A(n)$.
Das Bildungsprinzip ist offenbar $A(n+1) = 2A(n)$

1.1.13 Hilfssatz

$A(n) = 2^n$

1.1.14 Definition

Für $k, n \in \mathbb{N}, k \leqslant n$ bezeichnen wir mit $A(n,k)$ die Anzahl der Teilmengen von $\mathbb{N}_n$ mit k Elementen.
Es gilt

$$A(n+1,k) = A(n,k) + A(n,k-1)$$
$$A(n,k) = A(n,n-k)$$

1.1.15 Definition

Ist A eine Menge, so bezeichnet $\mathcal{P}(A)$ die *Potenzmenge* von A, d.h. die Menge aller Teilmengen von A. Für $B \subset A$ setzen wir $\mathcal{C}_A B := \{a \in A; a \notin B\} = A \backslash B$ das Komplement von B bez. A.

Beispiel: Die Abbildung

$$c : \mathcal{P}(A) \ni B \longmapsto \mathcal{C}_A B \in \mathcal{P}(A)$$

erfüllt $c^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{P}(A)}$. Solche Abbildungen heißen *Involutionen.*

1.1.16 Definition

Wir schreiben $\binom{n}{k} := A(n,k)$ und nennen diese Ausdrücke die *Binomialkoeffizienten.*

Soweit haben wir die additive Struktur von $\mathbb{N}$ benutzt, interessanter ist aber die multiplikative Struktur.

1.1.17 Definitionen

1. Wir sagen von $n, m \in \mathbb{N}, n \geqslant m$, dass m ein *Teiler* von n ist, wenn es $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $n = km$. Die Teiler m von n mit $m < n$ heißen die *echten Teiler* von n.

2. n heißt *prim* oder eine *Primzahl*, wenn n nur den echten Teiler 1 hat.

3. Wir bezeichnen die Summe der echten Teiler von n mit $\tau(n)$.
   Dann heißt n *vollkommen*, falls $\tau(n) = n$.

4. n, m heißen *befreundet*, falls $\tau(n) = m$ und $\tau(m) = n$ gilt.

Beispiele:

1. n heißt gerade, falls $2 \mid n$, andernfalls ungerade.

2. 2 3 5 7 9 11 13 15 ...
   Gibt es ∞ viele Primzahlzwillinge?

3. 628 ist vollkommen.
   Gibt es eine ungerade vollkommene Zahl?
   Gibt es ∞ viele vollkommene Zahlen?

4. 220 und 284 sind befreundet.

1.1.18 Satz

VL: Do, 2002-10-24

Sei $a, b \in \mathbb{Z}, b \geqslant 1$
$\Rightarrow$ es existiert ein Paar (q, r) (eindeutig bestimmt), für das

$$a = bq + r \qquad 0 \leqslant r < b \qquad \text{(q=Quotient, r=Rest)}$$

1.1.19 Prinzip des kleinsten Elements

Jede nicht leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element,
d.h. aus $M \subset \mathbb{N}, M \neq \emptyset \Rightarrow$ es gibt ein $m \in M$ mit $m \leqslant n$ für alle $n \in M$.
Bemerkungen:

1. Nicht jede Menge von Zahlen beliebiger Art hat ein kleinstes Element, z.B. $\mathbb{Z}$.

2. Aus Prinzip 1.1.19 kann man das Prinzip der vollständigen Induktion als Satz beweisen.

3. Das Prinzip ist gültig für Mengen $M \subset \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$
   Wenn $M \subset \mathbb{Z}_+$ betrachten wir $M_1 = \{a + 1 : a \in M\} \subset \mathbb{N}$
   $\Rightarrow M_1$ hat ein kleinstes Element $m_1 \Rightarrow m = m_1 - 1$ ist kleinstes Element von M.

Beweis des Satzes 1.1.18

$a \in \mathbb{Z}, b \geqslant 1$
Sei $X := \{a - bx \in \mathbb{Z}_+ : x \in \mathbb{Z}\}$
$X \neq \emptyset$ weil für $x = -|a| \quad \underbrace{a + b|a|}_{\geqslant 0} \in X$
Nach 1.1.19 und Bemerkung 3 existiert ein kleinstes Element $r = a - bq \in X$
$\Rightarrow r \geqslant 0, \qquad a = bq + r$

$a - bq$ ist das kleinste Element in $X \Rightarrow a - b(q + 1) \notin X$
$\Rightarrow a - b(q + 1) < 0 \Rightarrow \underbrace{a - bq}_{r} - b < 0 \Rightarrow r < b$
Bemerkung: q = die größte ganze Zahl unter $\frac{a}{b} \quad q = \left[\frac{a}{b}\right]$

Der größte gemeinsame Teiler

$a, b \in \mathbb{Z}$ (nicht beide sind 0)
$D_{a,b} = \{d \geqslant 1; d \mid a \text{ und } d \mid b\}$ endlich; $\quad 1 \in D_{a,b} \Rightarrow (a,b) > 0$

$b \neq 0 \Rightarrow b$ hat nur endlich viele Teiler (alle $\leqslant |b|$)
(alle $c \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ teilen 0: $0 = 0 \cdot c$)

Sei d_0 das größte Element von $D_{a,b}$
= der größte gemeinsame Teiler ggT oder (a,b)

Der *Euklidische Algorithmus* liefert eine kurze Methode, um (a,b) zu finden.
a, b gegeben, $b > 0$ (weil $(a,b) = (a,-b)$)

Lemma: $a = bq + r, 0 \leqslant r < b \Rightarrow (a,b) = (b,r)$

Beweis:
Sei $u \in D_{a,b}$; $\quad a = su, b = tu \quad (s,t \in \mathbb{Z})$
$\Rightarrow su = tuq + r \Rightarrow r = (s - tq)u \Rightarrow u \mid r \Rightarrow u \in D_{b,r} \Rightarrow D_{a,b} \subset D_{b,r}$

Sei $v \in D_{b,r}$; $\quad b = t'v, r = s'v$
$\Rightarrow a = t'vq + s'v = (t'q + s')v \Rightarrow v \mid a \Rightarrow v \in D_{a,b} \Rightarrow D_{b,r} \subset D_{a,b}$,
d.h.

$$\begin{aligned} D_{a,b} &= D_{b,r} \\ \text{größtes Element in } D_{a,b} &= \text{größtes Element in } D_{b,r} \\ (a,b) &= (b,r) \end{aligned}$$

Algorithmus

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 && 0 < r_1 < b \\ b &= r_1 q_2 + r_2 && 0 < r_2 < r_1 \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3 && 0 < r_3 < r_2 \\ &\vdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_n + r_n \\ r_{n-1} &= r_n q_{n+1} + 0 \end{aligned}$$

$$b > r_1 > r_2 > \ldots > r_n > 0 \qquad (*)$$

ist eine abnehmende Folge. Nach höchstens b Schritten erreichen wir einen Rest $= 0$.

1.1.20 Satz

(a, b) ist der letzte Rest verschieden von 0 in (*) Beweis: Nach dem Lemma

$$\begin{aligned}
a = bq_1 + r_1 &\quad\Rightarrow\quad (a,b) = (b, r_1)\\
b = r_1 q_2 + r_2 &\quad\Rightarrow\quad (b, r_1) = (r_1, r_2)\\
&\quad\vdots\\
r_{k-1} = r_k q_{k+1} + r_{k+1} &\quad\Rightarrow\quad (r_{k-1}, r_k) = (r_k, r_{k+1})\\
&\quad\vdots\\
r_{n-1} = r_n q_{n+1} + 0 &\quad\Rightarrow\quad (r_{n-1}, r_n) = (r_n, 0) = r_n
\end{aligned}$$

1.1.21 Satz

Es können $l, k \in \mathbb{Z}$ gefunden werden mit $(a, b) = ka + lb$ (Linearkombination)

Beweis

$\exists k_1, l_1 \in \mathbb{Z}$ mit $r_1 = k_1 a + l_1 b$, denn
$a = bq_1 + r_1 \Rightarrow r_1 = a - bq_1 \Rightarrow k_1 = 1, l_1 = -q_1$

$\exists k_2, l_2 \in \mathbb{Z}$ mit $r_2 = k_2 a + l_2 b$, denn
$b = r_1 q_2 + r_2 \Rightarrow r_2 = b - r_1 q_2 = b - (k_1 a + l_1 b) q_2 = \underbrace{(1 - l_1 q_2)}_{l_2} b - \underbrace{k_1 q_2}_{k_2} a$

Das Verfahren fortsetzen bis $r_n = k_n a + l_n b$

1.1.22 Folgerung

Sei p eine Primzahl; $a, b \in \mathbb{Z}$
$p \mid ab \Rightarrow p \mid a$ oder $p \mid b$ Beweis: Nehmen wir an, dass $p \nmid a \Rightarrow (a, p) = 1$
Nach 1.1.21 gibt es $l, k \in \mathbb{Z} : 1 = ka + lp \Rightarrow b = kab + lpb$

Mit $ab = rp \quad (r \in \mathbb{Z})$ folgt $b = krp + lpb = (kr + lb)p \Rightarrow p \mid b$ □

1.1.23 Eindeutigkeit der Primzahlzerlegung

Jede natürliche Zahl $\geqslant 2$ lässt sich als ein Produkt von Primzahlen schreiben.
Diese Darstellung ist eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren.
Schreibweise: $\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{N}, p \text{ ist prim}\} = \{2,3,5,7,11,13,17,\ldots\}$
Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Abbildung $\alpha : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ mit $\alpha(p) \neq 0$ nur für endlich viele $p \in \mathcal{P}$ und

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha(p)} = p_1^{\alpha(p_1)} \cdots p_k^{\alpha(p_k)}$$

(normalerweise $p_1 < \ldots < p_k$)

Beweis

Existenz: Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$

- $n = 2$: $2 \in \mathcal{P}$
- $n \geqslant 2$ bewiesen. Dann gibt es zwei Fälle:
  1. $n + 1 \in \mathcal{P}$
  2. $n+1 \notin \mathcal{P}$: Nach Definition hat $n+1$ einen Teiler m mit $1 < m < n + 1$, also $n + 1 = mk$ mit $1 < k < m + 1$

  Also ist die Induktionsvoraussetzung anwendbar auf k und $m \Rightarrow$ Behauptung □

Eindeutigkeit: Wir betrachten eine Identität

$$p_1^{\alpha(p_1)} \cdots p_k^{\alpha(p_k)} = q_1^{\tilde{\alpha}(q_1)} \cdots q_l^{\tilde{\alpha}(q_l)}$$

und müssen zeigen: wenn wir die p_i und die q_j der Größe nach ordnen, dann gilt:

$$p_i = q_i, k = l, \alpha(p_i) = \tilde{\alpha}(q_i)$$

Es genügt dafür zu zeigen, dass aus (*) $q \mid p_1^{\alpha(p_1)} \cdots p_k^{\alpha(p_k)}$ folgt $q = p_i$ für ein i, wenn q prim.

Zeige (*) durch Induktion über $\alpha = \alpha(p_1) + \ldots + \alpha(p_k)$

- $\alpha = 1 : p_1^{\alpha(p_1)} \cdots p_k^{\alpha(p_k)} = p_i \in \mathcal{P}, q \mid p_i \Rightarrow q = p_i$
- $\alpha \geqslant 1$ bewiesen, $\alpha(p_1) + \ldots + \alpha(p_k) = \alpha + 1$
  $p_1^{\alpha(p_1)} \cdots p_k^{\alpha(p_k)} =: p_1\tilde{p}$, $\tilde{p}$ ist ein Primzahlprodukt mit Exponentensumme $= \alpha, q \mid p_1\tilde{p}$
  1. Fall $q \mid \tilde{p} \Rightarrow q = p_i$ nach Induktionsvoraussetzung
  2. Fall $q \nmid \tilde{p} \Rightarrow (q, \tilde{p}) = 1$
     Nach 1.1.21 gibt es dann $a, b \in \mathbb{Z}$ mit
     $aq + b\tilde{p} = 1 \Rightarrow ap_1q + bp_1\tilde{p} = p_1$,
     $lq = p_1\tilde{p} \Rightarrow p_1 = ap_1q + blq = q(ap_1 + bl) \Rightarrow q \mid p_1 \Rightarrow q = p_1$ □

VL: Mo, 2002-10-28

1.1.24 Satz (Euklid)

$\mathcal{P} = \{p \in \mathbb{N}; p \text{ ist prim}\}$ ist unendlich.

Beweis

Annahme: $\mathcal{P}$ ist endlich, $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Setze $q := p_1 \cdots p_n + 1 \Rightarrow q > p_i$ für jedes i
Nach dem Hauptsatz besitzt q eine Zerlegung in Primfaktoren, d.h. es gibt ein $p_i \mid q$, weil q nicht prim sein kann.
D.h. $lp_i = p_1 \cdots p_i \cdots p_n + 1 \Rightarrow p_i \mid 1$ — Widerspruch □

Frage: Gibt es eine explizite (injektive?) algebraische Funktion $p : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $p(n)$ prim für alle n?

Versuch: Fermatsche Primzahlen $F_n = 2^{(2^n)} + 1, n \in \mathbb{Z}_+$

n	0	1	2	3	4	5
F_n	3	5	17	257	65537	$4294967297 = 641 \times 6700417$

1.1.25 Hilfssatz

Für $n \in \mathbb{Z}_+$ gilt

$$\prod_{j=0}^{n} F_j = F_{n+1} - 2$$

Folgerung: Es gilt 1.1.24, denn $(F_i, F_j) = 1$ für $i \neq j; i, j \in \mathbb{Z}_+$

Beweis von 1.1.25 durch vollständige Induktion

1. $n = 0 : F_0 = 3 = 5 - 2$
2. Sei die Behauptung bewiesen für $n - 1 \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{n} F_j &= F_n \prod_{j=0}^{n-1} F_j = \left(2^{2^n} + 1\right)\left(2^{2^n} - 1\right) \\ &= \left(2^{2^n}\right)^2 - 1 = 2^{2^{n+1}} - 1 = F_{n+1} - 2 \end{aligned}$$

$\square$

Gauß: Das regelmäßige n-Eck ist nur dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn

$$n = 2^{\alpha(2)} \prod_{p \in \mathcal{P} \setminus \{2\}} p^{\alpha(p)}$$

wobei $\alpha(p) = 0$ oder $= 1$ und $\alpha(p) = 1 \Rightarrow p$ ist eine Fermatsche Primzahl.

1.2 Die reellen Zahlen

Die reellen Zahlen sind eine Menge names $\mathbb{R}$, die den folgenden Axiomen genügen.

I Körperaxiome

I A) Die Addition

Es gibt eine Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y \in \mathbb{R}$, mit den folgenden Eigenschaften:

(I 1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ *Assoziativität der Addition*

(I 2) $x + y = y + x$ *Kommutativität der Addition*

(I 3) es gibt ein Element $0 \in \mathbb{R}$ mit $x + 0 = 0 + x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. *Existenz der Null*

(I 4) zu $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein Element $-x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $x + (-x) = (-x) + x = 0$ *Existenz des Inversen*

I B) Die Multiplikation

Es gibt eine Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x \cdot y$, genannt Multiplikation, mit den Eigenschaften:

(I 5) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *Assoziativität der Multiplikation*

(I 6) $x \cdot y = y \cdot x$ *Kommutativität der Multiplikation*

(I 7) es gibt ein Element $1 \in \mathbb{R}$ mit $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ *Existenz der Eins*

(I 8) Zu $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gibt es ein inverses Element x^{-1}, so dass $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$ für ein Element $1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

I C) Das Distributivgesetz

$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Bemerkungen

1. Sind A, B Mengen, so setzen wir $A \times B := \{\phi : \{1{,}2\} \to A \cup B; \phi(1) \in A, \phi(2) \in B\} = \{(a,b); a \in A, b \in B\}$ ($\leftarrow$ Schreibweise)

2. Die Null ist eindeutig bestimmt. Ist $0' \in \mathbb{R}$ ein Nullelement mit der Eigenschaft (I B), so gilt $0' = 0' + 0 = 0$

3. Notation $+(-a) = -a$, z.B. $b + (-a) = b - a$

   Sei $-a'$ ein Element von $\mathbb{R}$ mit (I 4), d.h. $-a' + a = a - a' = 0$

   $$\Rightarrow -a = -a + 0 = -a + (a - a') = (-a + a) - a' = 0 - a' = -a'$$

   Also ist das Inverse eindeutig bestimmt!

4. $-0 = 0$, weil $0 + 0 = 0$

5. $-(-x) = x$, denn $x = (-(-x) + (-x)) + x = -(-x) + ((-x) + x) = -(-x)$

6. $-(x+y) = -x - y$, denn $-x - y + (x + y) = -x + (x - y + y) = -x + x = 0$

7. Notation $x \cdot y = xy$

8. 1 und x^{-1} sind eindeutig bestimmt.

9. $-(xy) = (-x)y$, denn

   $$\begin{aligned} xy - (xy) &= 0 \\ xy + (-x)y &= (x + (-x))y = 0 \cdot y \overset{?}{=} 0 \end{aligned}$$

10. $0 \cdot x = (0 + 0)x = 0x + 0x = 2 \cdot 0 \cdot x \qquad | - 0 \cdot x$
    $\Rightarrow 0 \cdot x = 0$

11. Eine Menge mit den oben genannten Eigenschaften heißt ein Körper.
    $\mathbb{R} \supset \{0{,}1\}$ und $\{\oplus, \otimes\}$ kann zu einem Körper gemacht werden.

12. **Abstraktion von den Axiomen I 1) - I 4) bzw. I 5) - I 8)**

    (a) G sei eine Menge mit einer Verknüpfung (“Multiplikation”)
    $G \times G \ni (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 \in G$ mit den Eigenschaften

    (b) $g_1(g_2 g_3) = (g_1 g_2) g_3$ *Assoziativität*

    (c) es gibt $e \in G$ mit $eg = ge = g$ für alle $g \in G \quad (\forall g \in G)$
    Existenz des neutralen Elements

    (d) zu $g \in G$ gibt es $g^{-1} \in G$ mit $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ *Existenz des Inversen*

VL: Do, 2002-10-31

1.2.1 Definition

Eine Menge mit den Eigenschaften (a) bis (d) heißt eine *Gruppe*.

Gilt zusätzlich $g_1 g_2 = g_2 g_1 \; \forall g_1, g_2 \in G$, so heißt die Gruppe *kommutativ* oder *abelsch* (nach *Nils Abel*).

Also können wir unsere Axiome reformulieren als

- $\mathbb{R}$ ist eine abelsche Gruppe bez. “+”
- $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist eine abelsche Gruppe bez. “·”
- es gilt das Distributivgesetz

13. Ist A eine Menge, so ist $M^\circ(A) := \{\phi : A \to A; \phi \text{ bijektiv}\}$ eine Gruppe unter der Verknüpfung $(\phi_1, \phi_2) \mapsto \phi_1 \circ \phi_2$.
    Ist $A = \mathbb{N}$, dann schreiben wir $s_n := M^\circ(A) =:$ *Permutationsgruppe* der Ordnung n
    Für $n \geqslant 3$ ist s_n nicht abelsch.

II Axiome der Anordnung

Es gibt eine Relation “<” auf $\mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

II 1) für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Beziehungen

$$x < y, x = y, x > y \quad \textit{Trichotomie}$$

II 2) für $x, y, z \in \mathbb{R}$ folgt aus $x < y, y < z$ auch $x < z$ *Transitivität*

II 3) für $x, y, z \in \mathbb{R}$ folgt aus $x < y$ auch $x + z < y + z$
Monotonie der Addition

II 4) für $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $z > 0$ folgt aus $x < y$ auch $zx < zy$
Monotonie der Multiplikation

Bemerkungen

1. Eine Relation auf einer Menge A ist eine Teilmenge $R \subset A \times A$ (genauer: zweistellige Relation).
   D.h. x und y stehen in Relation – $x\mathrm{R}y$ – genau dann, wenn $(x, y) \in R$
   In unserem Fall ist $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x < y\}$

1.2.2 Definition

Sei R eine zweistellige Relation auf A, R heißt

reflexiv $\iff (x,x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in A$

symmetrisch $\iff (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R\ \forall x,y \in A$

transitiv $\iff (x\ R\ y$ und $y\ R\ z) \Rightarrow x\ R\ z\ \forall x,y,z \in A$

Äquivalenzrelation $\iff$ R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

2. Wir schreiben für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x < y &\iff y > x \\ x \leqslant y &\iff (x < y \text{ oder } x = y) \\ x \geqslant y &\iff (x > y \text{ oder } x = y) \end{aligned}$$

3. $x \in \mathbb{R}$ heißt positiv, wenn $x > 0$. Dann ist $x > y \iff x - y > 0$ (Monotonie der Addition), d.h. $x = y + \underbrace{(x-y)}_{>0}$

4. $x > 0 \iff -x < 0 \quad (x = 0 \text{ in } (3))$

5. $a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d$, denn

$$\begin{aligned} a + c \overset{\text{Mon.}}{<} \; & b + c \\ & c + b \overset{\text{Mon.}}{<} d + b \end{aligned}$$

$\overset{\text{Trans.}}{\underset{\text{Kom.}}{\Longrightarrow}} a + c < b + d$

6. $a < b$ und $c < 0 \Rightarrow bc < ac$
$c < 0 \Rightarrow -c > 0 \underset{\text{Mon.}}{\Rightarrow} (-c)a < (-c)b$
addiere $ac + bc \Rightarrow bc < ac$

7. $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$, insbesondere ist $\overbrace{(-1)^2}^{=1} > 0$

1. Fall $a > 0 \overset{\text{Mon.}}{\Rightarrow} a^2 > 0$
2. Fall $a < 0 \overset{(6)}{\Rightarrow} a^2 > 0$

8. $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$, denn $a^{-1} = \underbrace{a}_{>0} \underbrace{\left(a^{-1}\right)^2}_{>0(6)} \overset{\text{Mon.}}{>} 0$

Wir schreiben auch $a^{-1} = \frac{1}{a}$, entsprechend $ab^{-1} = \frac{a}{b} = a/b$

9. $1 > 0$, denn $0 \neq 1 = 1 \cdot 1 \overset{(7)}{>} 0$

10. Eine Menge K, die den Axiomengruppen I und II genügt, heißt ein *angeordneter Körper*. $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ lässt sich nicht anordnen, denn wenn es eine Relation $<$ mit II 1) - II 4) auf $\mathbb{Z}_2$ gäbe, so folgte $1 < 1 + 1 = 0$

Widerspruch zur Trichotomie II 1!

Allerdings bilden die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ einen geordneten Körper!

1.2.3 Satz (Euklid)

Es gibt keinen Bruch $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1$ so, dass $x^2 = 2$

Beweis

$2q^2 = p^2 \Rightarrow 2 \mid \left(p^2 = \left(\prod_{r\in\mathcal{P}} r^{\alpha(r)}\right)^2\right)$, d.h. $2 \mid \prod_{r\in\mathcal{P}} r^{2\alpha(r)}$
$\Rightarrow \alpha(2) \geqslant 1 \Rightarrow 2^2 \mid p^2$ oder $p = 2s$
$2q^2 = (2s)^2 = 4s^2 \Rightarrow q^2 = 2s^2 \Rightarrow 2 \mid q \Rightarrow (p, q) \geqslant 2$ — Widerspruch $\square$

1.2.4 Definition

VL: Mo, 2002-11-04

Es seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$

Wir setzen

1. Endliche Intervalle:
   $[a, b] := \{x \in \mathbb{R}; a \leqslant x \leqslant b\}$ abgeschlossen
   $[a, b) := \{x \in \mathbb{R}; a \leqslant x < b\}$ halboffen
   $(a, b] := \{x \in \mathbb{R}; a < x \leqslant b\}$ halboffen
   $(a, b) := \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ offen

2. Unendliche Intervalle:
   $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant a\}$ abgeschlossen
   $(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R}; x > a\}$ offen
   $(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R}; x \leqslant b\}$ abgeschlossen
   $(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R}; x < b\}$ offen

3. Entartete Intervalle:
   $\{a\} = [a, a]$ abgeschlossen
   $\left.\begin{array}{l} \emptyset = (a, a) \\ \mathbb{R} = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}\emptyset = (-\infty, \infty) \end{array}\right\}$ offen und abgeschlossen

4. Spezialfälle $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R}; x \geqslant 0\}$
   $\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$
   $\mathbb{R}_+^* := \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$

1.2.5 Definition

Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ heißt *induktiv*, wenn gilt:

1. $1 \in M$

2. $x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$

Diskussion

- Beispiele: $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, [1, \infty)$

- Bemerkung: Ist $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie induktiver Mengen, so ist

$$M := \bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha = \{x \in \mathbb{R}; x \in M_\alpha\ \forall\alpha\}$$

auch induktiv.
Beweis

1. $1 \in M$, weil $1 \in M_\alpha \ \forall \alpha \in A$
2. $x \in M \overset{Def.}{\Rightarrow} x \in M_\alpha \ \forall \alpha \overset{M\,ind.}{\Rightarrow} x+1 \in M_\alpha \ \forall \alpha \Rightarrow x+1 \in M$

1.2.6 Definition

Die Menge der natürlichen Zahlen ist die kleinste induktive Menge in $\mathbb{R}$, d.h.

$$\mathbb{N} := \bigcap_{\substack{M \in \mathbb{R} \\ \text{M induktiv}}} M$$

$\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{Z} := \mathbb{Z}_+ \cup \{-\mathbb{N}\}$

1.2.7 Das Prinzip der vollständigen Induktion

Es sei $M \subset \mathbb{N}$ und induktiv. Dann ist $M = \mathbb{N}$.

Beweis: z.z. $M \subset \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \subset M$

1. $M \subset \mathbb{N}$ ist vorausgesetzt.
2. $\mathbb{N} \subset M$, weil M induktiv □

Etwas Rechnen mit reellen Zahlen

1.2.8 Satz (Die binomische Formel)

Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z}_+$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j} \qquad a^0 = b^0 = 1$$

Beweis durch Induktion über n

- $n = 1$:

$$(a+b)^n = a + b = \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} a^j b^{1-j} = b + a$$

- $n \geqslant 1$ bewiesen

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n\,(a+b) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}(a+b) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(a^{j+1} b^{n-j} + a^j b^{n+1-j}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{j+1} b^{(n+1)-(j+1)} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n+1-j} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{j=1}^{n} \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right) a^j b^{n+1-j} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} a^j b^{n+1-j} \square
\end{aligned}$$

Diskussion:

1. $2^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}$
2. $0 = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j}$
3. $\left\{ \binom{n}{j} \right\}$ = Binomialkoeffizienten
4. Identitäten der Binomialkoeffizienten füllen Bücher, z.B.

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{r}{j} \binom{s}{n-j} = \binom{r+s}{n}$$

wobei $\binom{n}{j} = 0$ falls $j > n$
z.B. für $r = s = n$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \binom{n}{n-j} = \binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2$$

5. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

1.2.9 Satz (Die geometrische Reihe)

Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=0}^{n} x^j = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \text{ wenn } x \neq 1$$

Beweis

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{j=0}^{n} x^j &= \sum_{j=0}^{n}\left(x^j - x^{j+1}\right)\\ &= (1-x)+(x-x^2)+(x^2-x^3)+\ldots+(x^n-x^{n+1})\\ &= 1-x^{n+1}\square\end{aligned}$$

Diskussion: Die Reichhaltigkeit von $\mathbb{R}$ nach I),II)

1. $\mathbb{Z}\subset\mathbb{R}\Rightarrow\mathbb{R}$ ist unendlich
2. Für $m\in\mathbb{Z}$ und $n\in\mathbb{N}$ ist $mn^{-1}\in\mathbb{R}$
   und $mn^{-1}=m'n'^{-1} \iff mn'=m'n$

   D.h. die Menge der rationalen Zahlen ist
   $$\mathbb{Q} := \left\{mn^{-1}\in\mathbb{R}; m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\right\}$$
   und in $\mathbb{R}$ enthalten.
3. Schock: $\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper! Ist $\mathbb{Q}=\mathbb{R}$?

VL: Do, 2002-11-07

1.2.10 Satz

1. $n\geqslant 1\ \forall n\in\mathbb{N}$
2. $m,n\in\mathbb{N}\Rightarrow m+n, mn\in\mathbb{N}, \quad m>n\Rightarrow m-n\in\mathbb{N}$
3. $(m,m+1)\cap\mathbb{N}=\emptyset$
4. $\emptyset\neq A\subset\mathbb{N}\Rightarrow\exists n\in A$ mit $a\geqslant n\ \forall a\in A$
   ("Jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen hat ein kleinstes Element."(1.1.19))

Beweise

z.B. 1. Annahme: es gibt $a\in\mathbb{N}$ mit $a<1$. Dann wäre $\mathbb{N}\backslash\{a\}=:\mathbb{N}'$ immer noch induktiv, denn $1\in\mathbb{N}\backslash\{a\}$ und mit n auch $n+1$.
Anderes Argument: Die Menge $\tilde{\mathbb{N}}:=\{n\in\mathbb{N}, n\geqslant 1\}$ ist induktiv $\Rightarrow\mathbb{N}=\tilde{\mathbb{N}}$

3. Es sei $m\in\mathbb{N}$, so dass $\mathbb{N}\cap(m,m+1)\ni n\Rightarrow m<n<m+1\overset{(2)}{\Rightarrow}n-m\in\mathbb{N}$,
   aber $n-m<m+1-m=1$ wegen Monotonie $\Rightarrow$ Widerspruch zu (2)

1.2.11 Definition

Wir setzen
$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$
Damit definieren wir
$$|x| := x\operatorname{sgn} x = \begin{cases} x, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

1.2.12 Hilfssatz

1. $|a| = 0 \iff a = 0$
2. $|ab| = |a||b|$
3. Dreiecksungleichung: $|a+b| \leqslant |a| + |b|$
4. $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$
5. $|a+b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$

Beweis

1. ✓
2. (a) $a = 0$ oder $b = 0 \Rightarrow$ Behauptung

   (b) $a, b \neq 0 \Rightarrow$

   $$|ab| = \operatorname{sgn}(ab)ab, \quad |a||b| = \operatorname{sgn}(a)\operatorname{sgn}(b)ab$$

   Also ist die Behauptung äquivalent zu $\operatorname{sgn}(ab) = \operatorname{sgn}(a)\operatorname{sgn}(b)$ durch Nachprüfen aller Fälle

3. (a) $a = 0$ oder $b = 0$✓

   (b) $a, b \neq 0, \quad |a| \leqslant |b|$ o.B.d.A.

   i. $a, b > 0$✓

   ii. $a, b < 0 \Rightarrow a + b < 0$

   $$\begin{aligned}\Rightarrow |a+b| &= \underbrace{\operatorname{sgn}(a+b)}_{=-1}(a+b) = \operatorname{sgn}(a+b)a + \operatorname{sgn}(a+b)b \\ &= \operatorname{sgn}(a)a + \operatorname{sgn}(b)b = |a| + |b|\end{aligned}$$

   iii. $b > 0, a < 0$ (o.B.d.A)
   $-|a| - |b| \leqslant a + b = |b| - |a| \leqslant |b| + |a|$,
   d.h. $-|a| - |b| \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|$
   $\Rightarrow |a+b| \leqslant |a| + |b|$

   Bemerkung: $x \in [-R, R] \iff -R \leqslant x \leqslant R \iff |x| \leqslant R$

4. ✓
5. z.z. $-|a+b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a+b|$
   $|a| = |a+b-b| \leqslant |a+b| + |-b| = |a+b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leqslant |a+b|$
   Analog $|b| - |a| \leqslant |a+b| \Rightarrow |a| - |b| \geqslant -|a+b|$ □

1.2.13 Satz (Bernoullische Ungleichung)

Für $x > -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Beweis durch Induktion über n

- $n = 1 \quad \checkmark$
- $n \geqslant 1$ bewiesen

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \underbrace{(1+x)}_{>0} \\ &\underset{\text{Monot.}}{\geqslant} (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 \\ &= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geqslant 0} \geqslant 1 + (n+1)x\end{aligned}$$

Bemerkungen

1. Für $x \geqslant 0$ können wir auch die binomische Formel benutzen:

$$(1+x)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j \geqslant 1 + nx$$

2. sgn: $\mathbb{R}^* \longrightarrow \{-1{,}1\}$
$\mathbb{R}^*$ abelsche Gruppe bez. $\operatorname{sgn}(ab) = \operatorname{sgn} a \cdot \operatorname{sgn} b$ heißt, dass sgn ein Homomorphismus von abelschen Gruppen ist.

1.2.14 Satz

Es seien $a_i \in \mathbb{R}, i = 1{,}2, \ldots, k$
Dann sind

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k-1} a_i + a_k \text{ und } \prod_{i=1}^{k} a_i = \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right) a_k$$

unabhängig von der Reihenfolge der a_i und von jeder Klammersetzung. (Allg. Assoziativ- und Kommutativgesetz)

Einige Grundbegriffe der *Kombinatorik*

Gegeben sei eine Menge mit n Elementen, $k \in \mathbb{N}_n$. Wir sprechen von

1. $\binom{n}{k}$ k-Kombinationen $\{a_1, \ldots, a_k\}$ ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Anordnung
2. $\binom{n}{k} k! = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ k-Kombinationen ohne Wiederholung mit Berücksichtigung der Anordnung
3. $\binom{n+k-1}{k}$ k-Kombinationen mit Wiederholung ohne Berücksichtigung der Anordnung
4. n^k k-Kombinationen mit Wiederholung und mit Berücksichtigung der Anordnung, z.B. Worte

Beweis: Übung

1.3 Das Vollständigkeitsaxiom

Beispiel 1

$$\begin{array}{rcc} & \text{Achilles} & \text{Schildkröte} \\ & 0 & 10\text{m} \\ t_1 = 1\text{s} & 10\text{s} & 11\text{m} \\ t_2 = 1 + 10^{-1}\text{s} & 11 & 10 + 10^0 + 10^{-1} \\ t_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-1} 10^{1-j} & & \sum_{j=0}^{n-1} 10^{1-j} \end{array}$$

$$\Rightarrow t_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-2} 10^{-j} = \sum_{j=0}^{n-2} = \frac{1 - 10^{-(n-1)}}{1 - 10^{-1}} = \frac{10}{9}\left(1 - 10^{-(n-1)}\right) \leqslant \frac{10}{9}$$

VL: Mo, 2002-11-11

1.3.1 Definition

Eine *Folge* ist eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} x : \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ \{1,2,3,\dots\} \ni n & \mapsto & \underbrace{x(n)}_{=:x_n} \in \mathbb{R} \end{array}$$

Schreibweise: $x =: (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Jedenfalls stellen wir fest:

Für $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt: (1) $0 \leqslant t_n \leqslant \frac{10}{9}\ \forall n \in \mathbb{N}$ (2) $t_{n+1} \geqslant t_n\ \forall n \in \mathbb{N}$
Für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt: (1) $0 \leqslant x_n \leqslant 10 + \frac{10}{9}$ (2) $x_{n+1} \geqslant x_n$

1.3.2 Definition

- Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *nach oben (unten) beschränkt*, wenn es $C \in \mathbb{R}$ gibt mit
$$x_n \leqslant C \quad (x_n \geqslant C) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
- Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.
- Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton wachsend (fallend)*, wenn gilt
$$x_{n+1} \geqslant x_n \quad (x_{n+1} \leqslant x_n)$$
- Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *monoton*, wenn sie monoton wächst oder fällt.

Beispiel 2

Euklid (1.2.3): es gibt kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.

„Schildkrötenversuch":

$$x_1 := \frac{3}{2}, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$x_1^2 = \frac{9}{4} > 2 \Rightarrow \left(\frac{2}{x_1}\right)^2 = \frac{4}{x_1^2} < \frac{4}{2} = 2 \quad \text{also: } x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right), \ldots$$

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - 2 &= \left(\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)\right)^2 - 2 = \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 4 + \frac{4}{x_n^2}\right) - \frac{8}{4} = \frac{1}{4}\left(x_n^2 - 4 + \frac{4}{x_n^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{2}{x_n}\right)^2 \geqslant 0 \\ &= \frac{1}{4x_n^2}\left(x_n^2 - 2\right)^2 \leqslant \frac{1}{8}\left(x_n^2 - 2\right)^2 \end{aligned}$$

Monotonie?

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - \frac{2x_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x_n} - x_n\right) \\ &= \frac{1}{2x_n}\left(2 - x_n^2\right) \leqslant 0 \end{aligned}$$

d.h. die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

$$0 \leqslant x_{n+1}^2 - 2 \leqslant \frac{1}{8}\left(x_n^2 - 2\right)\underbrace{\left(x_n^2 - 2\right)}_{\geqslant 0}$$

wegen Monotonie:

$$0 \leqslant x_n \leqslant x_1 \Rightarrow x_n^2 \leqslant x_n x_1 \leqslant x_1^2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leqslant x_n^2 - 2 \leqslant x_1^2 - 2 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x_{n+1}^2 - 2 &\leqslant \frac{1}{8}\left(x_n^2 - 2\right)\left(x_n^2 - 2\right) \leqslant \frac{1}{8 \cdot 4}\left(x_n^2 - 2\right) \overset{\text{Ind.}}{\leqslant} \left(\frac{1}{32}\right)^n \left(x_1^2 - 2\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{32^n} \\ &\leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(1+31)^n} \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+31n} \end{aligned}$$

Axiom III: Vollständigkeitsaxiom

Jede nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt eine kleinste obere Schranke.

Diskussion

1. $M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt $\iff \exists C \in \mathbb{R} : x \leqslant C \ \forall x \in M$
   C heißt dann *obere Schranke* von M.
   C heißt *kleinste obere Schranke* von M, wenn gilt

(a) C ist obere Schranke

(b) Für jede obere Schranke C' von M gilt $C' \geqslant C$.

Die kleinste obere Schranke von M heißt das *Supremum* von M, in Zeichen $\sup M$.

2. $\mathbb{N}_n$ ist nach oben beschränkt mit $\sup \mathbb{N}_n = n$, weil
(a) n ist obere Schranke, (b) $n \in \mathbb{N}_n$
Denn für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit $x < n$ gilt: x ist nicht obere Schranke von $\mathbb{N}_n$.

1.3.3 Hilfssatz

Besitzt $M \subset \mathbb{R}$ eine obere Schranke C mit $C \in M$, so ist C die kleinste obere Schranke von M. In diesem Fall schreiben wir $C = \sup M =: \max M$.

3. Ist $C = \sup M \notin M$, dann gibt es zu jedem $C' < C$ eine Zahl $x \in M$ mit $C' < x < C$. Andernfalls wäre $x \leqslant C'$ $\forall x \in M \Rightarrow C$ ist nicht die kleinste obere Schranke.

4. zurück zum Beispiel der Folge $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), x_1 = \frac{3}{2}$!
Es gilt $1 \leqslant x_n \leqslant \frac{3}{2}$ und $x_{n+1} \leqslant x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sup (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \max (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{3}{2}$ — uninteressant!
Also interessiert uns die *größte untere Schranke*, genannt $\inf (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (*Infimum*)!

1.3.4 Hilfssatz

Jede nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat eine größte untere Schranke.

Beweis

$M \subset \mathbb{R}$, $x \geqslant -c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $x \in M \Rightarrow -x \leqslant c$ $\forall x \in M$, d.h. $-M := \{-x; x \in M\}$ ist nach oben beschränkt.
Dann ist aber $-\sup(-M) = \inf(M)$. □

Es sei jetzt $x := \inf (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ich will zeigen, dass $x^2 = 2$ gilt. Dazu genügt es z.z., dass (a) $x^2 \geqslant 2$ und (b) $x^2 \leqslant 2$.
(a) Nach Definition ist $2 \leqslant x^2 \leqslant x_n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$, weil $2 \leqslant x_{n+1}^2 \leqslant x_n^2$.
(b) Weiter gilt $x_n^2 \geqslant 2$ $\forall n$ und $x^2 - 2 \leqslant x_n^2 - 2 \leqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{32^n} \overset{?}{\Rightarrow} x^2 \leqslant 2$

1.3.5 Satz (Die archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$)

Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > x$.

Beweis

Annahme: das ist falsch $\Rightarrow$ es gibt $x \in \mathbb{R}$ mit $n \leqslant x$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow \mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt, setze $C_0 := \sup \mathbb{N}$.

1. Fall: $C_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow C_0 + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow C_0$ ist keine obere Schranke. — Widerspruch

2. Fall: $C_0 \notin \mathbb{N}$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $C_0 - 1 < n < C_0 \Rightarrow n + 1 > C_0$— Widerspruch

□

1.3.6 Hilfssatz

Es sei $q \in \mathbb{R}$, $q > 1$

1. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $q^n > x$
2. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $\left(\frac{1}{q}\right)^n = \frac{1}{q^n} < \varepsilon$

Beweis

1. Setze $q =: 1 + x_0$ mit $x_0 = q - 1 > 0$
   Nach Bernoulli gilt dann $q^n \geqslant 1 + nx_0 > x$ für gegebenes $x \in \mathbb{R}$ und passendes $n \in \mathbb{N}$, wenn nämlich $n > \frac{x}{x_0}$.
2. $\frac{1}{q^n} = \frac{1}{(1+x_0)^n} \leqslant \frac{1}{1+nx_0} \leqslant \frac{1}{nx_0} < \varepsilon$, wenn $n > \frac{1}{\varepsilon x_0}$

□

VL: Do, 2002-11-14

Beispiel:

Sei $M := \left\{1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\right\}$. D.h. $x \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant 1 - \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Vermutung: $\sup M = 1$, d.h.:

1. 1 ist obere Schranke.
2. Wenn C' obere Schranke $\Rightarrow C' \geqslant 1$

Annahme: $\exists C' < 1 : C' \geqslant 1 - \frac{1}{n}\ \forall n$. Setze $C' = 1 - \varepsilon_0$ für ein $\varepsilon_0 > 0$. Dann ist $1 - \varepsilon_0 < 1 - \frac{1}{n} \iff \frac{1}{n} < \varepsilon_0$. —Wid.

□

Beispiel 2:

$$x_1 := \frac{3}{2}, \quad x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{3}{2} = x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{n+1} \geqslant 1$$

$$2 \leqslant x_n^2 \leqslant 2 + \frac{1}{4}\frac{1}{32^n}$$

d.h. $M = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ ist nach unten beschränkt durch 1.
$x := \inf M \in \mathbb{R}$, Vermutung: $x^2 = 2$

Beweis der Vermutung:

1. Annahme: $x^2 > 2$,
   d.h. $x^2 = 2 + \varepsilon_0$ mit $\varepsilon_0 > 0$
   $\Rightarrow x_n^2 \geqslant x^2$, weil $x_n > x > 0$ und deshalb

   $$2 + \varepsilon_0 \leqslant x_n^2 \leqslant 2 + \frac{1}{4}\frac{1}{32^n} \iff \varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{4}\frac{1}{32^n} \forall n \in \mathbb{N}$$

   oder $4 \cdot 32^n \leqslant \frac{1}{\varepsilon_0} \forall n \in \mathbb{N}$ — Widerspruch zu 1.3.6

2. Annahme: $x^2 < 2$
   d.h. $x^2 = 2 - \varepsilon_0 \overset{?}{\Rightarrow}$ es gibt $x' > x$ mit $x'^2 < 2 \leqslant x_n^2 \forall n \in \mathbb{N}$ (!)
   $\Rightarrow x$ ist nicht die größte untere Schranke von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — Widerspruch.

   Zur Konstruktion von x' setzen wir $x' = x + \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N} \Rightarrow$

   (a) $x' > x$

   (b) $x'^2 = x^2 + \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} = 2 - \varepsilon_0 + \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} \overset{?}{<} 2$
   $\Rightarrow \frac{1}{m}\underbrace{\left(2x + \frac{1}{m}\right)}_{\leqslant 2x+1 \leqslant 5} < \varepsilon_0$ d.h. diese Ungleichung ist erfüllt, wenn $\frac{5}{m} < \varepsilon_0$
   – möglich nach Archimedes

1.3.7 Hilfssatz

Es gibt ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = 2$. (Bemerkung: Gilt $x^2 = 2$, so gilt auch $(-x)^2 = 2$.)

1.3.8 Definition

Die Elemente der Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R}; x \neq \frac{p}{q}\ \forall p \in \mathbb{Z},\ \forall q \in \mathbb{N}\}$ nennen wir die *irrationalen Zahlen.*

1.3.9 Satz (Die Existenz der n-ten Wurzel)

Zu $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $y > 0$ mit der Eigenschaft

$$y^n = x$$

Beweis:

1. Existenz: Wir setzen $y = \inf\{z > 0; z^n > x\}$. Dann gilt $y^n = x$.

1. Fall $y^n > x$, $y^n = x + \varepsilon_0$. Dann gibt es ein $y' < y$ mit $y'^n > x \Rightarrow y$ ist nicht untere Schranke.

Setze $y' = y - \frac{1}{m} < y \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
y'^n &= \left(y - \frac{1}{m}\right)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} y^j \left(-\frac{1}{m}\right)^{n-j} \\
&= \underbrace{y^n}_{x+\varepsilon_0} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} y^j \left(-\frac{1}{m}\right)^{n-j} \\
&\geqslant x + \varepsilon_0 - \frac{1}{m} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} y^j \left(-\frac{1}{m}\right)^{n-1-j} \right| \\
&\geqslant x + \varepsilon_0 - \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} y^j \\
&\geqslant x + \varepsilon_0 - \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} y^j = x + \varepsilon_0 - \frac{(y+1)^n}{m} > x \text{ für } m \text{ hinr. groß.}
\end{aligned}$$

Für hinr. großes m ist $\varepsilon_0 > \frac{(1+y)^n}{m}$.

2. Fall $y^n < x$, $y^n = x - \varepsilon_0$

Dann gibt es $y' > y$ mit $y'^n < x$, d.h. für $z > 0$ mit $z^n > x$ gilt $z > y' > y$. Also ist y nicht das Infimum. Wir setzen wieder $y' = y + \frac{1}{m}$ und rechnen wie oben.

2. Eindeutigkeit: Aus $y > y' > 0$ folgt $y^n > y'^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. □

1.3.10 Definition

Die eben definierte Zahl y heißt die n-te Wurzel aus x:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Bemerkung:

Wir haben also eine Abb. konstruiert:

$$\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$$

Diese Abbildung ist invers zu der Abb.

$$\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}_+$$

1.3.11 Definition

Eine Abbildung $\mathbb{R} \supset M \to \mathbb{R}$ heißt eine (reellwertige) *Funktion.*

Speziell heißt die Funktion $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^n \in \mathbb{R}$ (welche für gerade n weder injektiv noch surjektiv ist !) das *Monom n-ter Ordnung.* Jede reelle Linearkombination von Monomen heißt *Polynom.*

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \qquad a_j \in \mathbb{R}, j = 0, \ldots, n$$

Die Zahl gr $p := \max\big\{j \in \mathbb{N}_n \cup \{0\}; a_j \neq 0\big\}$ heißt der *Grad von p*.

Ist $\{j \in \mathbb{N}; a_j \neq 0\} = \emptyset$, so setzen wir gr $p = -\infty$.

Bemerkung:

Die Polynome bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum; dieser VR ist abgeschlossen unter der Multiplikation.

$$\left(p_k(x) = \sum_{j \geqslant 0} a_{jk} x^j \right)$$

$$\begin{aligned}
(p_1 p_2)(x) &:= p_1(x) p_2(x) \\
&= \sum_{j \geqslant 0} a_{j1} x^j \sum_{k \geqslant 0} a_{k2} x^k \\
&= \sum_{j,k \geqslant 0} a_{j1} a_{k2} x^{j+k} \\
&= \sum_{l \geqslant 0} x^l \sum_{\substack{j,k \geqslant 0 \\ j+k=l}} a_{j1} a_{k2}
\end{aligned}$$

Diese Multiplikation hat die Eigenschaft gr $(p_1 p_2) =$ gr $p_1 +$ gr p_2.

Beispiel 3:

Die stetige Teilung (mit $x > \frac{1}{2}$ o.B.d.A.) verlange

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{x}{1-x} \\
\iff x^2 &= 1 - x \\
\iff x^2 + x &= 1 \\
\iff \underbrace{x^2 + \frac{2x}{2} + \frac{1}{4}}_{\Big(\underbrace{x + \frac{1}{2}}_{\geqslant 0}\Big)^2} &= 1 + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Also $x + \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0{,}618033\ldots$

Der „Goldene Schnitt“ $\rho := x$ ist irrational.

Es gibt noch eine zweite Lösung, nämlich:

$$\tilde{x} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$
$$-\tilde{x} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = \rho + 1 =: \tau$$

Dann gilt $\rho\tau = 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.

VL: Mo, 2002-11-18 $x^2 - x = 1$ hat die Lösungen $-\rho$, τ.

$$\begin{aligned} x^2 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x &= 1 + \frac{1}{x} \\ &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}} \quad \text{(Kettenbruch)} \end{aligned}$$

$$\text{also } \sqrt{5} = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}$$

Es gibt viele (pseudowissenschaftl.) Anwendungen des GS: Architektur, Biologie, bildende Kunst, Literatur, ... (Verwendung üblicherweise 0,62)

Beispiel 4:

„Die Vermehrung der Kaninchen“ nach Leonardo von Pisa ($\sim$ 1170 - $\sim$ 1240) aka *Fibonacci*

Annahme: 1 Kaninchenpaar erzeugt in jedem Monat ein neues Kaninchenpaar, das neue Paar tut dasselbe ab dem 2. Monat.

Frage: Wie viele Kaninchen gibt es im n-ten Monat?

$$F_n, n \in \mathbb{Z}_+, F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ (Anfang)}$$

$$\to F_2 = 1, F_3 = 1 + 1 = 2, \ldots$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	...

„Fibonacci-Zahlen“

Problem: Wie kann man die F_n *explizit* (also nicht rekursiv!) ausrechnen?

Ansatz:

$$\begin{aligned} F_n &:= \alpha^n \qquad \alpha > 0 \\ \Rightarrow \quad \alpha^{n+1} &= \alpha^n + \alpha^{n-1} \\ \Rightarrow \quad \alpha^2 &= \alpha + 1 \\ \Rightarrow \quad \alpha_\pm &= \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \end{aligned}$$

modifizierter Ansatz:

$$\begin{aligned} F_n &:= a_+\alpha_+^n + a_-\alpha_-^n \qquad a_\pm \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad F_{n+1} &= a_+\alpha_+^{n+1} + a_-\alpha_-^{n+1} \\ &= a_+(\alpha_+^n + \alpha_+^{n-1}) + a_-(\alpha_-^n + \alpha_-^{n-1}) \\ &= F_n + F_{n-1} \end{aligned}$$

Bestimme $a_\pm$ so, dass

$$\begin{aligned} F_0 &= a_+ + a_- = 0 \iff a_- = -a_+ \\ \text{und } F_1 &= a_+\alpha_+ + a_-\alpha_- = 1 \\ &= a_+(\alpha_+ - \alpha_-) \\ &= a_+\sqrt{5} \quad \Longrightarrow \quad a_+ = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Also: $$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \text{(Formel von Binet)}$$

Relationen:

$$\sum_{j=0}^{n} F_j = F_{n+2} - 1 \qquad\qquad F_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n-j}{j}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} F_j = F_{2n} \qquad\qquad \ldots$$

Beispiel 5: Mittelbildung

1.3.12 Definition

Gegeben seien n Zahlen $a_i \in \mathbb{R}_+$. Wir setzen

1. Die Zahl
$$A(a_1, \ldots, a_n) := \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$
heißt *arithmetisches Mittel* der a_i

2. Die Zahl
$$G(a_1,\ldots,a_n) := \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$$
heißt *geometrisches Mittel* der a_i

Im Folgenden: $a_i > 0$

1.3.13 Satz

Für beliebige positive Zahlen a_i, $i \in \mathbb{N}_n$ gilt die Ungleichung

$$G(a_1,\ldots,a_n) \leqslant A(a_1,\ldots,a_n) \quad \text{(„AG-Ungleichung“)}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn alle a_i gleich sind.

Beweis: Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

$n = 1$ Offensichtlich.

Sei „$n \geqslant 1$“ bewiesen, geg. a_1,..., $a_{n+1} > 0$. Äquivalente Formulierungen:

1.
$$\sqrt[n+1]{a_1 \ldots a_{n+1}} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_{n+1}}{n+1}$$

2.
$$a_1 \ldots a_{n+1} \leqslant \left(\frac{a_1 + \ldots + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1}$$

3.
$$a_1 + \ldots + a_{n+1} \geqslant (n+1) \sqrt[n+1]{a_1 \ldots a_{n+1}}$$

Wir benutzen letztere zum Beweis.

Vorbemerkungen:

1. Sind alle $a_i = a > 0 \quad i \in \mathbb{N}_n$, so gilt
$$G(a_1,\ldots,a_n) = A(a_1,\ldots,a_n)$$

2. Ist die Ungleichung bewiesen für die Zahlen $\lambda a_1,\ldots,\lambda a_{n+1}$ mit einem $\lambda > 0$, so ist sie auch bewiesen für die a_i, weil $G/A(\lambda a_1,\ldots,\lambda a_{n+1}) = \lambda G/A(a_1,\ldots,a_{n+1})$ (Homogenitätsrelation)
Also dürfen wir annehmen, dass:

3. $a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n+1} = 1$ und außerdem dass:

4. $0 < a_{n+1} < 1$

Dann ist die gewünschte Ungleichung äquivalent zu:

$$a_1 + \ldots + a_{n+1} \geqslant n + 1$$

Also können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden und finden:

$$\begin{aligned} a_1 + \ldots + a_n \geqslant n\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} &= n\sqrt[n]{\frac{1}{a_{n+1}}} \\ &= n a_{n+1}^{-\frac{1}{n}} =: n \cdot \frac{1}{y} \text{ mit } y = \sqrt[n]{a_{n+1}} < 1 \end{aligned}$$

$$\underbrace{a_1 + \ldots + a_n}_{\geqslant ny^{-1}} + a_{n+1} \geqslant ny^{-1} + a_{n+1} = y^n + ny^{-1} \overset{?}{\geqslant} n + 1$$

$$\begin{aligned} &\iff n(y^{-1} - 1) \geqslant 1 - y^n \\ &\iff n(1 - y) \geqslant y(1 - y^n) \\ &\iff n \overset{?}{\geqslant} y\frac{1 - y^n}{1 - y} = y\sum_{j=0}^{n-1} y^j = y + y^2 + \ldots + y^n \end{aligned}$$

Und das ist *wahr*. Tatsächlich gilt „>“, weil $y < 1$. $\Rightarrow$ volle Behauptung.

□

Beispiel 6

Ein Wasserbecken wird von drei Wasserhähnen gefüllt. Der i-te Hahn füllt in x_i Minuten das Becken zu einem Drittel. Wie lange benötigen alle drei Hähne gemeinsam?

x ist die gesuchte Zeit, dann ist

$$x_i \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{3} \qquad \text{und} \qquad x \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{3x_i}$$

$$\frac{1}{3x_1} + \frac{1}{3x_2} + \frac{1}{3x_3} = 1$$

$$\text{also } x = \frac{3}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}} =: H(x_1, x_2, x_3)$$

1.3.14 Definition

Die Zahl

$$H(a_1, \ldots, a_n) := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

heißt das *harmonische Mittel* von $a_1, \ldots, a_n$.

1.3.15 Satz

Für bel. $a_1, \ldots, a_n$ gelten die Ungleichungen

$$H(a_1, \ldots a_n) \leqslant G(a_1, \ldots a_n) \leqslant A(a_1, \ldots a_n)$$

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

VL: Do, 2002-11-21

Beweis:

(Nur für den linken Teil, der rechte wurde bereits bewiesen.)

$$H(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{A\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)} \overset{a_i > 0!}{\leqslant} \frac{1}{G\left(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = G(a_1, \ldots, a_n)$$

Anwendungen:

1. $x \geqslant 0$; $a_1 = \ldots = a_{n-1} = 1$; $a_n = 1 + nx$

$$\sqrt[n]{1 + nx} \leqslant \frac{n - 1 + 1 + nx}{n} = 1 + x$$

$$\Rightarrow \quad 1 + nx \leqslant (1 + x)^n \quad \text{(Bernoullische Ungleichung)}$$

2. $a > 0$; $n, p \in \mathbb{N}$; $p < n$ $\quad\longrightarrow$ Abschätzung von $\sqrt[n]{a^p}$

$$\Rightarrow a_1 = \ldots = a_p = a \qquad a_i = 1 \text{ für } i > p$$

$$\sqrt[n]{a^p} \leqslant \frac{pa + n - p}{n} = \frac{n + p(a - 1)}{n} = 1 + \frac{p}{n}(a - 1)$$

1.4 Die komplexen Zahlen

Problematik: Nullstellen von Polynomen:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j \quad p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad a_j \in \mathbb{R}; j = 0, 1, \ldots, n; \quad \mathbb{R}[n]$$

Grundproblem der Analysis: Löse die Gleichung:

$$f(x) = 0$$

d.h. wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dann müssen wir bestimmen die Menge $\{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\} =: f^{-1}(\{0\})$, das *Urbild* der Null unter f.

Achtung: f braucht nicht injektiv oder surjektiv zu sein!

1.4.1 Definition

$$f : X \to Y, B \subset Y \text{ dann sei}$$
$$f^{-1}(B) = \{x \in X; f(x) \in B\}$$

I.a. wird $f^{-1}(0)$ (Abk. für $f^{-1}(\{0\})$) nicht endlich sein, der Fall „endlich vieler Lösungen“ ist aber natürlich interessant.

Gesucht: Eine Klasse von Gleichungen (=Abbildungen), für die $f^{-1}(0)$ stets endlich ist.

Frage: Bilden die Polynome eine solche Klasse?

Beispiele

1. $\text{gr } p = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x) = a_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad p^{-1}(0) = \emptyset$
2. $\text{gr } p = 1 \quad \Rightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1 x$ mit $a_1 \neq 0 \Rightarrow 0 = a_0 + a_1 x \quad \Rightarrow$ $x = -\frac{a_0}{a_1} \quad \Rightarrow \quad p^{-1}(0) = \left\{\frac{-a_0}{a_1}\right\}$
3. $\text{gr } p = 2 \quad \Rightarrow \quad p(x) = a_0 + 2a_1 x + a_2 x^2 \quad a_2 \neq 0$
$$\Rightarrow \quad p(x) = 0 \iff x^2 + 2\frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} = 0$$
$$\iff \underbrace{\left(x + \frac{a_1}{a_2}\right)^2}_{\geqslant 0} = \frac{1}{a_2^2}(\underbrace{a_1^2 - a_0 a_2}_{=:d_p})$$
$$\text{d.h.} \quad p^{-1}(0) = \begin{cases} -\frac{a_1}{a_2} \pm \frac{1}{a_2}\sqrt{d_p} & \text{falls } d_p \geqslant 0 \\ \emptyset & \text{falls } d_p < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \sharp p^{-1}(0) \in \{0, 1, 2\}$$
Ist $d_p = 0$, dann ist $\dfrac{p(x)}{a_2} = \left(x + \dfrac{a_1}{a_2}\right)^2$ d.h. wir können $-\dfrac{a_1}{a_2}$ doppelt zählen (rein algebraisch!)
4. $\text{gr } p = 3 \quad \Rightarrow \quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad a_3 \neq 0$
$$|x| \geqslant 1 \quad \Rightarrow \quad p(x) = a_3 x^3 (1 + \frac{a_0}{a_3 x^3} + \frac{a_1}{a_3 x^2} + \frac{a_2}{a_3 x}) =: q(x) a_3 x^3$$
$$\text{mit } \frac{1}{2} \leqslant q(x) \leqslant \frac{3}{2} \text{ für } |x| \geqslant R \text{ hinr. groß}$$
Also sollte p mind. eine reelle Nullstelle haben!

1.4.2 Hilfssatz (Division mit Rest)

Es sei $p \in \mathbb{R}[x] :=$ {Menge der Polynome mit reellen Koeffizienten}, $\text{gr } p \geqslant 0$. Dann gibt es zu $q \in \mathbb{R}[x]$ Polynome $r, s \in \mathbb{R}[x]$ mit

1. $p = sq + r$
2. $\text{gr } r < \text{gr } q$

Beweis: Durch Induktion über $n := \text{gr } p \in \mathbb{Z}_+$

Ind.-Anf.: $n = 0$ Dann ist $p(0) = a_0 \neq 0$

1. Fall: gr $q > 0$, dann setzen wir $s := 0$ und $r := p$

2. Fall: gr $q = 0$, d.h. $q(x) = b_0 \neq 0$, dann wähle $s := \frac{a_0}{b_0}$ und $r := 0$.

Ind.-Schritt: $n \geqslant 0$ **bewiesen, gr** $p = n + 1$

$$\underbrace{p(x)}_{\text{(fest)}} = \sum_{j=0}^{n+1} a_j x^j \quad (a_{n+1} \neq 0) \qquad q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k \quad (b_m \neq 0) \qquad (\text{gr } q = m)$$

1.Fall: $m > n + 1 \quad \Rightarrow s := 0, r := p$

2.Fall: $m \leqslant n + 1$

$$p(x) - \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} q(x) =: \tilde{p}(x) \quad \text{ist ein Polynom vom Grad } n$$

$$\exists r, s \in \mathbb{R}[x] \text{ mit } \tilde{p} = \tilde{s}q + r \text{ mit gr } r < \text{gr } q \text{ (nach Ind.-Vor.)}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} \cdot q(x) + \tilde{s}(x) q(x) + r(x) \\ &= \underbrace{\left(\frac{a_{n+1}}{b_m} x^{n+1-m} + \tilde{s}(x) \right)}_{=: s(x)} q(x) + r(x) \end{aligned}$$

□

1.4.3 Definition

Es seien $p, q \in \mathbb{R}[x]$. Wir sagen, dass

- q p *teilt*, in Zeichen $q \mid p$, falls es $s \in \mathbb{R}[x]$ gibt mit $p = sq$,
- q ein *echter Teiler* heißt, falls gr $q <$ gr p,
- p *irreduzibel* heißt, falls die einzigen echten Teiler von p die konstanten Polynome sind (also den Grad 0 haben).

1.4.4 Folgerung

Es sei $p \in \mathbb{R}[x]$ und $x_0 \in p^{-1}(0) \subset \mathbb{R}$. Dann teilt der „Linearfaktor“ $l(x) := x - x_0$ dieses p.

Beweis: Nach 1.4.2 gibt es $s, r \in \mathbb{R}[x]$ mit $p(x) = s(x) \cdot (x - x_0) + r(x)$ wobei gr $r \leqslant 0$, d.h. $r(x) = r_0 \in \mathbb{R}$, d.h. $p(x) = s(x)(x - x_0) + r_0$, $\Rightarrow 0 = p(x_0) = r_0$.

□

Diskussion: Also können wir „Nullstellen ausdividieren". Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von p, dann ist $p(x) = (x - x_0) \cdot \tilde{p}(x)$, gr $\tilde{p} <$ gr p.

$$\text{Dann ist } p^{-1}(0) = \{x_0\} \cup \tilde{p}^{-1}(0) \text{ (siehe 1.4.10)}$$

1.4.5 Definition

x_0 heißt *Nullstelle von p von der Ordnung* $\mu \in \mathbb{N}$, wenn gilt:

1. $p(x_0) = 0$
2. x_0 ist Nullstelle der Ordnung $\mu - 1$ von $\tilde{p}$ (eine Nullstelle der Ordnung 0 ist keine Nullstelle). $\rightarrow \mu$ heißt die *Vielfachheit* von x_0.

Beispiel: $p(x) = (x - x_0)^n \Rightarrow x_0$ ist n-fache Nullstelle von p.

Idee: Polynome zerfallen in Linearfaktoren:

$$p(x) = a_n \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \text{ wobei } x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$$

1.4.6 Definition

VL: Mo, 2002-11-25

Auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ setzen wir $1 = (1{,}0), i := \sqrt{-1} := (0{,}1)$, so dass jedes Element $z \in \mathbb{R}^2$ geschrieben werden kann

- $z = (x, y)$
- $z = x \cdot 1 + y \cdot i =: x + iy$

$\boxed{x =: \text{Re z} = \text{Realteil} \quad y =: \text{Im z} = \text{Imaginärteil von } z}$

Auf $\mathbb{R}^2$ definieren wir eine Multiplikation durch

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow i^2 = -1$

$\mathbb{R}^2$ mit dieser Multiplikation wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet *(ist nicht angeordnet!)*.

1.4.7 Definition

Wir definieren eine Abbildung

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \mapsto x - iy =: \overline{z} \in \mathbb{C},$$

genannt die *komplexe Konjugation* Schreiben wir $\overline{z} = \text{cg(z)}$, so gilt natürlich $\text{cg} \circ \text{cg} = \text{cg}^2 = \text{id}_{\mathbb{C}}$. Solche Abbildungen, deren Quadrat die Identität ist, heißen *Involutionen*.

1.4.8 Satz

$\mathbb{C}$ ist ein Körper, d.h. $\mathbb{C}$ erfüllt die Axiomengruppe (I). $\mathbb{R}$ ist in $\mathbb{C}$ enthalten als ein *Unterkörper* unter der Einbettung (=injektive Abbildung) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x \cdot 1 \in \mathbb{C}$

1.4.9 Definition

Wir setzen

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \text{ für } z = x + iy \in \mathbb{C}$$

und nennen dies den *Betrag* von z.

1.4.10 Folgerung

Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten die folgenden Beziehungen:

1. $\mathrm{Re\,z} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{z} + \overline{\mathrm{z}}\right), \mathrm{Im\,z} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{z} - \overline{\mathrm{z}}\right)$
2. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}, |z| = |\overline{z}|, |zw| = |z|\,|w|, z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ für $z \neq 0$
3. cg ist ein Körperisomorphismus, d.h.
   $\mathrm{cg(z+w) = cg(z) + cg(w), cg(zw) = cg(z) \cdot cg(w)}$
4. $|z + w| \leqslant |z| + |w|$

Zurück zu den Polynomen

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, n \in \mathbb{Z}_+$$

$a_j \in \mathbb{R}, a_n \neq 0 \iff \text{gr } p = n$, Gesamtheit $\mathbb{R}[x]$, sie bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit distributiver, kommutativer Multiplikation. (d.h. einen kommutativen Ring und eine $\mathbb{R}$-Algebra)

Interessante Frage: Was ist $p^{-1}(0)$? Wir wissen, dass

1.4.11 Folgerung

$\# p^{-1}(0) \leqslant \text{gr } p$

Beweis durch Induktion über n

- $n = 0$ ✓
- $n \geqslant 0$ bewiesen, gr $p = n + 1$

  1. Fall $p^{-1}(0) = \emptyset \Rightarrow$ Beh.

  2. Fall $\exists x_0 \in p^{-1}(0) \overset{1.4.4}{\Rightarrow} p(x) = (x - x_0)\tilde{p}(x), \text{gr } \tilde{p} = n$
  $\Rightarrow$ Beh. mit Induktionsvoraussetzung □

Es gibt $p \in \mathbb{R}[x]$ mit $p^{-1}(0) = \emptyset$, z.B. $p(x) = x^2 + 1 \geqslant 1$. In $\mathbb{C}$ gilt aber $z^2 + 1 = 0 \iff z^2 = -1 \iff z = \pm i$,
d.h. in $\mathbb{C}$ hat p zwei Nullstellen!

Können wir die allgemeine quadratische Gleichung in $\mathbb{C}$ lösen?

$z^2 + 2az + b = 0 \qquad \mathrm{sq(z) := z^2}$
$\iff \mathrm{(z + a)^2 = a^2 - b}$
$\iff \mathrm{z + a \in sq^{-1}(a^2 - b) = \{w \in \mathbb{C}; sq(w) = a^2 - b\}}$ (Urbild = Menge!)

Diskussion

Was ist $\mathrm{sq}^{-1}(\mathrm{w})$?

$w = w_1 + iw_2, w_j \in \mathbb{R}; \quad z = x + iy,\ z^2 = w \iff x^2 - y^2 + 2ixy = w_1 + iw_2$, d.h. $x^2 - y^2 = w_1,\ 2xy = w_2$

1. Fall $x = 0 \Rightarrow w_2 = 0$ und $z^2 = -y^2 = w_1 < 0$
   In diesem Fall ist $z = \pm i\sqrt{-w_1}$, d.h. es gibt zwei verschiedenen Lösungen außer für $w_1 = 0 \Rightarrow z = 0$

2. Fall $x \neq 0 \Rightarrow y = \frac{w_2}{2x}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 - \frac{w_2^2}{4x^2} &= w_1 \\ \Rightarrow x^4 - w_1x^2 - \frac{w_2^2}{4} &= 0 \\ \left(x^2 - \frac{w_1}{2}\right)^2 = x^4 - w_1x^2 + \frac{w_1^2}{4} &= \frac{w_1^2}{4} + \frac{w_2^2}{4} = \frac{|w|^2}{4} > 0 \end{aligned}$$

$$\iff x^2 = \frac{w_1}{2} + \frac{|w|}{2} \geqslant 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{|w| + w_1}{2}} \Rightarrow y = \pm\frac{w_2}{2\sqrt{\frac{|w|+w_1}{2}}}$$

d.h. es gibt 2 Lösungen

$$(x, y) = \pm\left(\sqrt{\frac{|w| + w_1}{2}}, \frac{w_2}{\sqrt{2(|w| + w_1)}}\right)$$

Geometrische Interpretation

$z = \cos\theta + i\sin\theta$ (Polarkoordinaten)

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned}$$

Im allg.: $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\frac{z_1}{|z_1|}\frac{z_2}{|z_2|}$

Daraus entnimmt man, dass für $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\mathrm{sq}^{-1}(\mathrm{w}) = \left\{\pm\sqrt{|\mathrm{w}|}(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2})\right\}$$

Beispiel Polynome dritten Grades oder kubische Gleichungen

$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
$y := x + \frac{a}{3} \iff x = y - \frac{a}{3}$
$\tilde{p}(y) := p(y - \frac{a}{3}) =: y^3 + 3py + 2q$
$3p = b - \frac{a^2}{3}, 2q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$
$D := p^3 + q^2$ Diskriminante

$D > 0$	$D < 0$	$D = 0, q \neq 0$	$D = 0, q = 0$
1 reelle u. 2 komplex konjugierte Nst.	3 versch. reelle Nstn. *Casus irreducibilis*	eine einf. u. eine doppelte reelle Nst.	eine dreifache reelle Nst.

Wir führen ein

$$u_{\pm} := \sqrt[3]{-q \pm \sqrt{D}}, \rho_{\pm} = \frac{1}{2}\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)$$

Dann sind die Lösungen gegeben durch

$$y_1 = u_+ + u_-,\ y_2 = \rho_+ u_+ + \rho_- u_-,\ y_3 = \rho_- u_+ + \rho_+ u_-$$

Germomino Cardano 1545 “Ars magna”
Nicolo Fontano gen. Tartaglia 1500-1557
Raffaelo Bombielli $\boxed{\sqrt{-1}}$
Nils Henrik Abel 1823: Polynome von höherem als 4. Grad besitzen keine *allgemeine* Auflösungsformel mehr.

Evariste Galois: Eine Lösungsformel existiert genau dann, wenn die sog. *Galoisgruppe* von p auflösbar ist.

Wir betrachten deshalb Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}[z]$: alle algebraischen Relationen bleiben erhalten (!), aber wir haben es jetzt mit Abbildungen $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zu tun, d.h. $p^{-1}(0)$ wird größer!

1.4.12 Satz (Der Fundamentalsatz der Algebra)

Für $p \in \mathbb{C}[z]$ gilt $\#p^{-1}(0) = \mathrm{gr}\ p$ (Beweis später)

Beispiel von Fibonacci

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 \Rightarrow p(1) = -7, p(2) = 32$$

$\Rightarrow x_0 \approx 1{,}3688081075$ Fehler $< 4 \cdot 10^{-11}$

VL: Do, 2002-11-28

1.4.13 Satz

Sei $p \in \mathbb{C}[z]$. Dann ist

$$p(z) = 0\ \forall z \in \mathbb{C} \iff a_j = 0\ \forall j \in \mathbb{Z}_+$$

Beweis:

Richtung „⇐” trivial.

Richtung „⇒” Z.z: gr $p = -\infty$
Annahme: gr $p = n \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow \#p^{-1}(0) = n < \infty$ Wid, weil $\#\mathbb{C} = \infty$ □

Bemerkungen

1. Das ist die Methode des Koeffizientenvergleichs. Beispiel:

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n} &= (1+x)^n \cdot (1+x)^n \\ \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} x^j &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} x^l \\ &= \sum_{k,l=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{l} x^{k+l} \qquad j = k+l \qquad 0 \leqslant j \leqslant 2n \\ &= \sum_{j=0}^{2n} x^j \sum_{\substack{0 \leqslant k,l \leqslant n \\ k+l=j}} \binom{n}{k}\binom{n}{l}\end{aligned}$$

$$\overset{\text{z.B.}}{\Rightarrow} \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$$

2. Statt $p(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$ schreibt man $p \equiv 0$.

1.4.14 Satz

Sei $p \in \mathbb{C}[z]$, gr $p \geqslant 0$.

1. Dann gilt
$$p(z) = a \prod_{\lambda \in p^{-1}(0)} (z-\lambda)^{\mu(\lambda)}$$
wobei $\mu(\lambda)$ die *Vielfachheit* von λ ist und
$$\sum_{\lambda \in p^{-1}(0)} \mu(\lambda) = \text{gr } p$$

2. Ist $p \in \mathbb{R}[x]$ und irreduzibel, so ist gr $p \leqslant 2$.

(ohne Beweis → Übungsaufgabe)

1.5 Konvergenz

$\sqrt{2} = 1{,}41\ldots = 1 + 4 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + \ldots$

Genauer bedeutet diese Dezimaldarstellung (geht zurück auf Simon Sterin ~ 1600, Frage der $\sqrt[12]{2}$):

$$\sqrt{2} \geqslant y_n := \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot 10^{-j} \qquad a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 1, \ldots$$

allgemein: $a_j \in \{0,\ldots,9\}$ inbes. $a_j \geqslant 0 \ \forall j \in \mathbb{Z}_+$
d.h. $y_n \leqslant y_{n+1} < \sqrt{2}$ aber $\sqrt{2} = \sup y_n$

Und auch: $x_0 > 0$ bel., $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}) \leqslant x_n \leqslant x_{n-1}$
$x_n^2 > 2$ und $\inf x_n = \sqrt{2}$

1.5.1 Definition

Wir sagen, dass die Folge $(x_n)_{x\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *gegen* $x_0 \in \mathbb{R}$ *konvergiert* gdw.: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass $|x_0 - x_n| < \varepsilon \ \forall n \geqslant n(\varepsilon)$.

$$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 : \ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : (\forall n \geqslant n(\varepsilon) : |x_n - x_0| < \varepsilon)$$

x_0 heißt der *Grenzwert* von (x_n):

$$x_0 := \lim_{n\to\infty} x_n$$

Beispiele:

1. $x_n = x_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ ist natürlich konvergent!

2. $x_n = (-1)^n$
Wäre diese Folge konvergent gegen x_0, so gäbe es $n(\frac{1}{2})$, sodass für $n \geqslant n(\frac{1}{2})$ gilt
$$|x_n - x_0| < \frac{1}{2}$$
$\Rightarrow |x_n - x_{n+1}| = |x_n - x_0 - (x_{n+1} - x_0)| \leqslant |x_n - x_0| + |x_{n+1} - x_0| < 1$ – Wid.

3. $x_n = n$

1.5.2 Definition

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(x(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, definiert durch $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dann ist auch $x \circ \phi$ eine Folge $\big(x \circ \phi(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Wenn ϕ streng monoton ist, d.h. $\phi(j+1) > \phi(j)$, dann heißt $x \circ \phi$ eine *Teilfolge* von (x_n).

(b) Wenn ϕ bijektiv ist, dann heißt $x \circ \phi$ eine *Umordnung*.

Beispiele:

$$\phi(j) = j + 1$$
$$\phi(j) = 2j$$
$$\phi(j) = aj + b$$

1.5.3 Hilfssatz

Jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. (D.h. $x(\mathbb{N})$ ist beschränkt.)

Beweis: Sei x_0 der Grenzwert von x_n, dann gibt es $n = n(1)$ so, dass für $n \geqslant n(1)$ gilt

$$|x_n| = |x_n - x_0 + x_0| \leqslant |x_n - x_0| + |x_0| \leqslant |x_0| + 1$$

Also gilt $|x_n| \leqslant \max\{|x_0| + 1, |x_1|, \dots, |x_{n(1)-1}|\}$ □

4. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $\quad 1; \frac{3}{2}; \frac{3}{2} + \frac{1}{3}; \dots$
   Hier ist $x_{n+1} \geqslant x_n$, aber x_n nicht beschränkt:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist nicht beschränkt.}$$

5. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ konvergiert gegen $\frac{\pi^2}{6}$.
   (Schwer zu zeigen, siehe **??**)

1.5.4 Satz (1. Hauptkriterium)

Eine monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Beweis: $(x_n)_{n\ in\mathbb{N}}$ sei monoton wachsend (o.B.d.A), sonst betrachte $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und beschränkt. Dann konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n =: x_0$.

Da: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es ein $n = n(\varepsilon)$ mit $x_0 - \varepsilon < x_{n(\varepsilon)} \leqslant x_0 < x_0 + \varepsilon$. Andernfalls wäre ja $x_n \leqslant x_0 - \varepsilon\ \forall n$ und damit x_0 nicht Supremum. –Wid.

Wegen der Monotonie gilt aber für $n \geqslant n(\varepsilon)$:

$$x_0 - \varepsilon < x_{n(\varepsilon)} \leqslant x_n \leqslant x_0 < x_0 + \varepsilon$$

Da ε beliebig war, folgt daraus die Behauptung. □

$$\begin{aligned}
x_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \text{ ist monoton wachsend, betrachte nur } n \geqslant 2 \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\
&= 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
&= 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2
\end{aligned}$$

$$\text{Also gilt für } n \geqslant 2 \text{ insbesondere } \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 - \frac{1}{n} \to 1 \ (?)$$

6. $x_n = \frac{1}{n} \to 0,\, n \to \infty$.

$$\varepsilon > 0,\ \text{zz: } |x_n| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ für } n \geqslant n(\varepsilon) \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$

(nach Archimedes für n hinr. groß.)

1.5.5 Satz (Rechenregeln)

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen.

1. $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$

2. $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

3. Ist $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, dann ist $y_n \neq 0$ für $n \geqslant n_0$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$$

Beweis:

$x_0 := \lim_{n\to\infty} x_n, \quad y_0 := \lim_{n\to\infty} y_n$

1. $\varepsilon > 0$, betrachte

$$|x_n + y_n - (x_0 + y_0)| \leqslant |x_n - x_0| + |y_n - y_0| < \varepsilon$$

$$\text{für } n \geqslant \max\left\{n^{(x)}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), n^{(y)}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} \Rightarrow \text{ Beh.}$$

2. $\varepsilon > 0$, betrachte

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - x_0 y_0| &= |x_n(y_n - y_0 + y_0) - x_0 y_0| \\
&= |x_n(y_n - y_0) + (x_n - x_0)y_0| \\
&\leqslant |x_n(y_n - y_0)| + |(x_n - x_0)y_0| \\
&= |x_n||y_n - y_0| + |x_n - x_0||y_0| \\
&\leqslant C^{(x)}|y_n - y_0| + C^{(y)}|x_n - x_0| \text{ wobei } |(x/y)_n| \leqslant C^{(x)/(y)} \text{ nach 1.5.3} \\
&< \tilde{\varepsilon}(C^{(x)} + C^{(y)}) \text{ für } n \geqslant \max\{n^{(x)}(\tilde{\varepsilon}), n^{(y)}(\tilde{\varepsilon})\}
\end{aligned}$$

Wir haben $\tilde{\varepsilon}(C^{(x)} + C^{(y)}) < \varepsilon$, wenn $\tilde{\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{(C^{(x)}+C^{(y)})}$

3. Nach 2. genügt es zu zeigen, dass

$$\text{Ist } y_0 \neq 0, \text{ so ist } \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geqslant n_0}} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y_0}$$

o.B.d.A. $y_n \neq 0 \; \forall n$, $\varepsilon > 0$, betrachte

$$\left| \frac{1}{y_n} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{|y_n - y_0|}{|y_n||y_0|} \qquad (*)$$

Ich behaupte, dass $|y_n| \geqslant \frac{|y_0|}{2}$ für $n \geqslant n\left(\frac{|y_0|}{2}\right)$: Es gilt $|y_n - y_0| < \frac{|y_0|}{2}$ nach Vor., also

$$|y_n| = |y_n - y_0 + y_0| \geqslant |y_0| - |y_n - y_0| > \frac{|y_0|}{2}$$

$$\text{D.h. } (*) \leqslant \frac{2}{|y_0|^2}|y_n - y_0| < \frac{2\tilde{\varepsilon}}{|y_0|^2} \text{ für } n \geqslant n(\tilde{\varepsilon})$$

$$\frac{2\tilde{\varepsilon}}{|y_0|^2} < \varepsilon \iff \tilde{\varepsilon} < \frac{|y_0|^2 \varepsilon}{2}$$

□

Beispiele

VL: Mo, 2002-12-02

7.

$$x_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha^j \overset{\alpha \neq 1}{=} \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

Diese Folge konvergiert genau dann, wenn $\frac{\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$ bzw. α^{n+1} konvergiert.

Wir wissen schon:

- $\alpha = 1 \Rightarrow x_n = n + 1 \quad \nearrow \infty$ *Divergenz*
- $0 < \alpha < 1$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n = n(\varepsilon) : \alpha^n < \varepsilon \text{ für } n \geqslant n(\varepsilon)$$

  d.h. $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha^n = 0$

- $\alpha > 1$

$$\Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} \; \exists n(N) : \alpha^n > N \text{ für } n \geqslant n(N)$$

  $\Rightarrow$ Divergenz

- Für $\alpha < 0$ ist $\alpha = -|\alpha|$ und $\alpha^n = (-1)^n|\alpha|^n \begin{cases} \text{divergiert für } |\alpha| \geqslant 1 \\ \text{konvergiert gegen 0 für } |\alpha| < 1 \end{cases}$

Daraus folgt: die geometrische Reihe konvergiert *genau* für $|\alpha| < 1$.

1.5.6 Definition

Eine Folge der Form $x_n = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$ heißt eine unendliche Reihe. Sie wird abgekürzt als $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$; falls die Reihe konvergiert schreibt man auch $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j$.

1.5.7 Definition

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ heißt *Nullfolge*.

Diskussion

8. (x_n) ist eine Nullfolge genau dann, wenn $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

   $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit Grenzwert x genau dann, wenn $(|x_n - x|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

9. Die Folge $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), x_1 > 0$ ist monoton fallend für $n \geqslant 2$ und nach unten beschränkt, also existiert $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$. Es muss gelten

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \iff \frac{x}{2} = \frac{1}{x} \iff x^2 = 2$$

10. Wir suchen ein Analogon für $\sqrt[p]{a}; a > 0, x_1 > 0$ beliebig

$$x_{n+1} := \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right)$$

   Dann gilt nach der AG-Ungleichung

$$x_{n+1} \geqslant \sqrt[p]{x_n^{p-1}\frac{a}{x_n^{p-1}}} = \sqrt[p]{a} > 0$$

   Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt durch eine positive Zahl und

$$x_{n+1} \leqslant \frac{1}{p}(p-1)x_n + \frac{x_n^p}{px_n^{p-1}} = x_n, n \geqslant 2(!)$$

   Also $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und erfüllt

$$x = \frac{1}{p}\left((p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}}\right) \iff \frac{1}{p}x = \frac{a}{px^{p-1}} \iff x^p = a$$

1.5.8 Hilfssatz

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit den Grenzwerten x bzw. y.

1. Jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent mit dem Grenzwert x.

2. Gilt $x_n \leqslant y_n$ für $n \geqslant n_0$, so gilt auch $x \leqslant y$.

3. Ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, so gilt auch $x \leqslant z \leqslant y$. Insbesondere folgt aus $x = y$ auch $z = x = y$ ("Sandwich-Lemma").

4. $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |x|$

Beweis

1. Eine Teilfolge ist nach Definition eine Folge der Form $\left(x_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv. $\varepsilon > 0$ sei vorgegeben, dann gibt es $n(\varepsilon)$ so, dass $|x - x_n| < \varepsilon$ für $n \geqslant n(\varepsilon)$.

   Weil ϕ injektiv ist, gibt es ein $m(\varepsilon)$ so, dass für $m > m(\varepsilon)$ auch $\phi(m) > n(\varepsilon)$ gilt. Dann gilt für $m > m(\varepsilon)$ $\quad |x - x_{\phi(m)}|$ wie gewünscht.

2. Wir betrachten $0 \leqslant w_n = y_n - x_n \to y - x$,
   z.z. $y - x \geqslant 0$ oder: $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert w und $w_n \geqslant 0 \Rightarrow w \geqslant 0$ Wäre $w < 0$, so wäre für $n \geqslant n\left(\frac{|w|}{2}\right)$

   $$0 \leqslant w_n = w_n - w + w \leqslant w + |w_n - w| \leqslant -|w| + \frac{|w|}{2} = -\frac{|w|}{2} < 0$$

   — Widerspruch. Bemerkung: Aus $x_n < y_n\ \forall n$ folgt *i. allg. nicht* $x < y$. (Gegenbeispiel: $x_n = 0\ \forall n, \quad y_n = \frac{1}{n}$!)

3. Wende 2. an auf $(x_n), (z_n)$ und $(z_n), (y_n) \Rightarrow x \leqslant z, z \leqslant y$

4. $||x_n| - |x|| \leqslant |x_n - x| < \varepsilon$ für $n \geqslant n(\varepsilon)$!

Beispiele

11. Wir betrachten die Folge

    $$x_n := \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}, y > 0$$

    Wir berechnen nach Binomi

    $$\begin{aligned} x_n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{y^j}{n^j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-j+1)}{n^j} \frac{y^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{n} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \frac{y^j}{j!} \leqslant \sum_{j=0}^{n} \frac{y^j}{j!} \end{aligned}$$

Frage: Ist diese Reihe konvergent? Wegen der Monotonie genügt es, Beschränktheit zu zeigen. Wähle $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $j_0 \geqslant 2y$. Dann wird für $j > j_0$

$$\frac{y^j}{j!} = \frac{y^{j_0}}{j_0!} \frac{y \cdots y}{(j_0+1)\cdots j} \leqslant \frac{y^{j_0}}{j_0!} \left(\frac{1}{2}\right)^{j-j_0}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Für } n > j_0 \text{ ist } x_n &\leqslant \sum_{j=0}^{j_0} \frac{y^j}{j!} + \sum_{j=j_0+1}^{n} \frac{y^{j_0}}{j_0!} 2^{j_0 - j} =: C(y) + \frac{y_0^{j_0}}{j_0!} 2^{j_0} \sum_{j=j_0+1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^j \\ &\leqslant: C(y) + C'(y) \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = C(y) + C'(y) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } \exp(y) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \text{ konvergiert.}$$

Also gilt für $n \in \mathbb{N}$ $\quad x_n \leqslant \exp(y)$. Wähle jetzt ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon > 0$. Dann ist für $n \geqslant N$ auch

$$\begin{aligned} x_n &\geqslant \sum_{j=0}^{N} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \frac{y^j}{j!} \\ &\geqslant (1-\varepsilon) \sum_{j=0}^{N} \frac{y^j}{j!} \text{ für } n \geqslant n(\varepsilon), \text{ denn} \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) = 1 \text{ für } 1 \leqslant j \leqslant N.$$

Also folgt, für jedes N und für jedes ε, nach 1.5.8.2

$$\exp(y) \geqslant \lim_{n\to\infty} x_n \geqslant (1-\varepsilon) \sum_{j=0}^{N} \frac{y^j}{j!}$$

$$\text{genauso} \overset{N\to\infty}{\Rightarrow} \exp(y) \geqslant \lim_{n\to\infty} x_n \geqslant (1-\varepsilon)\exp(y)$$

Weil ε beliebig (z.B. $\varepsilon = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$), folgt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \exp(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}$$

1.5.9 Definition

Die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni y \longmapsto \exp(y) \in \mathbb{R}$$

heißt die *Exponentialfunktion*. Die Zahl $e := \exp(1)$ heißt die *Eulersche Zahl*.

Problem

Erkenne Konvergenz ohne Kenntnis des Grenzwertes *und* ohne Monotonie!

Für alle x_n, x_m in der ε-Umgebung gilt $|x_n - x_m| < 2\varepsilon$. Also

$$(x_n) \text{ konvergent} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \; \forall n, m \geqslant n(\varepsilon): \; |x_n - x_m| < \varepsilon$$

1.5.10 Satz (Das Cauchy-Kriterium)

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \; \forall n, m \geqslant n(\varepsilon): \; |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Beweis

- "$\Rightarrow$" erledigt (und trivial)

- "$\Leftarrow$":
  a) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, denn für $m \geqslant n(1)$ gilt

$$|x_m| = \left|x_m - x_{n(1)} + x_{n(1)}\right| \leqslant \left|x_m - x_{n(1)}\right| + \left|x_{n(1)}\right| \overset{(*)}{<} 1 + \left|x_{n(1)}\right|$$

$$\Rightarrow |x_m| \leqslant \max\left\{|x_1|, \ldots, \left|x_{n(1)}\right|\right\} + 1 =: C$$

  b) Führe die Folge ein

$$-C \leqslant y_n := \sup\{x_m;\ m \geqslant n\} \leqslant C;$$

  Dann gilt $y_{n+1} \leqslant y_n$, d.h. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und beschränkt mit Grenzwert $y := \inf\limits_n y_n$. Dann ist y auch der Grenzwert von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d.h. (x_n) ist konvergent.

  Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_1(\varepsilon)$ so, dass $y \leqslant y_n \leqslant y + \varepsilon$ für $n \geqslant n_1(\varepsilon)$. Dann wählen wir $n_2(\varepsilon)$ so, dass $|x_m - x_l| < \varepsilon$ für $m, l \geqslant n_2(\varepsilon)$ nach $(*)$.

  Wähle dann ein $k_0 \geqslant n_2(\varepsilon)$ mit $\left|x_{k_0} - y_{n_1(\varepsilon)}\right| < \varepsilon$.

$$\Rightarrow \text{für } l \geqslant n_2(\varepsilon) \quad \begin{aligned} |x_l - y| &= \left|x_l - x_{k_0} + x_{k_0} - y_{n_1(\varepsilon)} + y_{n_1(\varepsilon)} - y\right| \\ &\leqslant |x_l - x_{k_0}| + \left|x_{k_0} - y_{n_1(\varepsilon)}\right| + \left|y_{n_1(\varepsilon)} - y\right| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

□

Beweis 2

VL: Do, 2002-12-05

1. Es genügt zu zeigen, dass es eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $n_j = \phi(j)$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die konvergiert. Denn gilt

$$|x_{n_j} - x| < \varepsilon \qquad \forall j \geqslant j(\varepsilon)$$

   so gilt für $n_j, m \geqslant n(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} |x_m - x| &= |x_m - x_{n_{\tilde{j}(\varepsilon)}} + x_{n_{\tilde{j}(\varepsilon)}} - x| \\ &\leqslant |x_m - x_{n_{\tilde{j}(\varepsilon)}}| + |x_{n_{\tilde{j}(\varepsilon)}} - x| \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

   falls $n_{\tilde{j}(\varepsilon)} \geqslant n(\varepsilon)$; aber $n_{\tilde{j}(\varepsilon)} \geqslant \tilde{j}(\varepsilon)$, d.h. wir wählen $\tilde{j}(\varepsilon) = \max\{j(\varepsilon), n(\varepsilon)\}$ und benutzen denselben Beweis.

   D.h. aus der Konvergenz einer Teilfolge folgt die Konvergenz von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Wir wissen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist:

$$a_0 \leqslant x_n \leqslant b_0 \quad \forall n, a_0 < b_0 \in \mathbb{R}$$

   Es gibt 2 Möglichkeiten:

$$\text{1. Fall: } x_n \in \left[a_0, \frac{a_0 + b_0}{2}\right] \qquad \text{für } \infty \text{ viele } n \in \mathbb{N}$$

$$2. \text{ Fall: } x_n \in \left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right] \quad \text{für } \infty \text{ viele } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Im 1. Fall: } b_1 := \frac{a_0+b_0}{2}, a_1 := a_0$$

$$\text{Im 2. Fall: } a_1 := \frac{a_0+b_0}{2}, b_1 := b_0$$

Induktiv konstruiere ich $(a_j)_{j=0}^n$, $(b_j)_{j=0}^n$ mit

(a) $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_0$

(b) $x_m \in [a_n, b_n]$ für unendl. viele $m \in \mathbb{N}$.

(c) $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} \Rightarrow (b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Induktionsschritt: Dann konstruieren wir a_{n+1}, b_{n+1} wie im 1. Schritt:

$$a_{n+1} := a_n \quad b_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2} \text{ falls } x_m \in \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] \text{ für } \infty \text{ viele } n \in \mathbb{N}$$

$$b_{n+1} := b_n \quad a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2} \text{ falls } x_m \in \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] \text{ für } \infty \text{ viele } n \in \mathbb{N}$$

Dann haben wir zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruiert mit:

(IS1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend
$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend

(IS2) $a_n \leqslant b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(IS3) $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge

Dann existiert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b := \lim_{n\to\infty} b_n$ nach IS1/2 und dem Hauptkriterium, und nach IS3 (und der Addition von Grenzwerten) gilt $b - a = 0 \iff b = a$. Nun konstruieren wir eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ von (x_n), indem wir

$$n_{j+1} \geqslant n_j \text{ so wählen, dass } x_{n_{j+1}} \in [a_{j+1}, b_{j+1}]\,.$$

Dann konvergiert nach Konstruktion $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ gegen a, denn

$$|x_{n_{j+1}} - a| \leqslant (b_{j+1} - a_{j+1}) \longrightarrow 0 \quad (j \to \infty).$$

□

1.5.11 Definition

Zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften (IS1)-(IS3) heißen eine *Intervallschachtelung*.

Diskussion des Cauchy-Kriteriums:

Wichtig ist der Fall unendl. Reihen

$$(*) \quad x_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

Zwischenbemerkung: Aus $(*)$ folgt

$$x_1 = a_1, x_{n+1} = x_n + a_n \iff a_n = x_{n+1} - x_n.$$

D.h.: Jede Folge lässt sich als unendliche Reihe schreiben. (trivial)

Für unendliche Reihen lautet das Cauchy-Kriterium:

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists n(\varepsilon) : \ \forall n, m \geqslant n(\varepsilon) \text{ mit } n \geqslant m : \left| \sum_{j=m+1}^{n} a_j \right| < \varepsilon$$

1.5.12 Satz (Majorantenkriterium von Weierstraß)

Es sei $b_j \geqslant 0 \ \forall j \in \mathbb{Z}_+$ und $\sum b_j$ konvergent. Dann ist auch $\sum a_j$ konvergent für jede Folge $(a_j)_{j \in \mathbb{Z}_+}$, die der Bedingung

$$|a_j| \leqslant C \cdot b_j \text{ für } j \geqslant j_0 \in \mathbb{Z}_+ \text{ genügt.}$$

Beweis:

Nach Voraussetzung ist $\sum b_j$ konvergent, d.h. zu $\varepsilon > 0$ gibt es $n(\varepsilon) \in \mathbb{Z}_+$, sodass für $n > m > n(\varepsilon)$ gilt

$$\sum_{j=m+1}^{n} b_j < \varepsilon.$$

Dann gilt für $n, m \geqslant \max\{n(\varepsilon), j_0\}$

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} a_j \right| \leqslant \sum_{j=m+1}^{n} |a_j| \leqslant C \cdot \sum_{j=m+1}^{n} b_j < C \cdot \varepsilon.$$

Hieraus folgt die Behauptung, weil ε beliebig ist. □

Beispiel

Für jede beschränkte Folge $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist $\sum_{j \geqslant 1} \frac{a_j}{j^k}$ konvergent falls $k \geqslant 2$, denn

$$\left| \frac{a_j}{j^k} \right| \leqslant \frac{|a_j|}{j^2} \leqslant \frac{c}{j^2}$$

wenn $|a_j| \leqslant C \ \forall j$.

Die wichtigste Majorante ist allerdings die geometrische Reihe.

1.5.13 Folgerung

Ist $\sum a_j$ konvergent, so ist (a_j) eine Nullfolge. Beweis: bereits erbracht. (Die Umkehrung gilt *nicht*: $\sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{j}$ ist divergent, aber $\frac{1}{j}$ ist Nullfolge.)

Beispiel

Wie verhält sich:

$$\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{1}{j} \quad ?$$

$$\begin{aligned}
x_{2n+1} &= \sum_{j=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{j-1}}{j} \\
&= x_{2n-1} + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} \\
&= x_{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \\
&\leqslant x_{2n-1} \\
x_{2n} &\leqslant x_{2n+2}
\end{aligned}$$

D.h.: Die Folgen (x_{2n}) und (x_{2n+1}) bilden eine Intervallschachtelung, sind also insbesondere konvergent mit selbem Grenzwert!

1.5.14 Satz (Leibniz)

Es sei $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine monotone Nullfolge. Dann ist $\sum_{j\geqslant 1}(-1)^{j-1}a_j$ konvergent.

Beweis: Wegen der Monotonie und $\lim_{j\to\infty} a_j = 0$ ist $a_j \geqslant 0\ \forall j$ oder $a_j \leqslant 0\ \forall j$. □

1.5.15 Definition

Die Reihe $\sum a_j$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Summe der Beträge (also $\sum |a_j|$) konvergiert.

Bemerkung

Nach Weierstraß ist jede absolut konvergente Reihe konvergent ($b_j = a_j$), aber nicht umgekehrt:

$$\sum_{j\geqslant 1}\frac{(-1)^{j-1}}{j} = \log 2 \qquad \text{(Basis } e\text{)}$$

Systembrüche oder g-adische Entwicklung

Beispielhaft für $g = 2$ - *Dualbruchentwicklung (Leibniz)*

Sei $x \in \mathbb{R}_+$. Dann ist die Menge $\{n \in \mathbb{Z}; 2^n \leqslant x\}$ nach oben beschränkt, hat also ein Maximum $n_0 = n_0(x)$. Dann gilt $2^{n_0} \leqslant x < 2^{n_0+1}$, d.h. $x = 2^{n_0} + t_*$ mit $t_* < 2^{n_0+1} - 2^{n_0} = 2^{n_0}$.

Dann gilt $0 \leqslant 2^{-n_0} t_* < 1$. Setze $t_{-n_0} := t_*,\ y_{-n_0} := 1$.

$$[0,1) = \left[0, \frac{1}{2}\right) \dot\cup \left[\frac{1}{2}, 1\right)$$

1. Fall: $2^{-n_0} t_{-n_0} \in [0, \frac{1}{2}) \Rightarrow t_{-n_0} < 2^{n_0-1}, \qquad y_{-n_0+1} := 0$

2. Fall: $2^{-n_0} t_{-n_0} \in [\frac{1}{2}, 1) \Rightarrow 2^{n_0-1} \leqslant t_{-n_0} < 2^{n_0}, \qquad y_{-n_0+1} := 1$

Damit konstruieren wir eine Intervallschachtelung mit

$$a_n := \sum_{j=-n_0}^{n} y_j \cdot 2^{-j}, \quad b_n := a_n + 2^{-n}.$$

Ist also $x =: a_n + t_n$, so gilt $t_n \in [0, 2^{-n})$ oder $2^n t_n \in [0,1)$. Dann wiederhole den vorigen Schritt!

1.5.16 Satz (Die g-adische Entwicklung)

Zu jedem $x \in \mathbb{R}_+$ und $g \in \mathbb{N}$ mit $g \geqslant 2$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $y_j \in \{0, 1, \ldots, g-1\}$ so, dass

$$\sum_{j=-n_0}^{\infty} y_j g^{-j}.$$

Dabei gilt *niemals* $y_j = g - 1\ \forall j \geqslant j_0$.

Bemerkung:

$$\begin{aligned} 1 &= 2^0 \\ 1 &= \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

Schreibweise:

$$\begin{aligned} x &= (y_{-n_0} \ldots y_0, y_1 \ldots y_n \ldots) \\ &= y_{-n_0} \ldots y_0, y_1 \ldots y_n \end{aligned}$$

Dezimalsystem: $g = 10$

Sexagesimalsystem: $g = 60$ (Babylonier)

$g = 20$ (Mayas)

VL: Mo, 2002-12-09

Bemerkung Eine solche g-adische Entwicklung heißt *periodisch*, wenn gilt $a_{j+m} = a_j$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und $j \geqslant n_2 \in \mathbb{N}$.
$8 : 3 = 2,\overline{6}$. Nach diesem Beispiel vermuten wir, dass periodische g-adische Brüche rational sind!

o.B.d.A. $n_2 = 0$ (!), $a_j = a_{j+km}\ \forall k \in \mathbb{Z}_+$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_j g^{-j} &= \sum_{j=0}^{m-1} a_j g^{-j} + \sum_{j=m}^{m+(m-1)} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=km}^{km+m-1} a_j g^{-j} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j'=0}^{m-1} a_{j'} g^{-j'-km} \text{ mit } j' = j - km,\ j = j' + km,\ 0 \leqslant j' \leqslant m-1 \\
&= \sum_{j'=0}^{m-1} a_{j'} g^{-j'} \sum_{k=0}^{\infty} g^{-km} = \sum_{j'=0}^{m-1} a_{j'} g^{-j'} \frac{1}{1-g^{-m}} \in \mathbb{Q}, \text{ denn } g^{-m} < 1
\end{aligned}$$

Frage: Gilt auch die Umkehrung:
$x \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ die g-adische Entwicklung ist periodisch?

Axiome für $\mathbb{R}$

(I) Körperaxiome: auch für $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$

(II) Anordungsaxiome: auch für $\mathbb{Q}$

(III) Vollständigkeit

1.5.17 Definition

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper heißt *Cauchy-Folge* (CF), wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geqslant n(\varepsilon) : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Die Folge heißt *konvergent* gegen x, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n(\varepsilon) : |x - x_n| < \varepsilon$$

1.5.18 Definition und Satz

Ein geordneter Körper $\mathbb{K}$ heißt *archimedisch*, wenn $\mathbb{N}(\mathbb{K})$ die archimedische Eigenschaft hat, d.h.

$$\forall x \in \mathbb{K} :\ \exists n \in \mathbb{N}(\mathbb{K}) : n \geqslant x$$

Beispiel $\mathbb{R}[x]$ ist ein kommutativer *Ring* (d.h. Addition und Multiplikation, aber nicht Division uneingeschränkt möglich). Wir definieren eine Ordnung durch

$$P := \left\{ r(t) = \sum_{j=0}^{\text{gr } r} a_j t^j ; a_{\text{gr } r} > 0 \right\}$$

$$\mathbb{R}[x] \quad \underbrace{\overset{i}{\hookleftarrow}}_{\text{injekt. Abb.}} \quad \mathbb{R} \qquad a \mapsto r(t) \equiv a$$

Dann gilt aber $t > a \ \forall a \in \mathbb{R}$, insbesondere ist $n < t \ \forall n \in \mathbb{N}$. Also hat $\mathbb{N}$ kein sup, obwohl es nach oben beschränkt ist.

$\mathbb{R}[x]$ ist aber natürlich kein Körper - jedoch ein Nullteiler-freier Ring, d.h.

$$r_1(x) \cdot r_2(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow r_1 \equiv 0 \text{ oder } r_2 \equiv 0$$

$$\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} = (n,m); n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N} \right\}$$
$$(n,m) \sim (n',m') \iff nm' = n'm$$

Das ist eine Äquivalenzrelation, und $\mathbb{Q}$ ist ein Körper:

$$(n,m) + (n',m') = (nm' + n'm, mm')$$
$$(n,m) \cdot (n',m') = (nn', mm')$$

Satz

In einem archimedisch angeordneten Körper $\mathbb{K}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(III) Jede nach oben beschränkte Menge besitzt eine kleinste obere Schranke.

(III') Jede CF in $\mathbb{K}$ ist konvergent.

Beweis

(III)⇒(III') Das haben wir bewiesen.

(III')⇒(III) Es sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{K}$ nach oben beschränkt, d.h. es gibt $a_0 \in M$ und $b_0 \in \mathbb{K}$ mit $a_0 \leqslant b_0$, b_0 obere Schranke für M

1. Fall $a_0 = b_0$ Dann ist $a_0 = \sup M$.
2. Fall $a_0 < b_0$, Betrachte $\frac{a_0+b_0}{2}$
   1. Fall: $\frac{a_0+b_0}{2}$ ist obere Schranke von M
      Setze dann $b_1 := \frac{a_0+b_0}{2}, \quad a_1 := a_0$
   2. Fall: $\frac{a_0+b_0}{2}$ ist nicht obere Schranke von M.
      Dann gibt es $a_1 \in M$ mit $\frac{a_0+b_0}{2} < a_1 \leqslant b_0. \quad b_1 := b_0$

Nehmen wir an, dass wir Zahlen

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_0$$

konstruiert haben mit $n \in \mathbb{N}; \quad a_j \in M, \quad 0 \leqslant j \leqslant n$
b_j ist obere Schranke von $M, \quad 0 \leqslant j \leqslant n, \quad b_n - a_n \leqslant \frac{b_0-a_0}{2^n}$

1. Fall $a_n = b_n \Rightarrow a_n = \sup M$ ✓

2. Fall $a_n < b_n$

   2a. Fall $\frac{a_n+b_n}{2}$ ist obere Schranke
   setze $a_{n+1} := a_n, \quad b_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$

   2b. Fall $\frac{a_n+b_n}{2}$ ist nicht obere Schranke

$$\Rightarrow \exists a_{n+1} \in M : \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant a_{n+1} \leqslant b_n =: b_{n+1}$$

   Dann gilt in beiden Fällen

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leqslant \frac{b_n - a_n}{2} \leqslant \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$$

   Entweder bricht die Konstruktion ab, oder wir erhalten eine Intervallschachtelung $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}, \ (b_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$

Dann gilt für $n, m \in M$

$$0 \leqslant a_{n+m} - a_n \leqslant b_n - a_n \leqslant \frac{b_0 - a_0}{2^n} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \ n \geqslant n(\varepsilon)$$

$$0 \leqslant b_n - b_{n+m} \leqslant b_n - a_n \leqslant \frac{b_0 - a_0}{2^n} < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \ n \geqslant n(\varepsilon)$$

Also sind $(a_n), \ (b_n)$ CF, und es gibt $c \in \mathbb{K}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ und c ist das gesuchte Supremum von M (!). $\square$

Wie steht es denn mit der Konvergenz der komplexen Zahlen? D.h. wann ist eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ konvergent?

Abstand in $\mathbb{C}$ (nach Pythagoras):

$$|z_1 - z_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)}$$

1.5.19 Definition

Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ heißt konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall n \in \mathbb{N}, \, n \geqslant n(\varepsilon) : |z - z_n| < \varepsilon$$

Bemerkung: $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen z, wenn $(\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\operatorname{Re} z$ und $(\operatorname{Im} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\operatorname{Im} z$ konvergiert, weil $|z|^2 = |\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2$

1.5.20 Folgerung

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ ist genau dann konvergent, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall n, m \in \mathbb{N}, \, n, m \geqslant n(\varepsilon) : |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Ein genauerer Blick auf die Betragsfunktion

1.5.21 Hilfssatz

Die Funktion

$$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \ni (z_1, z_2) \mapsto |z_1 - z_2| = d(z_1, z_2) \in \mathbb{R}_+$$

hat die folgenden Eigenschaften:

(1) $d(z_1, z_2) = 0 \iff z_1 = z_2$

(2) $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$

(3) $d(z_1, z_2) \leqslant d(z_1, z) + d(z, z_2)$ für alle $z \in \mathbb{C}$

Beweis von (3) $\quad z_1' := z_1 - z, \quad z_2' := z_2 - z$

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2)^2 &= |z_1 - z_2|^2 = |z_1 - z - (z_2 - z)|^2 = (z_1' - z_2')(\overline{z_1'} - \overline{z_2'}) \\ &= z_1'\overline{z_1'} + z_2'\overline{z_2'} - z_1'\overline{z_2'} - \overline{z_1'}z_2' \\ &= |z_1'|^2 + |z_2'|^2 - (z_1'\overline{z_2'} + \overline{z_1'\overline{z_2'}}) \\ &= |z_1'|^2 + |z_2'|^2 - 2\operatorname{Re} z_1'\overline{z_2'} \\ &\leqslant |z_1'|^2 + |z_2'|^2 + 2|z_1'||z_2'| = (|z_1'| + |z_2'|)^2 \end{aligned}$$

1.5.22 Definition

Es sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (1),(2),(3) von 1.5.21. Dann heißt d eine *Metrik* auf X und (X, d) heißt ein *metrischer Raum.*

Beispiele

1. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ist ein metrischer Raum, ebenso $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

2. Jede Teilmenge X von $\mathbb{R}$ versehen mit $d_X(x, y) := |x - y|$, der Einschränkung von d auf $X \times X$, ist ein metrischer Raum.

3. Jede Menge X ist ein metrischer Raum, wenn wir definieren

$$d_{\text{diskr.}}(x, y) := \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

1.6 Teilmengen von $\mathbb{R}$

Endliche Teilmengen $\simeq \mathbb{N}_n$: $\quad \mathbb{N}, \mathbb{Q}$, Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$
$\mathbb{N}$: Folge $x(n) = n$. Ist $\mathbb{Q}$ auch eine Folge?
Betrachte $\mathbb{Q}_+^* = \mathbb{Q} \cap (0, \infty) = \left\{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{N}\right\}$

1. Cantorsches Diagonalverfahren definiert eine *surjektive* Abbildung $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+^*$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
1 & \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\
2 & \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \\
3 & \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & & \\
4 & \frac{4}{1} & \frac{4}{2} & & & \\
5 & \frac{5}{1} & & & &
\end{array}$$

1.6.1 Definition

Eine (unendliche) Teilmenge A von $\mathbb{R}$ heißt *abzählbar* (unendlich), wenn es eine Folge $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gibt mit $A \subset x(\mathbb{N})$.

Problem: Sind die reellen Zahlen abzählbar? (Georg Cantor)

VL: Do, 2002-12-12

1.6.2 Satz

1. M abzählbar unendlich $\iff$ es gibt eine bij. Abb. $\psi : \mathbb{N} \to M$
2. $A \subset M \Rightarrow A$ abzählbar
3. M_1, M_2 abzählbar unendl. $\Rightarrow M_1 \times M_2$ abzählbar unendl.
4. Sei $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Familie abzb. unendl. Mengen. Dann ist auch $M := \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} M_i$ abzb. unendl.

Beweis

1. M abzb. unendl. $\Rightarrow$ $\exists \phi : \mathbb{N} \to M$ surj. Konstruiere $\psi : \mathbb{N} \to M$ bijektiv! Konstruktion durch Induktion:

   $$\psi(1) := \phi(1)$$

   $\psi(\mathbb{N}_n)$ schon konstruiert (inj.), dann setze

   $$\psi(n+1) := \phi(\underbrace{\min(\mathbb{N} \setminus \phi^{-1}(\psi(\mathbb{N}_n)))}_{=:m_{n+1}}) \qquad \Rightarrow \psi(n+1) \notin \psi(\mathbb{N}_n)$$

   Weiter gilt $m_{n+1} > m_n$, d.h. zu jedem $l \in \mathbb{N}$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $m_{n_0+1} > l$.

   Zu $x \in M$ gibt es $l \in \mathbb{N}$ mit $\phi(l) = x$. Ist dann $m_{n_0+1} > l$, so ist $x = \phi(l) \in \psi(\mathbb{N}_{n_0})$. Also ist ψ surjektiv.

2. $A \subset M \Rightarrow$ abzählbar?

   1. Fall A endlich. ✓

2. Fall A unendlich.

Wähle eine bijektive Abb. $\psi : M \to \mathbb{N}$ o.B.d.A. $A \subset \mathbb{N}$ unendlich. Dann lässt sich A schreiben als

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < \ldots$$

(Formal dieselbe Konstruktion wie in 1.)

3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(i,j); i,j \in \mathbb{N}\}$

	1	2	3	4	5	
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$\cdots$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$		
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$			
4	$(4,1)$	$(4,2)$		$\ddots$		
5	$(5,1)$					
6	$\vdots$					

Daher auch $\mathbb{Q}$ abzb: $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

$\mathbb{N} \overset{\phi_i}{\to} M_i$, $i = 1,2$ surj.

$$\Rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (i,j) \mapsto \phi_1 \times \phi_2(i,j) := \big(\phi_1(i), \phi_2(j)\big) \in M_1 \times M_2$$

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\phi \text{ surj.}} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\phi_1 \times \phi_2} M_1 \times M_2$$

Also $\phi_1 \times \phi_2 \circ \phi$ surjektiv.

4. $\phi_i : \mathbb{N} \to M_i$ surj. mit $i \in \mathbb{N}$. Dann setze

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \ni (i,j) \overset{\psi}{\longmapsto} \phi_i(j) \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$$

$\Rightarrow \psi$ surj. (wie in 3.) $\square$

Georg Cantor

$(0,1) \sim \mathbb{R}$

Behauptung: $(0,1)$ *nicht* abzählbar!

Widerspruchsbeweis: Annahme, $(0,1)$ sei abzählbar.

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 2^{-j} \qquad x_j \in \{0{,}1\} \qquad x_j \neq 0 \text{ für ein } j$$

$x_j = 1 \ \forall j \geqslant j_0$ ist nicht erlaubt.
$(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge mit Werten in $\{0,1\}$, d.h. $x : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ ist eine (fast) beliebige Abb., $x(j) := x_j$.

Wir bezeichnen die Abbildungen von A nach B mit $\mathrm{Map}(A,B)$, d.h. wir erhalten eine injektive Abbildung.

$$\psi : (0,1) \ni x \mapsto (x(j))_{j\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \{0,1\})$$

mit $\mathrm{Map}(\mathbb{N},\{0,1\}) \setminus \psi\big((0,1)\big)$ ist abzählbar.
Wenn $(0,1)$ abzählbar, dann auch $\psi\big((0,1)\big)$, dann auch $\mathrm{Map}(\mathbb{N},\{0,1\})$ abzählbar!
Wenn das der Fall ist, gibt es eine bijekt. Abb

$$\lambda : \mathbb{N} \ni k \mapsto x^{(k)} \in \mathrm{Map}(\mathbb{N},\{0,1\})$$

2. Cantorsches Diagonalverfahren

	1	2	3	4	5	
1	$x^{(1)}(1)$	$x^{(1)}(2)$	$x^{(1)}(3)$	$x^{(1)}(4)$	$x^{(1)}(5)$	$\cdots$
2	$x^{(2)}(1)$	$x^{(2)}(2)$	$x^{(2)}(3)$	$x^{(2)}(4)$		
3	$x^{(3)}(1)$	$x^{(3)}(2)$	$x^{(3)}(3)$			
4	$x^{(4)}(1)$	$x^{(4)}(2)$		$\ddots$		
5	$x^{(5)}(1)$					
6	$\vdots$					

	1	2	3	4	5	
1	$1 - x^{(1)}(1)$	$x^{(1)}(2)$	$x^{(1)}(3)$	$x^{(1)}(4)$	$x^{(1)}(5)$	$\cdots$
2	$x^{(2)}(1)$	$1 - x^{(2)}(2)$	$x^{(2)}(3)$	$x^{(2)}(4)$		
3	$x^{(3)}(1)$	$x^{(3)}(2)$	$1 - x^{(3)}(3)$			
4	$x^{(4)}(1)$	$x^{(4)}(2)$		$\ddots$		
5	$x^{(5)}(1)$					
6	$\vdots$					

$y : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ mit $y(l) = 1 - x^{(l)}(l)$ wobei y nun aber in $\mathrm{Map}(\mathbb{N},\{0,1\})$ nicht vorkommt, das ist ein Widerspruch.

1.6.3 Satz

$\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Beweis: Wäre $\mathbb{R}$ abzählbar, so auch $(0,1)$, was nach 1.6.2 ein Widerspruch ist. □

1.6.4 Definition

Zwei Mengen A, B heißen *gleichmächtig* oder *von der selben Kardinalzahl*, falls es eine bij. Abb. $\phi : A \to B$ gibt.

Bemerkungen

$A \sim B \iff \exists \phi \in \mathrm{Map}(A, B)$ bij. ist eine Äquivalenzrelation. Die Kardinalzahlen sind die Äquivalenzklassen dieser Relation.

Für endliche Mengen ist $n =$ Kardinalzahl von $\mathbb{N}_n$, und $\mathbb{N}$ repräsentiert die abzählbar unendlichen Mengen.

$$\text{Kardinalzahl von } \mathbb{N} =: \sharp\mathbb{N} =: \aleph_0$$

$$(x : \mathbb{N} \to \{0,1\}) \in \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \{0,1\})$$

$$x \mapsto x^{-1}(1) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$\text{bijekt. Abb. } \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathrm{Map}(\mathbb{N}, \{0,1\})$$

1.6.5 Satz

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ hat immer größere Kardinalität als X, d.h. es gibt zwar eine injektive, aber keine bijektive Abb. $\psi : X \to \mathcal{P}(X)$.

Beweis:

1. $\psi : X \ni x \mapsto \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ ist injektiv.
2. Für $A \subset X$ setzen wir
$$\chi_A(y) := \begin{cases} 1 & y \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
die *charakteristische Funktion* von A.
Dann haben wir eine Bijektion:
$$\mathcal{P}(X) \ni A \mapsto \chi_A \in \mathrm{Map}(X, \{0,1\})$$
Wäre $\psi : X \to \mathcal{P}(X)$ bij., so könnten wir ein $A \in \mathcal{P}(X)$ wie folgt definieren:
$$\chi_A(x) := 1 - \chi_{\psi(x)}(x)$$
$$\Rightarrow A \neq \psi(y)\ \forall y \in X - \text{Widerspruch!}$$

Cantor schreibt: $\sharp\mathcal{P}(X) =: 2^{\sharp X}$ (Verallgemeinerung des Falles $X = \mathbb{N}_n$), dann $\sharp X < 2^{\sharp X}$.

Unsere Argumente zeigen, dass

$$\sharp\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$$

Kontinuumshypothese

Es gibt keine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ mit

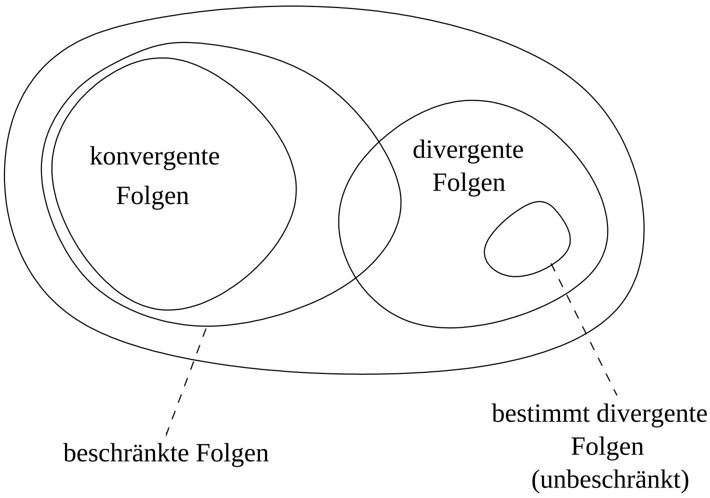
$$\aleph_0 < \sharp M < 2^{\aleph_0}.$$

1.7 Struktur von nicht konvergenten Folgen

VL: Mo, 2002-12-16

1.7.1 Definition

Eine Zahlenfolge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*.



$\{$konvergente Folgen$\} \subsetneq \{$beschränkte Folgen$\}$

$a_n = (-1)^n$ ist beschränkt aber divergent.

1.7.2 Definition

Eine Folge (a_n) heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$, wenn

$$\forall K > 0\ \exists N(K) \text{ mit } a_n > K \text{ bzw. } a_n < -K \text{ für alle } n \geqslant N(K)$$

In Zeichen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

$a_n \to +\infty$ $\qquad$ $a_n \to -\infty$

Beispiel

$$a_n > 0 \text{ (bzw. } a_n < 0) \text{ und } a_n \to 0 \Rightarrow \frac{1}{a_n} \to +\infty \left(\text{bzw. } \frac{1}{a_n} \to -\infty\right)$$

Beweis Sei $K > 0 \quad \varepsilon := \frac{1}{K}$

$$\exists N(\varepsilon) = N(K) \; \forall n \geqslant N(K) : 0 < a_n < \frac{1}{K} \iff \frac{1}{a_n} > K$$

Redeweise: Wenn $a_n \to +\infty$ ($a_n \to -\infty$), nennen wir $+\infty$ (bzw. $-\infty$) *uneigentliche Grenzwerte* der Folge (a_n). Wenn (a_n) gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, so heißt a der *eigentliche Grenzwert*.

1.7.3 Satz

Sei (a_n) eine konvergente bzw. bestimmt divergente Folge. Dann sind alle Teilfolgen $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (a_n) konvergent bzw. bestimmt divergent und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(Zur Erinnerung) Teilfolge: Ist (n_k) eine streng wachsende Folge natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$, dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots)$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(Bei Umordnungen behalten wir die Reihenfolge nicht!)

Behauptung $n_k \geqslant k \; \forall k \in \mathbb{N}$

Induktion $n_1 \geqslant 1$ ✓
$k \Rightarrow k+1: \quad n_{k+1} > n_k \geqslant k \Rightarrow n_{k+1} \geqslant k+1$

Beweis des Satzes 1.7.3 Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge. Sei $\varepsilon > 0$
$\Rightarrow \exists N(\varepsilon)$ mit $|a_n - a| < \varepsilon \; \forall n \geqslant N(\varepsilon)$, wobei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
Für $k \geqslant N(\varepsilon): \; n_k \geqslant n_{N(\varepsilon)} \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \varepsilon \; \forall k \geqslant N(\varepsilon)$
$\Rightarrow a_{n_k}$ konvergiert gegen a.

Für bestimmt divergente Folgen ähnlich.

1.7.4 Definition

Divergente Folgen, die nicht bestimmt divergent sind, nennen wir *unbestimmt divergent*.

Beispiele

1. $a_n = (-1)^n$ divergent: $a_{2n} \to 1, \quad a_{2n+1} \to -1$
2. $a_n = (1 + (-1)^n)n$
   $a_{2n} = 2n$ bestimmt divergent gegen $+\infty$
   $a_{2n+1} = 0$ konvergiert gegen 0.

3. $a_n = q^n,\ q < -1$

$$a_{2n} = |q|^{2n} \to +\infty, \quad a_{2n+1} = -|q|^{2n+1} \to -\infty$$

(weil $0 < |q|^{-1} < 1$ und $|q|^{-n} \to 0$)

1.7.5 Häufungswerte von Folgen

Definition Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge, $a \in \mathbb{R}$. Wir nennen a *Häufungswert* (Häufungspunkt), wenn die ε-Umgebung $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ von a zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ unendlich viele Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält.

Beispiele

1. (a_n) konvergent, $a_n \to a \ \Rightarrow a$ ist ein Häufungswert.
2. Tritt ein Folgenglied unendlich oft auf, so ist es ein Häufungswert.
3. Sei (a_n) eine Nummerierung von $\mathbb{Q}$, d.h. $a_n = f(n),\ f:\ \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijektiv. $\Rightarrow$ Alle Punkte $x \in \mathbb{R}$ sind Häufungswerte von f. Jedes Intervall enthält unendlich viele rationale Zahlen.

1.7.6 Lemma

Sei (a_n) Zahlenfolge.
a ist Häufungswert von (a_n). $\iff$ a ist Grenzwert einer Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von (a_n).

Beweis

“$\Rightarrow$” Wir konstruieren (a_{n_k}) induktiv:

$$n_1 := \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in (a-1, a+1)\}$$

Wir nehmen an, n_{k-1} sei gewählt.

$$n_k := \min\left\{n \in \mathbb{N} \mid n > n_{k-1}, a_n \in \left(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}\right)\right\}$$

$\Rightarrow n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ d.h. (a_{n_k}) Teilfolge
$|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$ d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$

“$\Leftarrow$” $a = \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} \Rightarrow$ in einer ε-Umgebung $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ liegen *fast alle* Glieder von (a_{n_k}). $\Rightarrow (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ enthält unendlich viele Glieder der Folge (a_{n_k}), also erst recht von (a_n).

1.7.7 Satz von Bolzano-Weierstrass für Folgen

Jede beschränkte Zahlenfolge besitzt mindestens einen Häufungswert.

Beweis Sei (a_n) eine Zahlenfolge mit der Schranke S $(-S \leqslant a_n \leqslant S$ für alle $n \in \mathbb{N})$.
$X := \{x \in \mathbb{R} \mid a_n > x$ für höchstens endlich viele Indizes von $n\}$

- $X \neq \emptyset$ weil $S \in X$
- X ist nach unten beschränkt, weil $X \cap (-\infty, -S) = \emptyset$. Also ist $-S$ eine untere Schranke.

$\Rightarrow \exists \inf X =: a^* \in \mathbb{R}$
Wir behaupten: a^* ist ein Häufungswert.
$a^* + \varepsilon \in X$ $(a^* + \varepsilon \notin X \Rightarrow \exists$ unendlich viele $a_n > a^* + \varepsilon$
$\Rightarrow (a^*, a^* + \varepsilon) \cap X = \emptyset \Rightarrow a^* \neq \inf X$ — Widerspruch)
$\Rightarrow$ es gibt höchstens endlich viele n mit $a_n > a^* + \varepsilon$.

$$a^* - \varepsilon < a^* = \inf X \Rightarrow a^* - \varepsilon \notin X$$

$\Rightarrow$ es gibt *unendlich viele* n mit $a_n > a^* - \varepsilon$
$\Rightarrow (a^* - \varepsilon, a^* + \varepsilon)$ enthält unendlich viele Glieder a_n. $\Rightarrow a^*$ Häufungswert

1.7.8 Zusatz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Dann besitzt (a_n) einen größten Häufungswert a^* und einen kleinsten Häufungswert a_*

Beweis a^* ist der größte Häufungswert.
Sei $b > a^*$ und sei c mit $b > c > a^*$
$\Rightarrow c \in X$, d.h. es gibt höchstens endlich viele n mit $a_n > c$. Sei $\varepsilon = b - c$. Dann gibt es in der ε-Umgebung von b höchstens endlich viele Glieder $\Rightarrow$ b ist kein Häufungswert.
$a_* = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid a_n < x$ für höchstens endlich viele Indizes $n\}$

1.7.9 Definition

Sei (a_n) beschränkt. Der größte Häufungswert heißt *oberer Grenzwert* oder *Limes Superior* von (a_n), bezeichnet $\lim_{n\to\infty} \sup a_n$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.
Der kleinste Häufungswert heißt *unterer Grenzwert/Limes Inferior*, $\lim_{n\to\infty} \inf a_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.

Beispiel $a_n = (-1)^n: \quad \lim_{n\to\infty} \inf a_n = -1, \quad \lim_{n\to\infty} \sup a_n = +1$

1.7.10 Satz

1. Sei (a_n) beschränkt und (a_{n_k}) eine konvergente Teilfolge. Dann $\lim_{n\to\infty} \inf a_n \leqslant \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup a_n$
2. (a_n) ist konvergent gegen $a \iff \lim_{n\to\infty} \inf a_n = \lim_{n\to\infty} \sup a_n = a$

Beweis

1. klar, weil $\lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ ein Häufungswert ist (Lemma 1.7.6).

2. "$\Rightarrow$" $a_n \to a \Rightarrow$ alle Teilfolgen konvergieren gegen $a \Rightarrow$ alle Häufungswerte sind gleich a. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$

   "$\Leftarrow$" $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n =: a$

   Sei $\varepsilon > 0$. Nach Def. von $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$ folgt, dass höchstens endlich viele Glieder a_n den Ungleichungen $a_n < a - \varepsilon, \quad a_n > a + \varepsilon$ genügen.
   $\Rightarrow$ Fast alle Glieder sind in $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ enthalten. $\Rightarrow (a_n)$ konvergiert gegen a.

1.7.11 Korollar

(a_n) beschränkt und divergent $\iff \lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n < \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$
$\iff$ Es gibt zwei konvergente Teilfolgen, die gegen verschiedene Grenzwerte konvergieren.

Ergänzung zur VL: Mo, 2002-12-16

Damit haben wir die Struktur beschränkter divergenter Folgen geklärt. Dies sind unbestimmt divergente Folgen. Wir befassen uns nun mit allgemeinen unbestimmt divergenten Folgen. Es ist zweckmäßig, uneigentliche Suprema, Infima und Häufungswerte einzuführen.

1.7.12 Definition

Eine Menge $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ heißt *erweitertes System der reellen Zahlen.* (Bemerkung: $+\infty, -\infty$ sind keine reellen Zahlen!)

Wir setzen die Ordnungsrelation von $\mathbb{R}$ auf $\overline{\mathbb{R}}$ fort, indem wir $-\infty < x < +\infty$ definieren, $x \in \mathbb{R}$ und auch $-\infty < +\infty$.

Umgebungen von $+\infty$ bzw. $-\infty$ sind alle Mengen $(c, +\infty)$ bzw. $(-\infty, c)$ und deren Obermengen.

1.7.13 Definition

Sei $A \subset \mathbb{R}$ beliebig. Wir definieren $\sup A \in \overline{\mathbb{R}}$ die kleinste obere Schranke von A und $\inf A \in \overline{\mathbb{R}}$ die größte untere Schranke von A. Wenn A nach oben beschränkt ist, stimmt die Definition mit der alten Def. überein (selbiges für $\inf A$). Wenn A nicht nach oben (bzw. unten) beschränkt ist, erhalten wir $\sup A = +\infty$ bzw. $\inf A = -\infty$.

Auch die Charakterisierung von $\sup A$ und $\inf A$ bleibt unverändert:

- $S = \sup A$ gdw.
  - S ist obere Schranke und
  - $\forall b < S\ \exists a \in A$ mit $b < a \leqslant S$
- $I = \inf A$ gdw.
  - I ist untere Schranke und

- $\forall b > I \; \exists a \in A$ mit $b > a \geqslant I$

Wir können nun Folgen (a_n) mit $a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ betrachten. In Übereinstimmung mit früheren Definitionen setzen wir:

1.7.14 Definition

Ein Element $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist Grenzwert der Folge (a_n), wenn jede Umgebung von a fast alle Folgenglieder enthält. Man schreibt $a_n \to a$.

Beispiele: Die bestimmt divergenten Folgen sind ein Spezialfall. Die Definition lässt auch Folgen wie $(+\infty, +\infty, \ldots)$ zu.

Bemerkung: Eine Folge (a_n), $a_n \in \mathbb{R}$ ist genau dann unbestimmt divergent, wenn (a_n) keinen Grenzwert in $\overline{\mathbb{R}}$ hat.

1.7.15 Definition

Ein Element $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ist Häufungswert der Folge (a_n), wenn jede Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder enthält.

1.7.16 Satz (Bolzano-Weierstrass in $\overline{\mathbb{R}}$)

Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann besitzt (a_n) einen größten Häufungswert $\limsup a_n \in \overline{\mathbb{R}}$ und einen kleinsten Häufungswert $\liminf a_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

Beweis:

Wir definieren

$$\limsup a_n := \inf\{x \in \overline{\mathbb{R}} : a_n > x \text{ für höchstens endlich viele } n\}$$

$$\liminf a_n := \sup\{x \in \overline{\mathbb{R}} : a_n < x \text{ für höchstens endlich viele } n\}$$

und wiederholen den Beweis für beschränkte Folgen:

Sei $X = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a_n > x$ für höchstens endlich viele $n\}$. X ist nicht leer, weil $+\infty \in X$. ($\{n \in \mathbb{N} : a_n > +\infty\} = \emptyset$)

Sei $a^* := \inf X$. a^* ist Häufungswert:

Wenn $a^* = -\infty$ sei $b > a^*$. Laut Definition $b \in X$ und $\{n \in \mathbb{N} : a_n > b\}$ endlich. $\Rightarrow a_n \leqslant b$ für fast alle n; b ist beliebig und $(-\infty, b]$ sind Umgebungen von $-\infty \Rightarrow a^*$ ist Häufungswert.

Wenn $a^* = +\infty$ sei $c < a^*$ Laut Definition $c \notin X \Rightarrow \; \exists$ unendlich viele $a_n > c$ d.h. $a_n \in (c, +\infty) \Rightarrow a^*$ ist Häufungswert.

Der Fall $a^* \in \mathbb{R}$ ist bereits in B-W für $\mathbb{R}$ bewiesen. Dass a^* der größte Häufungswert ist, beweist man wie vorher.

Entsprechend für $\liminf a_n$. $\square$

1.7.17 Satz

Es sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n \in \overline{\mathbb{R}}$. Sei (a_{n_k}) eine Folge mit Grenzwert. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n \leqslant \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leqslant \lim_{n\to\infty} \sup a_n$$

Es gilt $\lim a_n = a$ genau dann, wenn

$$\liminf a_n = \limsup a_n = a$$

1.7.18 Satz

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbestimmt divergent gdw.

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n < \lim_{n\to\infty} \sup a_n \qquad \text{(die können Elemente von } \overline{\mathbb{R}} \text{ sein!)}$$

$\iff$ es gibt zwei Teilfolgen mit verschiedenen Grenzwerten in $\overline{\mathbb{R}}$.
Die Beweise sind fast identisch. Wir ersetzen aber $a^* - \varepsilon$, $a^* + \varepsilon$ durch $c < a^*$ und $b > a^*$, damit wir Ausdrücke wie $\infty - \varepsilon$, $\infty + \varepsilon$ vermeiden.

VL: Do, 2002-12-19

1.7.19 Bemerkung

Die Betrachtungen über Häufungswerte für beschränkte Folgen können wir auf unbeschränkte Folgen übertragen.

1.8 Häufungspunkte einer Menge

1.8.1 Definition

Sei $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ (muss nicht zu A gehören).
a heißt *Häufungspunkt* der Menge A, wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Elemente von A liegen.

Redeweise: $a \in \mathbb{R} \quad \varepsilon > 0$

- ε-Umgebung: $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
- Umgebung: Eine Menge, die eine ε-Umgebung enthält.
  $\Rightarrow U \subset \mathbb{R}$ heißt *Umgebung von a*, wenn $\exists \varepsilon > 0$ mit $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset U$.

Bemerkung: Für Folgen hat man *Häufungswerte*, weil Folgen Abbildungen $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sind. ($\mathbb{R} =$ *Werte*menge)

$$\Big\{ \text{ Häufungspunkte der Menge } \{a_n : n \in \mathbb{N}\}\Big\}$$
$$\neq$$
$$\Big\{ \text{ Häufungswerte der Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}}\Big\}$$

Beispiel: $a_n = (-1)^n$ Häufungswerte $= \{-1, 1\}$
ABER: $\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$ und hat keine Häufungspunkte!

Man bezeichnet die Menge der Häufungspunkte von A mit $H(A)$.

Beispiele:

1. $A = (0, 1)$ $\quad H(A) = [0,1]$
2. $A = \mathbb{Q}$ $\quad H(A) = \mathbb{R}$ (da jedes Intervall unendlich viele rationale Zahlen enthält)
3. $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ $\quad H(A) = \{0\}$
4. Endliche Mengen besitzen keinen Häufungspunkt.

1.8.2 Lemma

$A \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

$$a \in H(A) \iff \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, a_n \in A \setminus \{a\}, \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Wir konstruieren (a_n):

$$a_1 \in \underbrace{(a-1, a+1) \cap A}_{\text{unendl.}} \qquad a_1 \neq a$$

$$a_n \in \underbrace{\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right) \cap A}_{\text{unendl.}} \qquad a_n \neq a$$

$\Rightarrow a_n \in A \setminus \{a\}$ und $|a_n - a| < \frac{1}{n} \iff \lim a_n = a$

„$\Leftarrow$“ Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \neq a$ und $a_n \in A$, außerdem $a = \lim a_n$. $\Rightarrow$ $\exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Teilfolge von (a_n) mit $a_{n_k} \to a$ und $a_{n_k} \neq a_{n_l}$ mit $k \neq l$, außerdem $a_{n_1} = a_1$.

$\varepsilon = |a_{n_1} - a| > 0 \Rightarrow \exists n_2 : |a_{n_2} - a| < \varepsilon = |a_{n_1} - a| \Rightarrow a_{n_2} \neq a_{n_1}$ Wir setzen das Verfahren induktiv fort.
Wir erhalten eine konvergente Teilfolge $a_{n_k} \to a, k \to \infty$.
Sei U Umgebung von $a \Rightarrow U$ enhält fast alle, also unendlich viele $a_{n_k} \in A$.
$\Rightarrow U$ enthält unendlich viele Elemente aus A!

Bemerkung: Das Lemma zeigt, dass $a \in H(A) \iff a$ Häufungswert einer Folge aus $A \setminus \{a\}$.

1.8.3 Satz von Bolzano-Weierstrass (für Mengen)

Jede beschränkte und unendliche Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis Wir wählen induktiv $(a_n)_n$, $a_n \in A$, $a_n \neq a_m$ für $m \neq n$.

A a_1 willkürlich. $a_2 \in \underbrace{A \setminus \{a_1\}}_{\neq \emptyset}$

S $a_1, \dots, a_{n-1}$ gewählt, $a_n \in \underbrace{A \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}}_{\neq \emptyset}$

Damit ist (a_n) beschränkt und nach dem Satz von B.-W. für Folgen hat (a_n) eine konvergente Teilfolge

$$a_{n_k} \to a \in \mathbb{R} \qquad k \to \infty$$

$$\Rightarrow a \in H(A)$$

.

Jede Umgebung von a enthält unendlich viele Glieder von (a_{n_k}) und wegen $a_{n_k} \neq a_{n_l}$ für $l \neq k$ auch unendlich viele Elemente von A.

1.8.4 Definition

Ein Punkt $a \in A \subset \mathbb{R}$ $(A \neq \emptyset)$ heißt isolierter Punkt, wenn ein $\varepsilon > 0$ mit $A \cap (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{a\}$ existiert.

Bemerkung: a ist isoliert $\iff$ $a \notin H(A)$ (also Zerlegung von A in isolierte Punkte und Häufungspunkte).

1.8.5 Satz

$H\big(H(A)\big) \subset H(A)$

Beweis: $a \in H\big(H(A)\big) \overset{1.8.2}{\iff} \exists (a'_n)$ mit $a'_n \in H(A)$, $a'_n \neq a = \lim a'_n$

$a'_n \in H(A) \Rightarrow \exists a_n \in A \setminus \{a\}$ mit

$$a_n \in \underbrace{\left(a'_n - \frac{1}{n}, a'_n + \frac{1}{n}\right) \cap A}_{\text{unendl. Menge}}$$

$a'_n \to a$ und $|a'_n - a_n| < \frac{1}{n}$, also $a_n \to a$.
$a_n \in A \setminus \{a\} \Rightarrow a \in H(A)$. $\square$

1.8.6 Definition

- $B \subset \mathbb{R}$ heißt *abgeschlossen*, wenn $H(B) \subset B$.
- B heißt *offen*, wenn $\mathbb{R} \setminus B$ abgeschlossen.
- B ist *perfekt*, wenn $H(B) = B$.
- Ein Punkt $b \in B$ heißt *innerer Punkt*, wenn es eine Umgebung U von b mit $U \subset B$ gibt.

Beispiele:

1. $[a, b]$ ist abgeschlossen und perfekt
2. $[a, b] \cup \{b + 1\}$ ist abgeschlossen und nicht perfekt
3. $(a, b) := \mathbb{R} \setminus \big((-\infty, a] \cup [b, +\infty)\big)$ ist offen
4. (a, b), $\mathbb{R}$ und $\emptyset$ sind offen

1.8.7 Satz

B ist offen $\iff$ alle Punkte $b \in B$ innere Punkte sind.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Sei $b \in B$ (B offen.) Angenommen, b wäre kein innerer Punkt.

$$\Rightarrow \forall n : \left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) \not\subset B$$

$$\Rightarrow \left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) \cap (\mathbb{R} \setminus B) \neq \emptyset$$

Sei $a_n \in \left(b - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right) \cap (\mathbb{R} \setminus B)$. $|a_n - b| < \frac{1}{n}$, $a_n \neq b$, also $\lim a_n = b$, also $b \in H(\mathbb{R} \setminus B)$.

B offen $\Rightarrow \mathbb{R}\setminus B$ abgeschlossen $\Rightarrow H(\mathbb{R}\setminus B) \subset \mathbb{R}\setminus B \Rightarrow b \in \mathbb{R}\setminus B$. Widerspruch!

„$\Leftarrow$" Wir zeigen, dass $\mathbb{R} \setminus B$ abgeschlossen ist: Sei a ein Häufungspunkt von $\mathbb{R} \setminus B$. Z.z: $a \in \mathbb{R} \setminus B$. Wir nehmen an, dass $a \notin \mathbb{R} \setminus B$, d.h. $a \in B$.

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset B$ (da a innerer Punkt)

Aber: $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ enthält unendlich viele Elemente aus $\mathbb{R} \setminus B$, weil $a \in H(\mathbb{R} \setminus B)$. Wid.!

1.8.8 Cantormenge (Cantorsches Diskontiunuum)

Wir konstruieren induktiv eine Menge $C \subset [0, 1]$ folgendermaßen:

0. Schritt: Entferne aus $[0, 1]$ das mittlere Drittel $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) =: I_{0,1}$.

$$K_{0,1} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \qquad K_{0,2} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

1. Schritt: Entferne aus $[0, \frac{1}{3}]$ und $[\frac{2}{3}, 1]$ das mittlere Drittel.

2. Schritt: Entferne aus $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$, $[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}]$ und $[\frac{8}{9}, 1]$ das mittlere Drittel.

n. Schritt: $\checkmark$

n+1. Schritt: Wir haben die Intervalle (m Drittel) $I_{m,i}$ ($0 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant 2^m$) entfernt.

$$\text{Sei } [0,1] \setminus \bigcup_{m=0}^{n} \bigcup_{j=1}^{2^m} I_{m,j} = \bigcup_{j=1}^{2^{n+1}} K_{n,j}$$

mit $K_{n,j}$ disjunkte, abgeschl. Intervalle der Länge $\frac{1}{3^{n+1}}$. Jetzt entfernt man das mittlere Drittel aus jedem $K_{n,j}$.

$$\text{Sei } C := \bigcap_{n \geqslant 0} \bigcup_{j=1}^{2^{n+1}} K_{n,j} = [0{,}1] \setminus \bigcup_{m \geqslant 0} \bigcup_{j=1}^{2^m} I_{m,j}$$

1.8.9 Satz

C ist eine perfekte, überabzählbare Menge ohne innere Punkte (der Länge 0).

Warum überabzählbar?

$C = \big\{x \in [0,1]; x = 0{,}x_1x_2x_3\dots x_n\dots, x_i \in \{0,2\}\big\}$ (triad. Entwicklung: $x = \sum_{i \geqslant 1} \frac{x_i}{3^i}$ mit $x_i \in \{0,1,2\}$).

$x = 0{,}1\dots$ beim 0. Schritt entfernt. $x = 0{,}01\dots$ beim 1. Schritt entfernt.

$C \ni x \mapsto \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ eine Folge mit Elementen $\{0,2\}$

$\big\{\phi : \mathbb{N} \to \{0,2\}\big\} = \{0,2\}^{\mathbb{N}} \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Bei $x \in [0,1]$ hat man diadische Entwicklung $\Rightarrow [0{,}1] \sim \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

$$x = \sum \frac{x_i}{2^i}$$

VL: Mo, 2003-01-06

1.8.10 Satz

$\mathbb{R}$ ist durch die Axiomengruppen (I),(II),(III) bis auf ordnungserhaltende Isomorphismen eindeutig bestimmt. D.h. ist $\mathbb{K}$ ein zweiter Körper, der (I),(II),(III) erfüllt, so gibt es eine bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ mit:

1. ϕ ist ein Körperisomorphismus.
2. ϕ ist ordnungserhaltend, d.h. $x_1 < x_2 \Rightarrow \phi(x_1) < \phi(x_2)$
3. Ist $A \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, so auch $\phi(A)$ und $\sup(A) = \phi(\sup A)$.

Beweis Definiere $\phi(1) := 1_{\mathbb{K}} \Rightarrow \phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}(\mathbb{K})$ erweitert sich durch Induktion $\phi(n+1) := \phi(n) + 1$

Durch die entsprechenden Äquivalenzrelationen erhalten wir Erweiterungen von $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}(\mathbb{K})$ und $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}(\mathbb{K})$. so dass ϕ auf $\mathbb{Q}$ ein ordnungserhaltender Körperisomorphismus wird (!).

Schließlich setzen wir ϕ auf $\mathbb{R}$ fort: zu $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ wähle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$ mit $x_n < x_{n+1} < x$ und $\lim\limits_{n \to \infty} = x$. Dann setzen wir $\phi(x) := \sup\limits_n \phi(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \phi(x_n)$ Man prüft nach (!), dass alle Behauptungen erfüllt sind.

Kapitel 2

Metrische Räume

2.1 Grundbegriffe

Zur Erinnerung: es sei X eine beliebige Menge.

2.1.1 Definition

Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ heißt *Metrik auf* X, wenn gilt:

1. $d(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$
2. $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$
3. $d(x_1, x_2) \leqslant d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$

Beispiele etc.

1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x_1, x_2) \mapsto |x_1 - x_2| \in \mathbb{R}_+$ ist eine Metrik.
2. Analog für $\mathbb{C}$:

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = \mathrm{Re}(z_1 - z_2)^2 + \mathrm{Im}(z_1 - z_2)^2$$

3. Sind (X_1, d_1), (X_2, d_2) metrische Räume, so ist auch $(X_1 \times X_2, d_1 \times d_2)$ ein metrischer Raum, wenn $d_1 \times d_2((x_1, x_2), (x_1', x_2')) = d_1(x_1, x_1') + d_2(x_2, x_2')$
4. Auf $\mathbb{R}^m \ni x = (x_1, \ldots, x_m)$ können wir viele Metriken definieren, z.B.

$$\begin{aligned}\text{(die Produktmetrik) } d(x, x') &= |x_1 - x_1'| + |x_2 - x_2'| + \ldots + |x_m - x_m'| \\ &= \sum_{i=1}^{m} |x_i - x_i'|\end{aligned}$$

Dann ist für $x'' \in \mathbb{R}$

$$d(x, x') \leqslant \sum_{i=1}^{m} (|x_i - x_i''| + |x_i'' - x_i'|) = d(x, x'') + d(x'', x')$$

Wir können aber auch setzen

$$d_\infty(x,x') := \max_{1\leqslant i\leqslant m} |x_i - x_i'|,$$

$$d_p(x,x') := \left(\sum_{i=1}^m |x_i - x_i'|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \mathbb{Q} \ni p \geqslant 1$$

Sind das auch Metriken?

$$(\infty) \quad d_\infty(x,x') = \max_i |x_i - x_i'| = |x_{i_0} - x_{i_0}'| \leqslant |x_{i_0} - x_{i_0}''| + |x_{i_0}'' - x_{i_0}'|$$
$$\leqslant \max_i |x_i - x_i''| + \max_i |x_i'' - x_i'| = d_\infty(x,x'') + d_\infty(x'',x')$$

Exkurs

2.1.2 Hilfssatz (Höldersche Ungleichung)

Es seien $a_i, b_i \in \mathbb{R}_+, 1 \leqslant i \leqslant n$ und $\mathbb{Q} \ni p > 1$ und $p' \in \mathbb{Q}$ so, dass

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \iff p' = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1} > 1$$

[p und p' heißen *zueinander konjugiert.*]
Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

Bemerkung: $p = 2 = p' \Rightarrow$ Cauchy-Schwarz-Ungleichung
Zum Beweis benötigen wir

2.1.3 Hilfssatz

Für $a, b \in \mathbb{R}_+$ gilt $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$

Dies ist ein Spezialfall von

2.1.4 Hilfssatz (Die verallgemeinerte AG-Ungleichung)

Es seien $a_i \in \mathbb{R}_+$ und $\varepsilon_i \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ mit $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n = 1$. Dann gilt

$$a_1^{\varepsilon_1} \cdots a_n^{\varepsilon_n} \leqslant \varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n$$

Beweis später!

2.1.5 Folgerung

AG-Ungleichung

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \ldots a_n}{n}$$
$$a_1^{\frac{1}{n}} a_2^{\frac{1}{n}} \cdots a_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n} a_1 + \ldots \frac{1}{n} a_n$$

Beweis von 2.1.3

$$ab = (a^p)^{\frac{1}{p}} (b^{p'})^{\frac{1}{p'}} \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$$

Beweis von 2.1.2

$$\text{oBdA.}\ \underbrace{\left(\sum |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}_{=:\|a\|_p} > 0, \quad \underbrace{\left(\sum |b_i|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}}_{=:\|b\|_{p'}} > 0$$

denn sonst ist die Ungleichung trivial. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\|a\|_p} \frac{b_i}{\|b\|_{p'}} &\overset{2\,1\,3}{\leqslant} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p} \frac{a_i^p}{\|a\|_p^p} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{p'} \frac{b_i^{p'}}{\|b\|_{p'}^{p'}} = \frac{1}{p} \frac{1}{\|a\|_p^p} \sum a_i^p + \frac{1}{p'} \frac{1}{\|b\|_{p'}^{p'}} \sum b_i^{p'} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1
\end{aligned}$$

Nun können wir zeigen:

2.1.6 Hilfssatz (Minkowski-Ungleichung)

Für $a, b \in \mathbb{R}^m$ gilt: $\|a+b\|_p \leqslant \|a\|_p + \|b\|_p$

Beweis Wir schreiben

$$\|a+b\|_p = \left(\sum_{i=1}^m |a_i+b_i|^{p-1}|a_i+b_i|\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^m \left(|a_i+b_i|^{p-1}|a_i| + |a_i+b_i|^{p-1}|b_i|\right)\right)^{\frac{1}{p}}$$

oder

$$\|a+b\|_p^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^m |a_i+b_i|^{(p-1)p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left[\left(\sum_{i=1}^m |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^m |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

aber $(p-1)p' = p$, $\frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p} \Rightarrow \left(\sum\limits_{i=1}^m |a_i+b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|a\|_p + \|b\|_p$ □

Also sind d_∞ und d_p Metriken auf $\mathbb{R}^n$.

5. Jede Teilmenge eines metrischen Raumes ist ein metrischer Raum mit der induzierten Metrik.

6. Jede Menge ist ein metrischer Raum mit der diskreten Metrik

$$d(x,x') = \begin{cases} 0, & x = x', \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Fundamentaler “Nachbarschaftsbegriff”

2.1.7 Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Die Menge $B_\varepsilon(x) := \{x' \in X;\ d(x, x') < \varepsilon\}$ heißt die *metrische Kugel* um x vom Radius ε;
$S_\varepsilon(x) := \{x' \in X;\ d(x, x') = \varepsilon\}$ heißt die *metrische Sphäre*.

VL: Do, 2003-01-09

Vektorraum über $\mathbb{K}$

V: Menge mit der Verknüpfung „+“ (abelsche Gruppe).

$$\mathbb{K} \times V \ni (\lambda, v) \mapsto \lambda v \in V$$

$$\begin{aligned} \text{sodass} \quad \lambda(v_1 + v_2) &= \lambda v_1 + \lambda v_2 \\ \lambda(\mu \cdot v) &= (\lambda\mu)v \\ &= (\mu\lambda)v \end{aligned}$$

Ein System $(v_\alpha)_{\alpha \in A} \subset V$ heißt *linear unabhängig*, wenn aus

$$\sum_{\substack{\alpha \in A \\ a_\alpha \neq 0 \text{ nur} \\ \text{für end. viele } a_\alpha}} a_\alpha v_\alpha = 0 \qquad \text{folgt} \qquad \forall \alpha : a_\alpha = 0$$

$$\begin{aligned} \text{z.B.: Aus} \quad \sum_{i=1}^{N} a_i v_i = 0, a_1 \neq 0 \quad \text{folgt:} \\ a_1 v_1 &= -\sum_{i=2}^{N} a_i v_i \\ v_1 &= -\sum_{i \geqslant 2} a_1^{-1} a_i v_i \end{aligned}$$

Ein System heißt *Erzeugendensystem*, wenn jedes $v \in V$ als endliche Linearkombination darstellbar ist.

$$\text{Beispiel in } \mathbb{R}^n: \ \text{sei } e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{\text{Stelle } i}, 0, \ldots, 0)$$

Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt *Basis*. (z.B. $(e_i)_{i=1}^m$ in $\mathbb{R}^m$)

Beispiel $\mathbb{R}[x]$: Das ist ein VR über $\mathbb{R}$ mit der Basis $(x^i)_{i \in \mathbb{Z}_+}$.

Die Kardinalzahl $\#A$ einer Basis $(v_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist unabhängig von der Wahl von A und heißt *Dimension von* V: $\dim V$. (d.h. $\dim \mathbb{R}^m = m$, $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$)

Zurück zu den Metriken:

Auf $\mathbb{R}^n$: $d_p(x, y) := (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, $\mathbb{Q} \ni p \geqslant 1$

2.1.8 Definition

Sei V ein VR über $\mathbb{K}$ (bspw. $= \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung

$$V \ni v \mapsto \|v\| \in \mathbb{R}_+$$

mit

1. $\|v\| = 0 \iff v = 0$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, v \in V$
3. $\|v_1 + v_2\| \leqslant \|v_1\| + \|v_2\| \qquad \forall v_1, v_2 \in V$

Dann heißt das Paar $(V, \|\cdot\|)$ ein *normierter* Vektorraum.

2.1.9 Hilfssatz

Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, so ist

$$d(x,y) := \|x - y\|$$

eine Metrik auf V.

Beweis: klar. (Übung)

Beispiel: Auf $\mathbb{R}^m$ definieren wir Normen durch

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

2.1.10 Definition

Zwei Metriken d_1, d_2 auf X heißen *äquivalent*, wenn

$$\exists C > 0 : C^{-1} d_2(x,y) \leqslant d_1(x,y) \leqslant C d_2(x,y)$$

z.B.: Auf $\mathbb{R}^m$ betrachten wir d_p und $d_\infty(x,y) = \sup\limits_i |x_i - y_i|$. Dann gilt

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^m |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^m d_\infty(x,y)^p \right)^{\frac{1}{p}} = m^{\frac{1}{p}} d_\infty(x,y)$$

$$d_\infty(x,y) = \sup_i |x_i - y_i| = |x_{i_0} - y_{i_0}| = (|x_{i_0} - y_{i_0}|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^m |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = d_p(x,y)$$

Erinnerung: $B_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$

Betrachte eine beliebige Menge $A \subset X$ und ein beliebiges $x \in X$. Dann ergibt sich folgende Zerlegung von X:

1. Fall: $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$ (Symbol: $\overset{\circ}{A}$)

2. Fall: $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset \mathcal{C}_X A$ (Symbol: $\overset{\circ}{\mathcal{C}_X} A$)

3. Fall: $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \wedge B_\varepsilon(x) \cap \mathcal{C}_X A \neq \emptyset$ (Symbol: $\mathfrak{d}A = \mathfrak{d}\mathcal{C}_X A$)

3.1. Fall: $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A = \{x\}$ (Symbol: A^i)

3.2. Fall: $\forall \varepsilon > 0 : \dot{B}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset \wedge \dot{B}_\varepsilon(x) \cap \mathcal{C}_X A \neq \emptyset$ (Symbol: A') mit $\dot{B}_\varepsilon(x) := B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$

2.1.11 Definition

Sei X metrischer Raum, $A \subset X$.
$x \in X$ heißt

innerer Punkt von A gdw. $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset A$

Randpunkt von A gdw. $\forall \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$ und $B_\varepsilon(x) \cap \mathcal{C}_X A \neq \emptyset$

isolierter Punkt von A gdw. $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \cap A = \{x\}$

Häufungspunkt von A gdw. $\forall \varepsilon > 0 : \dot{B}_\varepsilon(x) \cap A \neq \emptyset$

2.1.12 Hilfssatz

1. $X = \overset{\circ}{A} \,\dot{\cup}\, \mathfrak{d}A \,\dot{\cup}\, \overset{\circ}{\mathcal{C}_X} A$ mit paarweise disjunkten Teilmengen
2. $\mathfrak{d}A = A^i \,\dot{\cup} (A' \cap \mathfrak{d}A)$
3. $A' = \overset{\circ}{A} \,\dot{\cup} (A' \cap \mathfrak{d}A)$

Beispiele:

1. Sei $A = B_1(0) \subset \mathbb{R}^m$. Dann gilt:
   - $A = \overset{\circ}{A}$
   - $\mathfrak{d}A = S^{m-1} := \{x \in \mathbb{R}^m \mid |x| = 1\}$
   - $A^i = \emptyset$
   - $A' = B_1(0) \cup S^{m-1}$
2. Sei $A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Dann gilt:
   - $\overset{\circ}{A} = \emptyset$
   - $\overset{\circ}{\mathcal{C}_{\mathbb{R}}} A = \emptyset$
   - $\mathfrak{d}A = \mathbb{R} = A' \cap \mathfrak{d}A$
   - $A^i = \emptyset$
   - $A' = \mathbb{R}$

2.1.13 Definition

Eine Menge A heißt

offen gdw. $A = \overset{\circ}{A}$.

abgeschlossen gdw. $\mathcal{C}_X A$ offen.

Bemerkung:

X ist offen $\Rightarrow \mathcal{C}_X X = \emptyset$ ist abgeschlossen. Aber die leere Menge ist auch offen $\Rightarrow X$ ist abgeschlossen.

2.1.14 Definition

Der *Abschluss* $\overline{A}$ von A ist die kleinste abgeschlossene Menge, die A enthält:

$$\overline{A} := \bigcap_{\substack{A \subset B \subset X \\ B \text{ abg.}}} B$$

$\overline{A}$ ist abgeschlossen, denn:

2.1.15 Hilfssatz

1. Eine beliebige Vereinigung und ein endlicher Durchschnitt offener Mengen sind offen.

2. Eine endliche Vereinigung und ein beliebiger Durchschnitt abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Beweis: Übung.

2.1.16 Hilfssatz

1. A ist abgeschlossen gdw. $A' \subset A$

2. Im allg. gilt $\overline{A} = A \cup A'$

Beweis:

1.

$$\begin{aligned} & A \text{ abgeschlossen} \\ \Longleftrightarrow\ & \mathcal{C}_X A \text{ offen} \\ \Longleftrightarrow\ & \partial A \subset A \\ \Longleftrightarrow\ & A' \subset A \end{aligned}$$

2. Übung.

2.1.17 Definition

Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

konvergent gegen x gdw. $\forall\varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geqslant n(\varepsilon) : d(x_n, x) < \varepsilon$

Cauchy-Folge gdw. $\forall\varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m \geqslant n(\varepsilon) : d(x_n, x_m) < \varepsilon$

2.1.18 Hilfssatz

1. Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.
2. Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge.

Beweis:

1. Vor.: $x_n \to x, x_n \to y, x \neq y \iff d(x, y) =: \varepsilon_0 > 0$
   Wähle $n \geqslant n\left(\frac{\varepsilon_o}{3}\right)$ für x und y.
$$\begin{aligned}\Rightarrow \varepsilon_0 &= d(x, y)\\ &\leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y)\\ &< \frac{\varepsilon_0}{3} + \frac{\varepsilon_0}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon_0 \qquad \text{— Wid!}\end{aligned}$$
2. $d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x, x_m) < 2\varepsilon$ für $n, m \geqslant n(\varepsilon)$

$\square$

$X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist metrischer Raum, da $X \subset \mathbb{R}$. Aber: $x_n = \frac{1}{n}$ definiert eine CF, die nicht konvergiert!

2.1.19 Definition

Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge (CF) konvergiert.

VL: Mo, 2003-01-13

2.1.20 Definition

1. Eine Menge A heißt *dicht* in X, falls $\overline{A} = X$.
2. Eine Menge A heißt *nirgends dicht*, falls, $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$, d.h. falls der Abschluss keine inneren Punkte hat.

Beispiele

1. $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, denn $\overline{\mathbb{Q}} = \overset{\circ}{\mathbb{Q}} \cup \mathbb{Q}^i \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}' = \partial\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$
   Jedes $x \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$.
2. S^1 ist nirgends dicht, denn $S^1 = \partial B_1^{\mathbb{R}^2}(0) = \overline{S^1}$, hat aber keine inneren Punkte (!).

2.1.21 Definition

Eine Teilmenge A von X heißt von *der ersten Kategorie*, wenn A abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen ist.

Andernfalls heißt A von *der zweiten Kategorie.*

Bemerkung: $\mathbb{Q}$ ist von der ersten Kategorie, denn $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}} \{r\}$

2.1.22 Satz (Bairescher Kategoriensatz)

Ein vollständiger metrischer Raum ist von der zweiten Kategorie.

Beweis a) X ist vollständig $\iff$ Jede Cauchy-Folge konvergiert.

b) Annahme: X ist von der 1. Kategorie, d.h. $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ mit A_i nirgends dicht, d.h. $\overset{\circ}{\overline{A_i}} = \emptyset$.

Bemerkung A nirgends dicht $\iff$ $\mathcal{C}_X A$ dicht in X:

$X = \overset{\circ}{A} \cup \mathfrak{d}A \cup \overset{\circ}{\mathcal{C}_X A} = \mathfrak{d}A \cup \overset{\circ}{\mathcal{C}_X A} = \mathfrak{d}\mathcal{C}_X A \cup \overset{\circ}{\mathcal{C}_X A} = \overline{\mathcal{C}_X A}$

1. Schritt Da A_1 nirgends dicht ist, ist $\mathcal{C}_X\overline{A_1}$ dicht in X, insbesondere gibt es $x_1 \in \mathcal{C}_X\overline{A_1}$ und $\varepsilon_1 > 0$ mit $B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap \overline{A_1} = \emptyset$.

2. Schritt Wir nehmen an, dass wir für ein $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $(x_i)_{i=1}^n \subset X$ und $(\varepsilon_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{R}_+^*$ konstruiert haben so, dass

(1) $B_{\varepsilon_{i+1}}(x_{i+1}) \subset B_{\varepsilon_i}(x_i)$ für $1 \leqslant i \leqslant n-1$

(2) $B_{\varepsilon_i}(x_i) \cap \bigcup\limits_{j=1}^{i} \overline{A_j} = \emptyset$

Betrachte A_{n+1}; $\mathcal{C}_X\overline{A_{n+1}}$ ist dicht in X, also ist $\mathcal{C}_X\overline{A_{n+1}} \cap B_{\varepsilon_n}(x_n) \neq \emptyset$ und offen.

$$\Rightarrow \exists x_{n+1} \in X, \varepsilon_{n+1} > 0 : \ B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset \mathcal{C}_X\overline{A_{n+1}} \cap B_{\varepsilon_n}(x_n)$$

Dann gilt (1) nach Konstruktion, und $B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n+1} \overline{A_i} = \emptyset$,

weil $B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i} \subset B_{\varepsilon_n}(x_n) \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \emptyset$ n.V.

und $B_{\varepsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \cap \overline{A_{n+1}} = \emptyset$ nach Konstruktion

2.2 Der Fixpunktsatz von Banach

Erinnerung: Konvergenzprobleme bei rekursiv definierten Folgen:

(1) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}), \quad x_1 > 0$

(2) $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}, \quad x_1 \geqslant 1$

Wenn (x_n) konvergiert gegen x, dann $x = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$ bzw. $x = \sqrt{1+x}$

Konvergenz: zeige Beschränktheit *und* Monotonie
Alternative: Setze $f_1(x) := \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x}),\ x > 0, \quad f_2(x) := \sqrt{1+x},\ x > 0$; dann ist $f(x_n) = x_{n+1}$ und der Grenzwert genügt der Gleichung $f_j(x) = x$

2.2.1 Definition

Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $f: X \to X$ eine Abbildung. Ein Punkt $x \in X$ heißt *Fixpunkt von f* $\iff f(x) = x$

Beispiel: $f = \mathrm{id}_X \iff$ jedes $x \in X$ ist Fixpunkt

$$|f_2(x) - f_2(y)| = \left| \frac{y-x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}} \right| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$$

2.2.2 Definition

$f: X \to X$ heißt *Kontraktion*, falls es eine Konstante $C \in [0,1)$ gibt mit $d(f(x), f(y)) \leqslant C d(x, y)$.

Bemerkung: Für $f = \mathrm{id}_X$ gilt $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ und alle Punkte sind Fixpunkte.

2.2.3 Satz (Banachs Fixpunktsatz)

Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f: X \to X$ eine Kontraktion. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt in X.

Beweis

1) Eindeutigkeit:
Es seien x_1, x_2 Fixpunkte von f
$\Rightarrow d(x_1, x_2) = d(f(x_1), f(x_2)) \leqslant C d(x_1, x_2)$
$\Rightarrow \underbrace{(1-C)}_{>0} d(x_1, x_2) \leqslant 0 \Rightarrow d(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

2) Existenz: Wähle $x_0 \in X$ beliebig und setze $x_{n+1} := f(x_n),\ n \in \mathbb{Z}_+$.
z.z. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge. Wähle $n, k \in \mathbb{N}$, dann müssen wir abschätzen

$$d(x_{n+k}, x_n) \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+k} d(x_i, x_{i-1}) \quad \text{Dreiecksungleichung}$$

Als nächstes abzuschätzen

$$\begin{aligned} d(x_i, x_{i-1}) &= d(f(x_{i-1}), f(x_{i-2})) \leqslant C d(x_{i-1}, x_{i-2}) = C d(f(x_{i-2}), f(x_{i-3})) \\ &\leqslant C^2 d(x_{i-2}, x_{i-3}) \overset{\text{Ind.!}}{\leqslant} C^{i-1} d(x_1, x_0) = C^{i-1} d(f(x_0), x_0) \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leqslant \sum_{i=n+1}^{n+k} d(x_i, x_{i-1}) \leqslant \sum_{i=n+1}^{n+k} C^{i-1} d(f(x_0), x_0) = d(f(x_0), x_0) \sum_{i=n}^{n+k-1} C^i \\ &\leqslant d(f(x_0), x_0) \sum_{i=n}^{\infty} C^i = C^n d(f(x_0), x_0) \frac{1}{1-C} \end{aligned}$$

D.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ ist Cauchyfolge!

Weil X vollständig ist, gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =: x \in X$ existiert, und weil f eine Kontraktion ist, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x) \Rightarrow x = f(x)$

Weiter gilt

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{n+k}, x_n) \overset{!}{=} d(x, x_n) \leqslant \frac{d(f(x_0), x_0)}{1-C} C^n,$$

d.h. wir erhalten eine *explizite Fehlerabschätzung*! □

Beispiele von vorher

(2) Was ist X? Wir brauchen
(a) X vollständig, (b) $f_2(x) = \sqrt{1+x} : X \to X$
Versuch $X = [1, \infty)$

Übung: Sei $A \subset X$ abgeschlossen und X vollständig. Dann ist A mit der induzierten Metrik vollständig.

(a) nach Übung, (b) wegen $f(x) \geqslant 1$
f_2 ist Kontraktion mit $C = \frac{1}{2}$.

(1) Was ist X?

$$f_1(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}^2 + \sqrt{\frac{2}{x}}^2\right) \geqslant \sqrt{x}\sqrt{\frac{2}{x}} = \sqrt{2}\ \forall x > 0$$

Also wählen wir $X = [\sqrt{2}, \infty)$.

Kontraktion:

$$f_1(x) - f_1(y) = \frac{1}{2}(x-y) + \frac{y-x}{xy} = \frac{x-y}{2}\left(1 - \frac{2}{xy}\right)$$
$$|f_1(x) - f_1(y)| = \frac{|x-y|}{2}\left|1 - \frac{2}{xy}\right| \leqslant \frac{|x-y|}{2}$$

2.2.4 Definition

Eine Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $d_Y(f(x), f(y)) \leqslant C d_X(x, y)$.

Die Abbildung heißt eine *Isometrie* $\iff d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$

Bemerkungen

1. Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ in X, so auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$ in Y.

2. $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist eine Isometrie.

3. Sei $z \in \mathbb{R}^m$ und $t_z(x) := x + z, \quad x \in \mathbb{R}^m$
   Dann ist $|t_z(x) - t_z(y)| = |x + z - (y + z)| = |x - y|$
   d.h. t_z ist eine Isometrie, insbesondere Lipschitz mit $C = 1$. Aber:
   $$t_z(x) = x = x + z \iff z = 0, \text{ d.h. } t_0 = \mathrm{id}$$
   D.h. für $z \neq 0$ gibt es *keine Fixpunkte.*

VL: Do, 2003-01-16

2.2.5 Satz

Eine Abbildung $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ist eine *Isometrie* genau dann, wenn

$$f(x) = O(x) + x_0 \text{ mit } O \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) =: \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$$

- *linear* ist, d.h. $O(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 O(x_1) + \lambda_2 O(x_2)$ und
- $|O(x)| = |x|$

(Hierbei ist $\mathcal{L}$ die Menge aller linearen Abbildungen. Außerdem ist $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ ein Homomorphismus.)

2.2.6 Definition

Die Abbildungen $O(m) := \{O \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m); |O(x)| = |x|\}$ heißen *orthogonale Abbildungen.*

Bemerkungen:

1. Im $\mathbb{R}^2$ besteht $O(2)$ gerade aus den Drehungen um 0 und den Spiegelungen an einer Geraden durch 0.
2. $O(m)$ ist eine Gruppe unter $\circ$, denn:
   (a) $O_1 \circ O_2$ ist linear, wenn O_1, O_2 linear, denn:
   $$\begin{aligned} O_1 \circ O_2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= O_1\big(O_2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\big) \\ &= O_1\big(\lambda_1 O_2(x_1) + \lambda_2 O_2(x_2)\big) \\ &= \lambda_1 O_1\big(O_2(x_1)\big) + \lambda_2 O_1\big(O_2(x_2)\big) \\ &= \lambda_1 O_1 \circ O_2(x_1) + \lambda_2 O_1 \circ O_2(x_2) \end{aligned}$$
   (b) $|O_1 \circ O_2(x)| = |O_1\big(O_2(x)\big)| = |O_2(x)| = |x|$

   D.h.: Wir haben eine assoziative Verknüpfung:
   $$O \times O \to O \qquad id_{\mathbb{R}^m} \in O \qquad O^{-1} \in O(m)$$

2.2.7 Satz (Eigenschaften Lipschitz-stetiger Abbildungen)

1. $f : X \to Y$ L.-st., $A \subset X \Rightarrow \underbrace{f_{|A}}_{f \text{ eingeschr. auf A}} : A \to f(A)$ L.-st.
2. $f : X \to Y, g : Y \to Z$ L.-st. $\Rightarrow g \circ f$ L.-st.
3. $f_1 : X_1 \to Y_1, f_2 : X_2 \to Y_2$ L.-st. $\Rightarrow f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ L.-st.
4. $f : X \to Y$ L.-st., $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n \to x$, dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$

Beweis:

2. $d_z\big(g \circ f(x_1), g \circ f(x_2)\big) = d_z\Big(g\big(f(x_1)\big), g\big(f(x_2)\big)\Big)$
$\leqslant C_g d_y\big(f(x_1), f(x_2)\big) \leqslant C_f C_g d_x(x_1, x_2)$ $\square$

Wir interessieren uns allerdings zunächst für den Fall

$$X = Y = \mathbb{R}$$

Beispiel:

$$f \in \mathbb{R}[x] : f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j; n = \text{gr } f$$

Frage: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ L.-st.? Dazu müssen wir $|f(x) - f(y)|$ abschätzen!

$$\begin{aligned}
f(x) - f(y) &= \sum_{j=0}^{n} a_j (x^j - y^j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \big((y + x - y)^j - y^j\big) \\
&= \sum_{j=0}^{n} a_j \left[\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} y^{j-k}(x-y)^k - y^j\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} (x-y)^k y^{j-k} \qquad (1 \leqslant k \leqslant j \leqslant n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x-y)^k \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} a_j y^{j-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x-y)^k \sum_{j=k}^{n} a_j \frac{j!}{k!(j-k)!} y^{j-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (x-y)^k \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=k}^{n} a_j j(j-1)\cdots(j-k+1) y^{j-k}\right) \\
&=: \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k)}(y)
\end{aligned}$$

2.2.8 Hilfssatz

Es sei $f \in \mathbb{R}[x]$ (oder $\mathbb{C}[x]$) und

$$f^{(k)}(y) := \sum_{j=k}^{n} a_j j(j-1)\cdots(j-k+1) y^{j-k}$$

also insbesondere $f^{(0)}(y) = f(y)$; $f^{(k)}(y) \equiv 0$ für $k > n$. Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(x-y)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(y)$$

$$f(x) - f(y) = \sum_{k \geqslant 1} \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k)}(y)$$

Zurück zur Lipschitz-Stetigkeit:

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \cdot \left| \sum_{k \geqslant 1} \frac{(x-y)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(y) \right|$$

Also ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann Lipschitz-stetig, wenn

$$\sup_{x,y \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k \geqslant 1} \frac{(x-y)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(y) \right| \leqslant X < \infty.$$

Betrachte das Polynom (mit gr $(g_1) \leqslant n - 2$):

$$\begin{aligned} g(z) &:= \sum_{k=1}^{n} \frac{z^{k-1}}{k!} f^{(k)}(y) \\ &= \frac{z^{n-1}}{n!} f^{(n)}(y) + g_1(z) \\ &= \frac{z^{n-1}}{n!} n! a_n + g_1(z) \\ &= a_n z^{n-1} + g_1(z) \qquad a_n \neq 0 \end{aligned}$$

$$|g(z)| \geqslant |a_n||z|^{n-1} - C|z|^{n-2} = |a_n||z|^{n-1} \left(1 - \frac{C}{|a_n||z|}\right) \geqslant \frac{1}{2}|a_n||z|^{n-1},$$

falls $n - 1 > 0$.

$$n - 1 = 0 \Rightarrow g(z) \equiv a_n$$

2.2.9 Hilfssatz

$f \in \mathbb{R}[x]$ ist L.-st. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gdw. gr $f = 1$.
$f : [-T, T] \to \mathbb{R}$ ist aber immer L.-st.

Beweis

1. Teil: klar.

2. Teil: Betrachte

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| \leqslant |x-y| \sup_{|x|,|y|\leqslant T} \left| \sum_{k\geqslant 1} \frac{(x-y)^k}{k!} f^{(k)}(y) \right| \\
\leqslant |x-y| \sum_{k\geqslant 1} \frac{(2T)^k}{k!} \sup_{|y|\leqslant T} \left| f^{(k)}(y) \right| \\
\leqslant |x-y| \sum_{k\geqslant 1} \frac{(2T)^k}{k!} C_k(T)
\end{aligned}
$$

□

Frage: Charakterisiert die Eigenschaft 4) von 2.2.7 die Lipsch.-St.?

Antwort: Nein!

Gegenbeispiel $f : \mathbb{R}_+ \ni x \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$ ist nicht L.-st.
Angenommen, sie wäre L.-st.:

$$
\begin{aligned}
& |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant C|x-y| \quad \forall x,y \in \mathbb{R}_+ \\
\Rightarrow \quad & \sqrt{x} \leqslant C \cdot x \Rightarrow \sqrt{x} \geqslant \frac{1}{C} \qquad \text{— Widerspruch!}
\end{aligned}
$$

Ist $a > 0$, so ist $f : [a,\infty) \to [\sqrt{a},\infty)$ L.-stetig.

$$
|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leqslant \frac{|x-y|}{2\sqrt{a}}
$$

2.2.10 Definition

1. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *in* $x \in X$ *stetig*, wenn gilt:
   - Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt auch:
   $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$
2. f heißt *stetig in* $A \subset X$, wenn f in jedem Punkt $x \in A$ stetig ist.

Beispiele und Bemerkungen:

1. f L-st. in $A \Rightarrow f$ stetig in A.
2. $f \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow f$ stetig in $\mathbb{R}$.
3. $f(x) = \sqrt{x}$ ist stetig in $\mathbb{R}_+$: Für $x_0 > 0$ haben wir L-st. in $[x_0,\infty)$, also bleibt nur zu zeigen, dass für $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ auch gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 0$.
   Wäre das nicht so, gäbe es eine Teilfolge (x_{n_j}) mit $\sqrt{x_{n_j}} \geqslant C > 0\ \forall j \Rightarrow x_{n_j} \geqslant C^2$. — Wid! (da $x_n \to 0$)

2.2.11 Satz

Sei $f : X \to Y; x_0 \in X$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

1. f stetig in x_0
2. („ ε-δ-Def. “)
   $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$
   $\iff f\big(B_\delta(x_0)\big) \subset B_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$

Beweis:

2. $\Rightarrow$ 1.: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Z.z.:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \iff \forall \varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) : \forall n \geqslant n(\varepsilon) : d_Y\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

Nach 2. gibt es $\delta = \delta(\varepsilon) : f\big(B_\delta(x_0)\big) \subset B_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$.
Zu $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt es $n\big(\delta(\varepsilon)\big) : \forall n \geqslant \underbrace{n\big(\delta(\varepsilon)\big)}_{=:\tilde{n}(\varepsilon)} : d_X(x_n, x_0) < \delta$

1. $\Rightarrow$ 2.: Z.z.: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta = \delta(\varepsilon) : f\big(B_\delta(x_0)\big) \subset B_\varepsilon\big(f(x_0)\big)$.
Annahme: Das ist nicht so: $\exists \varepsilon_0 > 0$ sodass $\forall \delta > 0\ \exists x_\delta \in B_\delta(x_0) : f(x_\delta) \notin B_{\varepsilon_0}\big(f(x_0)\big)$.
Wähle x_n für $\delta = \frac{1}{n}$, d.h.

$$x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x_0) \text{ und } f(x_n) \notin B_{\varepsilon_0}\big(f(x_0)\big)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ und } d_Y\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geqslant \varepsilon_0 \quad \text{— Wid.}$$

□

VL: Mo, 2003-01-20

2.2.12 Definition

$f : X \to Y$ heißt *Hölder-stetig*, vom Exponenten α, wenn gilt

$$d_Y(f(x), f(y)) \leqslant C(d_X(x, y))^\alpha$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant y \leqslant x \Rightarrow 0 \leqslant \sqrt{x} - \sqrt{y} &= \sqrt{x - y + y} - \sqrt{y} \\ &\leqslant \sqrt{x-y} + \sqrt{y} - \sqrt{y} = \sqrt{|x-y|} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|} \iff d(\sqrt{x}, \sqrt{y}) \leqslant \sqrt{d(x,y)}$$

Übung: $X = Y = \mathbb{R}^m,\ \alpha > 1 \Rightarrow f$ konstant!

2.3 Stetigkeit

Beispiele: Uns interessieren v.a. Abbildungen $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

2.3.1 Definition

Ist $A \subset \mathbb{R}^m$ und f eine Abbildung $A \to \mathbb{R}^n$, so schreiben wir
$A =: \mathcal{D}(f) =:$ Definitionsbereich; $\mathcal{R}(f) := f(A) =:$ Bildbereich von f
z.B. ist für $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad \mathcal{D}(f) = \mathcal{R}(f) = \mathbb{R}_+$

Beispiele 1) $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto |x| \in \mathbb{R}_+$ stetig, weil $f|(0,\infty)$ und $f|(-\infty,0)$ Polynome
+ Stetigkeit in $x = 0$: $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \iff |x_n| \to 0$

2) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ist nicht stetig in 0, aber stetig in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\lim_{\substack{x_n\to 0\\ x_n>0}} f(x_n) \text{ und } \lim_{\substack{x_n\to 0\\ x_n<0}} f(x_n) \text{ existieren!}$$

2.3.2 Definition

Es sei $f : \mathbb{R} \supset \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ und x_0 ein Häufungspunkt von $\mathcal{D}(f)$. Wir sagen, dass f in x_0 einen rechtsseitigen (linksseitigen) Grenzwert besitzt, in Zeichen $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ $(\lim\limits_{x\to x_0-} f(x))$, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n > x_0$ $(x_n < x_0)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

2.3.3 Hilfssatz

Der rechtss. (linkss.) Grenzwert $f(x_0+)$ $(f(x_0-))$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis Geg. $x_n^{(j)} \to x_0$, $x_n^{(j)} > x_0$, $j = 1{,}2$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^{(j)}) =: f^{(j)}$ erfüllt $f^{(1)} \neq f^{(2)}$.

Dann sei $\left(x_n^{(3)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$x_{2n+1}^{(3)} := x_n^{(1)},\ x_{2n}^{(3)} := x_n^{(2)} \Rightarrow x_n^{(3)} \underset{n\to\infty}{\to} x_0,$$

aber $f(x_n^{(3)})$ ist nicht konvergent — Wid. $\square$

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} = \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}(x) \text{ (Dirichlet)}$$

Nirgendwo stetig!

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{wenn } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\ q \in \mathbb{N},\ (|p|, q) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nicht stetig in $\mathbb{Q}$!
$x_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\quad$ Gilt $|f(x)| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$?
Wähle $q_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{q_0} < \varepsilon$; dann gibt es nur endlich viele rationale Zahlen $\frac{p}{q}$, $(p,q) = 1$, $(q \leqslant q_0)$ mit $|x_0 - \frac{p}{q}| \leqslant 1$

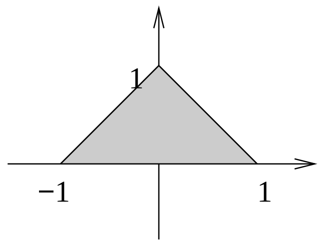
Bemerkung: Die graphische Darstellung von Abbildungen ist ein fundamentales Hilfsmittel!

2.3.4 Definition

Es sei $f:\ X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt die Menge $\mathcal{G}(f) := \{(x,y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$ der *Graph von f*.

Beispiel Intuitiv können wir sagen: Der Graph einer stetigen Funktion hat "keine Löcher"; er sieht sehr ähnlich aus wie der Definitionsbereich ("Kurve" oder "Fläche").

Aber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ stetig, z.B. Helix



aber auch es gibt eine stetige Abbildung $f:\ [0{,}1] \to$
Peano-Kurve
Trost: f ist nicht Lipschitz-stetig!

2.3.5 Satz

Es sei $f:\ X \to Y$. Dann ist f stetig genau dann, wenn

$$(*)\ O \subset Y \quad \begin{matrix}\text{offen}\\ \\ \text{abgeschlossen}\end{matrix} \quad \Rightarrow f^{-1}(O) \quad \begin{matrix}\text{offen}\\ \\ \text{abgeschlossen}\end{matrix} \quad \text{in } X$$

Beweis: 1. $(*) \Rightarrow$ Stetigkeit
Wähle $f(x) \in Y,\ \varepsilon > 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ offen $\ni x$ $(f(x) \in B_\varepsilon(f(x))\ \forall \varepsilon)$
$\overset{\text{offen}}{\Rightarrow} \exists \delta = \delta(\varepsilon, x):\ B_\delta(x) \subset f^{-1}\left(B_\varepsilon(f(x))\right) \iff f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$
$\Rightarrow f$ stetig

2. Stetigkeit $\Rightarrow (*)$
O offen in Y, $f(x) \in O \Rightarrow \exists \varepsilon > 0:\ B_\varepsilon(f(x)) \subset O$
$\overset{\text{f stetig}}{\Longrightarrow} \exists \delta = \delta(\varepsilon, x):\ f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x)) \Rightarrow B_\delta(x) \subset f^{-1}(O)$
Das beendet den Beweis, wenn f surjektiv ist.

Übung: f ist stetig $X \to Y \iff f$ ist stetig $X \to f(X)$

Abgeschlossene Mengen $Y \supset A$ abgeschlossen $\iff \mathcal{C}_Y A$ offen und $\mathcal{C}_X f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathcal{C}_Y A)$ offen wg. Stetigkeit $\Rightarrow f^{-1}(A)$ abgeschlossen.

2.3.6 Satz (Zwischenwertsatz)

Es sei $f:\ [a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $f(a)<0,\ f(b)>0$. Dann gibt es $x\in(a,b)$ mit $f(x)=0$.

Beweis Definiere $a_1:=a,\ b_1:=b$ und beende das Verfahren, falls $f(a_n)=0$ oder $f(b_n)=0$. Andernfalls setze

$$a_{n+1}:=\begin{cases}\frac{a_n+b_n}{2}, & \text{falls } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)<0\\ a_n, & \text{falls } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)>0\end{cases}$$

$$b_{n+1}:=\begin{cases}b_n, & \text{falls } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)<0\\ \frac{a_n+b_n}{2}, & \text{falls } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)>0\end{cases}$$

Falls das Verfahren nicht abbricht, entsteht eine Intervallschachtelung $(a_n),(b_n)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=:x=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$

$$\Rightarrow 0\geqslant\lim_{n\to\infty}f(a_n)=f(x)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)\geqslant 0\Rightarrow f(x)=0\quad\square$$

2.3.7 Folgerung

[Voraussetzungen wie in 2.3.6] Zu $\xi\in[f(a),f(b)]$ gibt es $x\in[a,b]$ mit $f(x)=\xi$.

Beweis Die Funktion $\tilde f:\ [a,b]\ni x\mapsto f(x)-\xi\in\mathbb{R}$ ist stetig und $f(a)-\xi<0,\ f(b)-\xi>0$. Also genügt es, 2.3.6 auf $\tilde f$ anzuwenden. $\square$

2.3.8 Definition

Ein metrischer Raum X heißt *bogenweise/wegweise zusammenhängend*, wenn es zu jedem Paar von Punkten $x,y\in X$ eine stetige Abbildung $c:\ [0{,}1]\to X$ gibt mit $c(0)=x,\ c(1)=y$.

$$\text{z.B. } X=\mathbb{R}^m\ni x,y:\ \begin{aligned}c(t)&=ty+(1-t)x\\&=(ty_1+(1-t)x_1,\dots,ty_m+(1-t)x_m)\end{aligned}$$

2.3.9 Hilfssatz

VL: Do, 2003-01-23

Ist $f\in\mathbb{R}[x]$ mit gr f ungerade, so hat f mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

2.3.10 Definition

Seien X,Y metrische Räume. Die *Gesamtheit der stetigen Abbildungen* $f:X\to Y$ bezeichnen wir mit $C(X,Y)$ („continuous“). Die *Gesamtheit der L.-stetigen Funktionen* mit $\mathrm{Lip}(X,Y)$.

Für $Y=\mathbb{R}$ sei $C(X,\mathbb{R})=:C(X)$, für $Y=\mathbb{C}$ entsprechend $C_{\mathbb{C}}(X):=C(X,\mathbb{C})$, analog $\mathrm{Lip}(X)$ und $\mathrm{Lip}_{\mathbb{C}}(X)$.

Bemerkung: $C(X)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit den Operationen

1. $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$
2. $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$

(Für $f, g \in C(X), x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$.)
Entsprechend ist $C_{\mathbb{C}}(x)$ ein $\mathbb{C}$-VR, analog für $\mathrm{Lip}(X), \mathrm{Lip}_{\mathbb{C}}(X)$.

$$\begin{aligned}
&\left|f(x)+g(x)-\big(f(y)+g(y)\big)\right| \\
\leqslant &|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \\
\leqslant &C_f d_X(x,y)+C_g d_X(x,y) \\
= &(C_f+C_g)d_X(x,y)
\end{aligned}$$

Übrigens ist auch $C(X, \mathbb{R}^n)$ ein $\mathbb{R}$-VR!

Weiter können wir auch *multiplizieren* in $C(X)$:

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

Dann gilt:

1. $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$
2. $f(g+h) = fg + fh$
3. $fg = gf$

Für $f(x) \equiv \lambda$ ergibt sich VR-Multiplikation mit λ. Dies ergibt die Struktur einer $\mathbb{R}$-Algebra. (vgl. VL zur LA.)

Problem: Stetige Funktionen brauchen nicht beschränkt zu sein (siehe $R[x]$).

2.3.11 Definition

Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt *beschränkt*, wenn es ein $y \in Y$ und ein $R > 0$ gibt mit

$$f(X) \subset B_R(y)$$

Die beschränkten, stetigen Funktionen $X \to Y$ werden mit $C_b(X,Y)$ (bzw. $C_b(X), C_{\mathbb{C},b}(X)$) bezeichnet.

Interessante Struktur:

Wir definieren eine *Norm* auf dem VR $C_b(X)$ durch

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Dann gilt:

1. $\|f\|_\infty = 0 \iff f(x) = 0 \;\forall x \quad (f \equiv 0)$
2. $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)| = |\lambda| \; \|f\|_\infty$

3. $\|f_1+f_2\|_\infty = \sup_{x\in X}|f_1(x)+f_2(x)| \leqslant \sup\big(|f_1(x)|+|f_2(x)|\big) \leqslant \sup|f_1(x)|+\sup|f_2(x)| = \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$

Also wird $C_b(x)$ ein metrischer Raum mit der Metrik $d(f,g) = \|f-g\|_\infty$. Das ist interessant, weil i.a. $\dim C_b(X) = \infty$.

Wir hatten schon gesehen, dass die Funktionen $(x^i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$ auf jedem Intervall in $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

2.3.12 Satz

Wenn X vollständiger metrischer Raum, dann ist auch $C_b(X)$ vollständig.

Beweis: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CF in $C_b(X)$.

$$\Rightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) : \forall n,m \geqslant n(\varepsilon) : \sup_{x\in X}|f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \quad \big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist CF in } \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}$ vollst. $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ existiert. Jedenfalls ist $f : X \to \mathbb{R}$ wohldefiniert.

Z.z: $f \in C_b(X)$ und $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $C_b(X)$.
Zunächst folgt:

$$\Rightarrow \quad \lim_{m\to\infty}|f_n(x)-f_m(x)| = |f_n(x)-f(x)| \leqslant \varepsilon$$
$$\Rightarrow \quad \forall\varepsilon > 0 : \exists n(\varepsilon) : \forall n \geqslant n(\varepsilon) : \sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| = \|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Ist also f stetig, so folgt $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $C_b(X)$.

Beweis der Stetigkeit: Ist $(x_n) \subset X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, so ist zz:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

d.h. wir müssen abschätzen:

$$\begin{aligned}
&|f(x)-f(x_n)| = |f(x)-f_m(x)+f_m(x)-f_m(x_n)+f_m(x_n)-f(x_n)| \\
\leqslant &|f(x)-f_m(x)| + |f_m(x)-f_m(x_n)| + |f_m(x_n)-f(x_n)| \\
\leqslant &\varepsilon + |f_m(x)-f_m(x_n)| + \varepsilon \qquad \text{für } m \geqslant n(\varepsilon)
\end{aligned}$$

Wir wählen $m = n(\varepsilon)$ und nutzen die Stetigkeit von $f_{n(\varepsilon)}$ in X: Zu unserem ε gibt es dann ein $\delta = \delta(\varepsilon)$, sodass aus $d(x,x_n) < \delta(\varepsilon)$ folgt:

$$|f_{n(\varepsilon)}(x) - f_{n(\varepsilon)}(x_n)| < \varepsilon$$

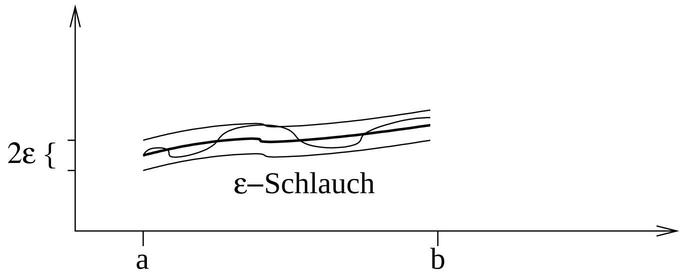
Also gibt es ein $n_1(\varepsilon)$ so, dass für $n \geqslant n_1(\varepsilon)$ gilt:

$$d(x,x_n) < \delta(\varepsilon) \text{ und } |f_{n(\varepsilon)}(x) - f_{n(\varepsilon)}(x_n)| < \varepsilon$$

Für $n \geqslant n_1(\varepsilon)$ gilt also $|f(x)-f(x_n)| < 3\varepsilon$, d.h. f ist stetig. Offensichtlich ist f auch beschränkt. $\square$

Diskussion

Was bedeuted die Konvergenz in $C_b(X)$?



$n \geqslant n(\varepsilon)$

2.3.13 Definition

Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C_b(X)$ gegen f konvergiert, so sagen wir: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen f *gleichmäßig* in X.

D.h.: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \qquad (*)$
und: $n(\varepsilon)$ hängt nicht von $x \in X$ ab. $(**)$

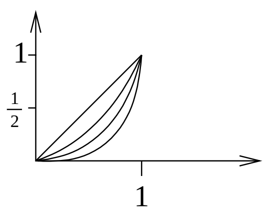
Beispiele:

$X = [0,1]$

1. $f_n(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{Z}_+ \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x<1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$

   d.h. $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert, ist aber *nicht stetig*

   $\Rightarrow$ Konvergenz ist *nicht* gleichmäßig.

   Explizit: Es gibt eine Folge $x_n \nearrow 1$ sodass $x_n^n = \frac{1}{2} \Rightarrow |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2}$

2. $f_n(x) = \frac{nx}{1+(nx)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0 = f(x) \quad \forall x \in [0,1]$

   Aber: $\left(f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2}$

2.3.14 Satz (Dini)

Sei $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine auf $[0,1]$ definierte Folge stetiger Funktionen, die in jedem Punkt $x \in [0,1]$ gegen eine stetige Funktion $f(x)$ konvergiert und außerdem $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ (bzw. $f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$) erfüllt $\forall n, x$. Dann konvergiert f_n gleichmäßig gegen f.

2.3.15 Satz (Weierstrass)

Jedes $f \in C([0,1])$ lässt sich gleichmäßig durch Polynome approximieren, d.h. es gibt eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}[x]$ sodass $\lim_{n\to\infty} \|f_n|[0,1] - f\|_\infty = 0$.

2.3.16 Definition

Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Falls E vollständig ist, so heißt E ein *Banach-Raum*.

2.4 Kompaktheit

2.4.1 Satz (Der Fundamentalsatz der Algebra)

Ist $f \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad $\geqslant 1$, so besitzt f in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.

Beweis: o.B.d.A. $f(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ mit $a_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Dann gibt es ein $R > 0$ so, dass $|f(z)| \geqslant |f(0)|$ für $|z| \geqslant R$ (möglich, da gr $f \geqslant 1$), d.h. alle Nullstellen von f liegen also in $B_R(0)$.

Annahme: Es gibt keine Nst. von f in $\overline{B_R(0)}$. D.h.: $|f(z)| > 0$ für $|z| \leqslant R$, d.h. es gibt ein z_0, $|z_0| \leqslant R$, sodass

$$(1) \qquad |f(z)| \geqslant |f(z_0)| > 0$$

Wir betrachten jetzt

$$\begin{aligned} f(z_0+h) &= f(z_0) + \sum_{j=1}^n \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(z_0) \\ &=: f(z_0) + hf^{(1)}(z_0) + h^2 g(h, z_0) \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} f^{(1)}(z_0) &= \sum_{j=1}^n j a_j z_0^{j-1} \\ f^{(k)}(z_0) &= \sum_{j=k}^n a_j \cdot j \cdot \ldots \cdot (j-k+1) z^{j-k} \end{aligned}$$

Wenn wir wissen, dass (2) $\quad f^{(1)}(z_0) \neq 0$, so folgt mit

$$h = -t\frac{f(z_0)}{f^{(1)}(z_0)} \qquad t \in [-\varepsilon, \varepsilon]:$$

$$\begin{aligned} f(z_0+h) &= f(z_0)(1-t) + t^2 \tilde{g}(t, z_0) \\ \text{d.h. } |f(z_0+h)| &\leqslant |f(z_0)|(1-t) + \underbrace{Ct^2}_{\leqslant \frac{t}{2}|f(z_0)|, 0<t<\varepsilon} \\ &\leqslant |f(z_0)|\left(1 - t + \frac{t}{2}\right) = \left(1 - \frac{t}{2}\right)|f(z_0)| < |f(z_0)| \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beweis vollendet, wenn (1) und (2) bewiesen! $\square$

VL: Mo, 2003-01-27

Diskussion (2) Es könnte sein, dass $f^{(1)}(z_0) = 0$! Es kann aber *nicht sein*, dass $f^{(j)} = 0 \ \forall j \in \mathbb{N}$, denn dann wäre $f(\underbrace{z_0 + h}_{z}) = f(z_0) \ \forall h \in \mathbb{C}$,

d.h. f wäre konstant, im Widerspruch zu gr $f \geqslant 1$! Also wähle $j_0 := \min\{j \in \mathbb{N};\ f^{(j)}(z_0) \neq 0\}$

$$\Rightarrow f(z_0 + h) = f(z_0) + \frac{h^{j_0}}{j_0!} f^{(j_0)}(z_0) + h^{j_0+1} g(z_0)$$

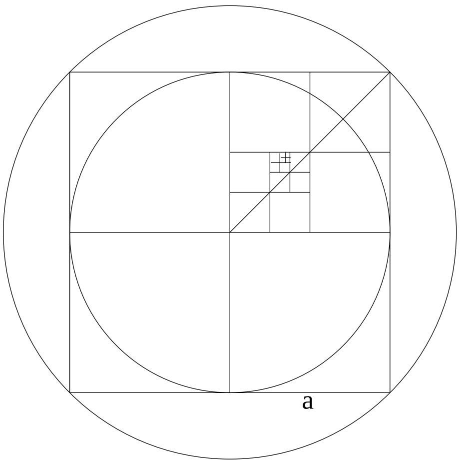
$\overset{(!!)}{\Rightarrow}$ Es gibt $h \in \mathbb{C}$ mit $|f(z_0 + h)| < |f(z_0)|$. Weil $|f(z_0)| < 1$ angenommen werden darf (sonst wähle $z_0 = 0$!), können wir z_0 so wählen, dass $|z_0| < R$. Weil h beliebig klein gewählt werden kann (!), folgt $|z_0 + h| < R \Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$

(1) Das ist gar nicht klar! Denn aus $f(z) \neq 0$ folgt $|f(z)| > 0$ für $|z| \leqslant R$, aber nicht $\min |f(z)| = |f(z_0)| > 0$! $\inf\{|f(z)|; |z| \leqslant R\} =: \mathfrak{f} \geqslant 0$ Wir müssen also zeigen, dass $\mathfrak{f} = |f(z_0)|$ für ein $|z_0| \leqslant R$!
Natürlich wissen wir: es gibt eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B_R(0)}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} |f(z_n)| = \mathfrak{f}$
Wenn wir wüssten, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0 \in B_R(0)$, dann folgte wegen der *Stetigkeit* von f

$$\mathfrak{f} = \lim_{n\to\infty} |f(z_n)| = |f(\lim_{n\to\infty} z_n)| = |f(z_0)|$$

Es genügt zu wissen, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konv. Teilfolge hat.

Erinnerung Bolzano-Weierstraß: Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt einen Häufungspunkt. Für $\mathbb{C}$?



Notation Im $\mathbb{R}^m$ bezeichne $W_a(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m;\ |x_i - x_{0i}| < a,\ 0 \leqslant i \leqslant n\}$ =: Würfel um x_0 mit der Kantenlänge $2a$.

Dann gilt im $\mathbb{R}^m$: $\quad B_a(x_0) \subset W_a(x_0) \subset B_{\sqrt{m}a}(x_0)$

2.4.2 Satz (Bolzano-Weierstrass)

Jede beschränkte Folge im $\mathbb{R}^m$ besitzt einen Häufungspunkt.

Beweis Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{W_R(0)}$. Wir konstruieren Zerlegungen von $\overline{W_R(0)}$ in 2^m abgeschlossene Würfel von der Kantenlänge $\frac{R}{2}$, induktiv erhalten wir so eine Folge

$$\overline{W_{\frac{R}{2^n}}(\tilde{x}_n)} \subset \overline{W_{\frac{R}{2^{n-1}}}(\tilde{x}_{n-1})}, \text{ so dass } \overline{W_{\frac{R}{2^n}}(\tilde{x}_n)} \text{ unendlich viele } x_n \text{ enthält.}$$

Dann bildet die Folge der $\tilde{x}_n$ eine CF in $\mathbb{R}^m$, denn

$$|\tilde{x}_{n+k} - \tilde{x}_n| \leqslant \sqrt{m}\frac{R}{2^n} < \varepsilon \text{ für } n \geqslant n(\varepsilon), k \in \mathbb{N}$$

Dann ist $\tilde{x} := \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n$ nach Konstruktion ein HP der Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ □

2.4.3 Satz

Es sei $A \subset R^m$ beschränkt und abgeschlossen und $f: A \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann gibt es Punkte $x_{\min}$ und $x_{\max}$ in A mit $f(x_{\min}) = \inf\limits_{x\in A} f(x)$, $f(x_{\max}) = \sup\limits_{x\in A} f(x)$.

D.h.: Jede stetige Funktion nimmt auf A ihr Max und ihr Min an.

Beweis Betrachte nur max (sonst ersetze f durch $-f$). Dann gibt es $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $\sup\limits_{x\in A} f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$; nach 2.4.2 besitzt (x_n) einen HP x, und weil A abgeschlossen ist, gilt $x \in A \Rightarrow \sup f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x) = f(x_{\max})$ □

Bemerkung $x_{\min/\max}$ ist natürlich nicht eindeutig bestimmt!

2.4.4 Definition

Ein metrischer Raum X heißt *kompakt*, wenn jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ einen Häufungspunkt besitzt, d.h. wenn es eine konvergente Teilfolge gibt. Eine *Teilmenge* A eines metr. Raumes heißt *kompakt*, wenn sie als metr. Raum mit der induzierten Metrik kompakt ist.

Beispiele 1) Jeder endliche metr. Raum ist kompakt.

2) Jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ ist kompakt, nach Bolzano-Weierstraß.

3) $\mathbb{R}^m$ (allgemein: eine unbeschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^m$) ist nicht kompakt.

$$x_j = (j,0,\ldots,0) \Rightarrow |x_{j+k} - x_j| \geqslant 1$$

4) Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^m$, O, mit $\emptyset \neq O \neq \mathbb{R}^m$ ist *nicht* kompakt! Denn

$$\mathbb{R}^m = \underbrace{O}_{=\mathring{O}} \mathbin{\dot\cup} \partial O \mathbin{\dot\cup} \mathring{\mathcal{C}_X O}$$

Dann ist $\partial O = O' \cap \partial O \neq \emptyset$, d.h. es gibt einen HP x von O, der nicht in O liegt. Dann gibt es $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset O$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \notin O$.

D.h. Kompaktheit wird zerstört durch *Unbeschränktheit* und Häufungspunkte, die nicht in der Menge liegen.

5) Jede kompakte Menge ist beschränkt (Übung!); betrachte für $x_0 \in A$: $\sup\limits_{x\in A} d_X(x_0, x)$. Die Umkehrung gilt nicht: $X = (0{,}1)$

2.4.5 Satz (Eigenschaften kompakter metrischer Räume)

1. Jeder kompakte metr. Raum ist beschränkt in dem Sinne dass

   $$d(X) := \sup d_X(x, y) < \infty \qquad \text{(d(X) heißt der } \textit{Durchmesser} \text{ von } X)$$

2. Das Produkt von kompakten metrischen Räumen ist kompakt.
3. Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist kompakt.
4. Das stetige Bild eines kompakten Raumes ist kompakt.

Beweis 1) ✓ (!)

2) X, Y metr. Räume, kompakt, $z_n = (x_n, y_n) \in X \times Y$

Z.z. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.
Wegen X kompakt $\exists$ konvergente (x_{n_k}) von (x_n) in X und von $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in Y etwa $\left(y_{n_{k_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$. Dann ist aber $z_{n_{k_j}} = \left(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}\right)$ konvergent in $X \times Y$.

3) ✓

4) $f : X \to f(X) =: Y$ stetig, X kompakt. Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bel. in Y, $y_n = f(x_n)\ \forall n$. Wegen X kompakt besitzt (x_n) eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Also ist $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ konvergent wegen Stetigkeit. □

2.4.6 Satz

Es sei X kompakt. Dann nimmt jedes $f \in C(X)$ auf X ein Maximum und ein Minimum an.

Beweis: Betrachte nur Max. Es gibt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \sup\limits_{x\in X} f(x)$; (x_n) besitzt eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) wegen Kompaktheit, $x_{\max} := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. Dann folgt wegen Stetigkeit

$$\sup_{x\in X} f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_{\max}).\square$$

Bemerkung Ein Banach-Raum kann nicht kompakt sein, weil er nicht beschränkt ist: $d(0, \lambda x) = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

Genauere Analyse des Kompaktheitsbegriffes

In der Konstruktion für $\mathbb{R}^m$ konstruieren wir für A kompakt und jedes $\varepsilon > 0$ eine *endliche Überdeckung* von A durch Kugeln vom Radius ε.

Erinnerung: A Menge, $(A_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}} \subset \mathcal{P}(A)$ heißt

Überdeckung von $A \iff \bigcup\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} A_\alpha = A$

Zerlegung von $A \iff (A_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ist Überdeckung und $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ für $\alpha, \beta \in \mathcal{A},\ \alpha \neq \beta$.

2.4.7 Definition

Ein metr. Raum X heißt *präkompakt* (totalbeschränkt), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung durch ε-Kugeln (ein *endliches ε-Netz*) gibt, d.h.

$$X = \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} B_\varepsilon(x_i) \text{ für gewisse } x_i \in X$$

2.4.8 Hilfssatz

VL: Do, 2003-01-30

1. Ein kompakter metr. Raum ist vollständig.

2. Eine Teilmenge eines kompakten Raumes ist kompakt gdw. sie abgeschlossen ist.

Beweis:

1. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine CF in X. Wegen der Kompaktheit besitzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

   $$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \Rightarrow d(x_{n_k}, x) < \varepsilon \qquad k \geqslant k(\varepsilon)$$

   $\Rightarrow$ für $n \geqslant n_{k(\varepsilon)}\big(\geqslant k(\varepsilon)\big) : d(x_n, x) \leqslant \underbrace{d(x_n, x_{n_{k(\varepsilon)}})}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(x_{n_{k(\varepsilon)}}, x)}_{<\varepsilon}$ wegen CF, für $k(\varepsilon)$ hinr. groß.

2. (a) $Y \subset X$ kompakt, z.z: Y abg. $\iff Y = \overline{Y} \iff Y' \subset Y$.
Sei $y \in Y'$ ein Häufungspunkt, es gibt also $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Nun besitzt $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wg. Kompaktheit eine (in Y) konvergente Teilfolge $y_{n_k} \overset{k\to\infty}{\to} y' \in Y \Rightarrow y = y' \in Y$.

(b) Y sei abgeschlossen, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$. z.z.: $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y \subset X$, X kompakt $\Rightarrow \exists (y_{n_k}) \to x \in X$.

1. Fall: $x \in Y$: ✓

2. Fall: $x \notin Y$: $x \in Y' \subset Y$ – Wid.

$\Rightarrow$ Jede kompakte Teilmenge ist abgeschlossen, jede abgeschlossene Teilmenge kompakt.

2.4.9A Satz

Ist X kompakt, so ist X präkompakt und vollständig.

Beweis

- Vollständigkeit: ✓

- *Annahme:* X nicht präkompakt. Dann gibt es $\varepsilon_0 > 0$ sodass für $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ kein endliches ε-Netz existiert.
Wähle $x_1 \in X \Rightarrow \exists x_2 : d(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon_0$.

  Annahme: Wir haben $x_1, \ldots, x_n$ gefunden, die paarweise für $1 \leqslant i, j \leqslant n$ und $i \neq j$ entsprechenden Abstand haben. Dann gibt es auch $x_{n+1} \in X$ mit $d(x_{n+1}, x_i) \geqslant \varepsilon_0$ $\forall i \leqslant n$ denn sonst wäre $x_1, \ldots x_n$ ein endliches ε_0-Netz.
Also erhalten wir eine Folge $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon_0$ $\forall i \neq j$. Diese Folge besitzt keine konvergente Teilfolge — Widerspruch! □

Wir verallgemeinern die ε-Netz-Eigenschaft wie folgt: Wir können aus der offenen Überdeckung $\big(B_\varepsilon(x)\big)_{x\in X}$ für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilüberdeckung auswählen. Gilt das auch für beliebige offene Überdeckungen?

2.4.10 Definition

Ein metrischer Raum heißt *überdeckungskompakt*, wenn aus jeder offenen Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung ausgewählt werden kann.

2.4.9B Satz

Jeder präkompakte und vollständige metrische Raum ist überdeckungskompakt.

Beweis: *Annahme:* Das ist nicht der Fall, d.h. es gibt eine offene Überdeckung $(O_\alpha)_{\alpha\in A}$ von X ohne endliche Teilüberdeckung. Wir bestimmen jetzt endliche 2^{-n}-Netze für jedes $n \in \mathbb{Z}_+$ und konstruieren eine Folge von Mittelpunkten wie folgt:

x_0 ist Mittelpunkt eines „1-Balles“, der keine endliche Teilüberdeckung aus $\big(B_1(x_0) \cap O_\alpha\big)_{\alpha\in A}$ hat.

x_{n+1} ist Mittelpunkt eines „2^{-n-1}-Balles“, der keine endliche Teilüberdeckung hat und $B_{2^{-n-1}}(x_{n+1}) \cap B_{2^{-n}}(x_n) \neq \emptyset$.

Dann gilt: $d(x_{n+1}, x_n) < 2^{-n} + 2^{-n-1} = 3 \cdot 2^{-n-1}$, also

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leqslant \sum_{j=1}^{k} d(x_{n+j}, x_{n+j-1}) \\ &< 3 \cdot \sum_{j=1}^{k} 2^{-n-j} \\ &< 3 \cdot 2^{-n} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (x_n)$ ist CF. Da X vollständig ist, konvergiert (x_n) gegen $x \in X$. Es gibt ein $\alpha_0 \in A$ mit $x \in O_{\alpha_0}$ wg. Überdeckung. Dann gilt $\exists \varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset O_{\alpha_0} \Rightarrow B_{2^{-n}}(x_n) \subset O_{\alpha_0}$, wenn $3 \cdot 2^{-n} + 2^{-n} = 2^{2-n} < \varepsilon$. —Wid!

2.4.11 Hilfssatz

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ beliebig. $HP(x_n) =$ Menge der Häufungspunkte von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$HP(x_n) = \bigcap_{m\geqslant 1} \underbrace{\overline{\{x_n\}_{n\geqslant m}}}_{F_m(x_n)} =: F(x_n)$$

Beweis: $HP(x_n) \subset F(x_n)$ folgt, wenn $HP(x_n) \subset F_m(x_n)\ \forall m$.
$HP(x_n) \ni x \iff \exists$ Teilfolge $(x_{n_k}) : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} =: x$.

1. Fall: Für unendlich viele k ist $x_{n_k} \neq x \Rightarrow x \in F_m(x_n)$.

2. Fall: $x_{n_k} = x$ für $k \geqslant k_0 \Rightarrow x \in F_m(x_n)\ \forall m$.

z.z: $F(x_n) \subset HP(x_n)$. Sei $y \in F(x_n)$. Konstruiere $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{m\to\infty} x_{n_m} = y$$

Wähle dazu $x_{n_m} \in F_m$ mit $d(x_{n_m}, y) < \frac{1}{m}$ (das ist möglich!). □

2.4.9C Satz

Jeder überdeckungskompakte metrische Raum ist kompakt.

Beweis: Sei X überdeckungskompakt, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ bel. z.z.: (x_n) besitzt HP. $\iff F(x_n) = \bigcap_{m\geqslant 1} F_m(x_n) \neq \emptyset$

Annahme: $F(x_n)$ ist leer. Da $F_m = \overline{F_m}$, ist $\mathcal{C}_X F_m$ offen und $\mathcal{C}_X F = \mathcal{C}_X \emptyset = X = \mathcal{C}_X \bigcap_{m\geqslant 1} F_m = \bigcup_{m\geqslant 1} \mathcal{C}_X F_m$ offen.

Wegen Überdeckungskompaktheit gilt $X = \bigcup_{i=1}^{l} \mathcal{C}_X F_{m_i}$ (endl. Auswahl) $\iff \emptyset = \bigcap_{i=1}^{l} F_{m_i} = F_{m_l}$ — Wid! □

2.4.9 Satz

Die folgenden Bedingungen an einen metrischen Raum sind äquivalent:

1. X ist kompakt.
2. X ist präkompakt und vollständig
3. X ist überdeckungskompakt (Satz von Heine-Borel)

Beweis siehe 2.4.9A-C. □

2.4.12 Definition

$f \in C(X,Y)$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn $\delta = \delta(\varepsilon, x, f)$ von x unabhängig gewählt werden kann.

Beispiel: $f \in \operatorname{Lip}(X,Y) \Rightarrow f$ glm. stetig.

2.4.13 Satz

Ist X kompakt, so ist jedes $f \in C(X,Y)$ gleichmäßig stetig.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ fest. Wähle $\delta = \delta(\varepsilon, x, f)$ so, dass

$$f\big(B_{2\delta}(x)\big) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}\big(f(x)\big)$$

Dann gibt es $x_1, \dots, x_N \in X$ mit

$$\bigcup_{i=1}^{N} B_{\delta(\frac{\varepsilon}{2}, x_i, f)}(x_i) = X$$

Setze

$$\tilde{\delta}\left(\frac{\varepsilon}{2}, f\right) := \min_{1\leqslant i\leqslant N} \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}, x_i, f\right)$$

Das ist das gesuchte δ. □

2.4.14 Satz (Heine-Borel)

VL: Mo, 2003-02-03

Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^m$ ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis "$\Leftarrow$" Bolzano-Weierstraß; "$\Rightarrow$" Übung □

Erinnerung X kompakt, $f: X \to Y$ stetig
$\Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig in X, d.h. δ kann unabhängig von $x \in X$ gewählt werden, $\delta = \delta(\varepsilon, f)$

Frage $X \xrightarrow{f} Y$ stetig u. bijektiv. Ist f^{-1} stetig ("automatische Stetigkeit")??

2.4.15 Satz

Ist $f: X \to Y$ bijektiv u. stetig und X kompakt, so ist auch f^{-1} stetig.

Beweis f^{-1} stetig $\iff \left(f^{-1}\right)^{-1}(A)$ abgeschlossen in Y für A abgeschlossen in X.
Aber $\left(f^{-1}\right)^{-1}(A) = \{y \in Y; f^{-1}(y) \in A \iff y \in f(A)\} = f(A)$; $A \subset X$ abgeschlossen $\Rightarrow A$ ist kompakt $\Rightarrow f(A)$ kompakt in $Y \Rightarrow f(A)$ abgeschlosen.□

Spezialfall $X = Y = \mathbb{R}$ oder $[a,b] = X$; $f: [a,b] \to f([a,b])$
Dann ist f streng monoton, denn sonst $\exists$(z.B.) $x_1 < x_2 < x_3$ mit
$f(x_1) \leqslant f(x_2) \geqslant f(x_3)$. Dann gäbe es aber $y_1 < y_2$ mit $f(y_1) = f(y_2)$ nach dem Zwischenwertsatz.

2.4.16 Satz

Eine stetige und injektive Abbildung $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ ist streng monoton. Ferner ist das Urbild kompakter Mengen in $f((a,b))$ unter f kompakt.

Beweis oBdA. $f \nearrow$. Ist $A \subset f((a,b)) \overset{!}{=} (\alpha, \beta)$, $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant \infty$ kompakt, so ist $A \subset [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}] \subset (\alpha, \beta) \Rightarrow f^{-1}([\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]) = [f^{-1}(\tilde{\alpha}), f^{-1}(\tilde{\beta})]$ kompakt. □

2.4.17 Definition

$f: X \to Y$ heißt *eigentlich*, wenn die Urbilder kompakter Mengen kompakt sind.

Bemerkung X kompakt, f stetig $\Rightarrow f$ ist eigentlich, denn:
$A \subset Y$ kompakt $\Rightarrow A$ abg. $\Rightarrow f^{-1}(A)$ abg. in $X \Rightarrow f^{-1}(A)$ kompakt

2.4.18 Satz

$f: X \to Y$ stetig, eigentlich und bijektiv $\Rightarrow f^{-1}$ stetig

Beweis z.z. A abg. in $X \Rightarrow f(A)$ abg. in Y
Also sei $f(x_n)$ konverg. gegen $y \in Y \Rightarrow \{y, f(x_1), \ldots, f(x_n), \ldots\}$ ist kompakt $\Rightarrow \{f^{-1}(y), x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ kompakt $\Rightarrow \exists$ Teilfolge (x_{n_k}) konverg. gegen $x \in X \Rightarrow f(x_{n_k}) \to f(x) = y$ □

Betrachte jetzt $C(X)$ mit X kompakt: ein interessanter Raum:

- $C(X)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in C(X)$ für $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $f_i \in C(X)$

- $C(X)$ ist vollständig unter der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$,
  $d_\infty(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|_\infty$
- $C(X)$ ist eine Algebra, d.h. $f_1 f_2 \in C(X)$ für $f_i \in C(X)$

Wie lassen sich präkompakte oder kompakte Teilmengen $\mathcal{A} \subset C(X)$ charakterisieren?

Notwendig ist

(1) $\mathcal{A}$ ist beschränkt $\iff \sup\limits_{f\in\mathcal{A}} \|f\|_\infty \leqslant C < \infty$

(2) $\mathcal{A}$ ist *gleichgradig stetig*, d.h. für jedes $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ kann δ unabhängig von $f \in \mathcal{A}$ gewählt werden.

$$\forall \varepsilon > 0,\ x \in X\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x):\ f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))\ \forall f \in \mathcal{A}$$

$$\iff |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon\ \forall y \in B_\delta(x)$$

Wie im Beweis der gleichm. Stetigkeit kann δ sogar unabh. von x gewählt werden!

2.4.19 Satz (Arzela & Ascoli)

Es sei X kompakt und $\mathcal{A} \subset C(X)$ erfülle die Bedingungen (1) und (2). Dann ist $\overline{\mathcal{A}}$ kompakt.

Beweis

1. Schritt Wir konstruieren eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, die dicht ist, d.h. jeder Punkt von X ist ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dazu nehmen wir alle Mittelpunkte von $\frac{1}{n}$-Netzen von X, $n \in \mathbb{N}$.

2. Schritt Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\{f(x_n);\ f \in \mathcal{A}\} \subset [-C, C]$, besitzt also eine konvg. Teilfolge (in $\mathbb{R}$) nach Bolzano-Weierstraß.

Wir betrachten jetzt eine Folge $(f_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$;
z.z. (f_l) besitzt eine in $C(X)$ konverg. Teilfolge.
Also gibt es eine Teilfolge $(f_{1l})_{l\in\mathbb{N}}$ mit $(f_{1l}(x_1))$ konvergent. Wähle Teilfolge (f_{2l}) von (f_{1l}) mit $(f_{2l}(x_2))$ konvg. $\Rightarrow (f_{2l}(x_i))_l$ konvg. für $i = 1{,}2$

Induktiv erhalten wir Folgen $(f_{kl})_{l\in\mathbb{N}}$ mit

- $(f_{k,l})_l$ ist Teilfolge von $(f_{k-1,l})_l$
- $(f_{k,l}(x_j))_l$ konvergiert für $1 \leqslant j \leqslant k$.

Dann bilden wir die Folge $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $g_k := f_{kk} \in \mathcal{A}$. Die Folge konvergiert in allen x_i, d.h. $(g_k(x_i))$ ist CF.

3. Schritt Sei $x \in X$ beliebig, z.z. $(g_k(x))$ ist *gleichmäßige* CF.

$|g_k(x)-g_{k'}(x)| \leqslant |g_k(x)-g_k(x_i)|+|g_k(x_i)-g_{k'}(x_i)|+|g_{k'}(x_i)-g_{k'}(x)| =: I+II+III$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $\delta = \delta(\varepsilon)$ so, dass

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \ \forall x, y \in X : \ d_X(x, y) < \delta = \delta(\varepsilon)$$

Wähle x_i mit $d_X(x, x_i) < \delta$ (Schritt 1) $\Rightarrow I + III < 2\varepsilon$
Wegen $II = |g_k(x_i) - g_{k'}(x_i)|$ und $x_i = x_{i(\delta)}$ können wir ein $k = k(\delta(\varepsilon))$ so wählen, dass $II < \varepsilon$ für $k', k \geqslant k(\delta(\varepsilon))$

$$\Rightarrow |g_k(x_i) - g_{k'}(x_i)| < \varepsilon \text{ für } k, k' \geqslant k(\delta(\varepsilon))$$

$$\Rightarrow \|g_k - g_{k'}\| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{k\to\infty} g_k \in C(X)\square$$

Bemerkung Ist $\mathcal{A} \subset \mathrm{Lip}(X)$ und $|f(x) - f(y)| \leqslant Cd(x, y) \ \forall f \in \mathcal{A}$ mit C unabh. von f, dann ist (2) erfüllt.

Problem Welche Funktionen in $C(X)$ genügen, um alle zu approximieren?

2.4.20 Satz (Stone-Weierstraß)

Gegeben sei $\mathcal{A} \subset C(X), X$ kompakt, mit den folgenden Eigenschaften:

- $\mathcal{A}$ ist eine Unteralgebra von $C(X)$
- $\mathcal{A}$ enthält die Konstante $1(\equiv f(x))$
- $\mathcal{A}$ "trennt die Punkte" von X, d.h. zu $x \neq y$ in X ex. $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$

Dann ist $\overline{\mathcal{A}} = C(X)$.

2.4.21 Satz (Weierstraß)

$\mathbb{R}[x] \mid [a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ ist dicht in $C([a, b])$

Beweis Einfache Folgerung!

Kapitel 3

Die Konstruktion reeller Funktionen

VL: Do, 2003-02-06

$\mathbb{R}^{(m)} \supset \mathcal{D} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ ($\mathcal{D}$ eine beliebige Teilmenge)
$\mathcal{D}(f) :=$ Definitionsbereich von f; $\quad \mathcal{R} := f(\mathcal{D}) =$ Bildbereich von f

Was kennen wir?

1. Polynome $\mathbb{R}[x]$

2. $f(x) = |x|; \quad f(x) = \operatorname{sgn} x$

3. $p > 0,\ p \in \mathbb{Q}; \quad f:\ \mathbb{R}_+ \ni x \mapsto \sqrt[p]{x}\ \in \mathbb{R}_+$

4. $f(x) = \frac{1}{1-x},\ x \neq 1$, d.h. $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
   $|x| < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j$ *Potenzreihe*
   (Andere Potenzreihe z.B. $\exp(x) = e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}\ \forall x \in \mathbb{R}$)

3.1 Polynome

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j,\ a_n \neq 0,\ n = \text{gr } f$$

- $\mathbb{R}$-VR mit der Basis $(x^j)_{j \in \mathbb{Z}_+}$
  $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathbb{R}[x]$ für $f_i \in \mathbb{R}[x],\ \alpha_i \in \mathbb{R}$

- $f_i \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow f_1 f_2 \in \mathbb{R}[x]$

$$f_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x^j \quad a_{ij} = 0 \text{ für } j > \text{gr } f$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f_1 f_2(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_{1j} x^j \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^k = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{1j} a_{2k} x^{j+k} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} x^l \sum_{\substack{j+k=l \\ j,k\in\mathbb{Z}_+}} a_{1j} a_{2k}\end{aligned}$$

- Es gilt aber auch, dass mit $f_i \in \mathbb{R}[x]$ auch $f_1 \circ f_2 \in \mathbb{R}[x]$

$$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{1j} (f_2(x))^j = \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} a_{1j} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^k\right)^j}_{\text{Produkt von Pol. } \in\mathbb{R}[x]}}_{\text{Linearkomb. von Pol. } \in\mathbb{R}[x]}$$

3.1.1 Hilfssatz

$\mathbb{R}[x]$ ist abg. unter Linearkombinationen und Produktbildung, d.h. mit $f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x]$ sind auch $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2,\ f_1 f_2$ und $f_1 \circ f_2$ in $\mathbb{R}[x]$.

3.1.2 Hilfssatz

Zu $f \in \mathbb{R}[x]$ gibt es *komplexe* Zahlen $(\lambda_i)_{i=1}^{\mathrm{gr}\, f}$ (nicht notwendig verschieden!), so dass

$$f(x) = a_{\mathrm{gr}\, f} \prod_{i=1}^{\mathrm{gr}\, f} (x - \lambda_i)$$

Dabei gilt $\left(\overline{\lambda_i}\right)_{i=1}^{\mathrm{gr}\, f} = (\lambda_i)_{i=1}^{\mathrm{gr}\, f}$

3.1.3 Hilfssatz

Für $A \subset \mathbb{R}$ und $f \in \mathbb{R}[x]$ ist $f|A \in C(A)$. Ist A beschränkt, so gilt sogar $f|A \in \mathrm{Lip}(A)$.

3.1.4 Hilfssatz

Für $f \in \mathbb{R}[x],\ x_0, h \in \mathbb{R}$ gilt $f(x_0 + h) = \sum\limits_{j=0}^{\mathrm{gr}\, f} \frac{h^j}{j!} f^{(j)}(x_0)$,

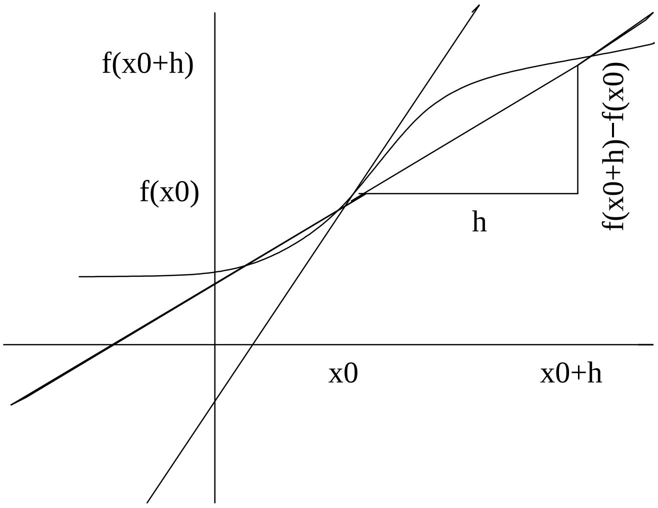
wobei $f^{(j)}(x_0) := \sum\limits_{k=j}^{\mathrm{gr}\, f} a_k k(k-1)\cdots(k-j+1) x^{k-j} \in \mathbb{R}[x]$

Wie können wir $f^{(1)}$ aus f gewinnen?

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h f^{(1)}(x_0) + h^2 \underbrace{g(x_0, h)}_{\text{Polynom in } h}$$

$\Rightarrow$ für $h \neq 0$ ist $f^{(1)}(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - h g(x_0, h)$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f^{(1)}(x_0)$$



d.h. $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ = Steigung der Sekante
$\Rightarrow f^{(1)}(x_0)$ ist die Steigung der Tangenten an $\mathcal{G}(f)$.

3.1.5 Definition

Das Polynom

$$f^{(1)}(x) := \sum_{j=1}^{\mathrm{gr}\, f} j a_j x^{j-1} \in \mathbb{R}[x]$$

heißt die *Ableitung* von f. Wir schreiben dafür auch $f'(x)$ (Newton) oder $\frac{df}{dx}(x)$ (Leibniz).
Das ergibt eine Abb. $\mathbb{R}[x] \ni f \mapsto f' \in \mathbb{R}[x]$.
Was hat diese Abb. für Eigenschaften?

3.1.6 Satz (Eigenschaften der Ableitung)

1. Die Ableitung ist *linear*, d.h. $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)' = \alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2'$
   Insbesondere $\frac{d}{dx} x^j = j x^{j-1}$
2. Für Produkte gilt die *Leibnizregel* $(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$
3. Für die Ableitung der Verkettung gilt die *Kettenregel*: $(f_1 \circ f_2)' = (f_1' \circ f_2) f_2'$

Beweis 1) ✓

2) $(f_1 f_2)'(x) = \ldots$ (Polynomformel)

oder:
$$\begin{aligned}(f_1 f_2)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_1 f_2(x_0+h) - f_1 f_2(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}((f_1(x_0+h) - f_1(x_0)) f_2(x_0+h) + f_1(x_0)(f_2(x_0+h) - f_2(x_0))) \\ &= f_2(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{f_1(x_0+h) - f_1(x_0)}{h} + f_1(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{f_2(x_0+h) - f_2(x_0)}{h} \\ &= f_1'(x_0) f_2(x_0) + f_1(x_0) f_2'(x_0)\end{aligned}$$

3) Wir haben zu untersuchen

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f_1(f_2(x_0+h))-f_1(f_2(x_0))}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f_1(f_2(x_0))+f_1\overbrace{[f_2(x_0+h)-f_2(x_0)]}^{k(h,x_0)}-f_1(f_2(x_0))}{h}\\
&\text{(beachte } h\to 0\Rightarrow k\to 0)\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f_1(f_2(x_0)+k(h,x_0))-f_1(f_2(x_0))}{k(h,x_0)}\frac{k(h,x_0)}{h}\\
=&f_1'(f_2(x_0))\lim_{h\to 0}\frac{f_2(x_0+h)-f_2(x_0)}{h}=f_1'(f_2(x_0))f_2'(x_0)
\end{aligned}$$

falls wir annehmen können, dass nicht $k\equiv 0$.
In diesem Fall wäre aber $f_2(x_0+h)-f_2(x_0)\equiv 0\Rightarrow f_2$ konstant $\Rightarrow f_1\circ f_2$ konstant $\Rightarrow (f_1\circ f_2)'=0\Rightarrow$ Beh. □

Was ist mit der "Ableitung" von $r(x):=\frac{1}{\underbrace{1-x}_{f(x)}},\ x\neq 1$?

$f(x)r(x)=1$. Wenn $\lim\limits_{h\to 0}\frac{r(x+h)-r(x)}{h}=: r'(x)$ ex., dann gilt

$$0=f'(x)r(x)+f(x)r'(x)=-\frac{1}{1-x}+(1-x)r'(x)\Rightarrow r'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$$

Betrachte die Funktion $\mathrm{inv}:\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\ni x\mapsto\frac{1}{x}\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\ \Rightarrow r=\mathrm{inv}\circ f$

$$x\neq 0,\ x+h\neq 0\Rightarrow\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{-h}{x(x+h)}\Rightarrow\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)=\frac{-1}{x(x+h)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{inv}'(x)=-\frac{1}{x^2}\iff\frac{d}{dx}(x^{-1})=-x^{-2}$$

3.1.7 Hilfssatz

Für $x\neq 0$ gilt

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{-1}-x^{-1}}{h}=-x^{-2}$$

Über $\mathbb{R}[x]$ hinaus:

VL: Mo, 2003-02-10

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{g(x)}\neq\mathbb{R}[x]$$

"Lemma" $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$ ok; $\frac{d}{dx}\frac{1}{g(x)}=-\frac{1}{g(x)^2}g'(x)$ nicht ganz ok

3.1.8 Hilfssatz

$f,g\in\mathbb{R}[x],x_0\notin g^{-1}(0)\Rightarrow r(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ ist differenzierbar in x_0 mit

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

3.1.9 Definition

Für $f, g \in \mathbb{R}[x]$ heißt $r = \frac{f}{g}$ eine *rationale Funktion*, mit $\mathcal{D}(r) = \mathbb{R} \setminus g^{-1}(0)$

Bemerkung $g(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{d}{dx}x^{-n} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{(-n)-1}$
d.h. für $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

$\tau_x(h) := x + h =:$ *Translation um* x (Polynom vom Grad 1)
Also wird für $f \in \mathbb{R}[x]$

$$\frac{d}{dh}f(x+h) = \frac{d}{dh}f \circ \tau_x(h) = f'(x+h) = \sum_{j \geqslant 1} \frac{h^{j-1}}{(j-1)!}f^{(j)}(x) = \sum_{j \geqslant 0} \frac{h^j}{j!}f^{(j+1)}(x)$$

Daraus entnehmen wir $(f')^{(j)}(x) = f^{(j+1)}(x)$

$$f(x+h) = f \circ \tau_h(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}f \circ \tau_h(x) = f'(x+h) = \sum_{j \geqslant 0} \frac{h^j}{j!}\frac{d}{dx}\left(f^{(j)}(x)\right)$$

Durch Koeffizientenvergleich der Polynome folgt

3.1.10 Hilfssatz

$$f^{(j+1)}(x) = \frac{d}{dx}f^{(j)}(x), \quad j \in \mathbb{Z}_+$$

Bemerkung D.h.

$$f^{(1)}(x) = \frac{d}{dx}f(x), \quad f^{(2)}(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$$

Deshalb schreiben wir

$$f^{(n)}(x) =: \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)$$

3.1.11 Hilfssatz

$f, f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x]$

1. Für $n > \text{gr } f$ ist $f^{(n)}(x) = 0$
2. $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \left(\frac{d}{dx}\right)^n f_1 + \alpha_2 \left(\frac{d}{dx}\right)^n f_2$
3. $\left(\frac{d}{dx}\right)^n (f_1 f_2)(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f_1^{(j)}(x) f_2^{(n-j)}(x)$ *Leibnizregel*
   Beweis: Übung

Kettenregel später!

Frage Gibt es “Normalformen” rationaler Funktionen?

$$f(x) = \underbrace{\sum_{j=0}^{\text{gr } f} a_j x^j}_{\text{linear}} = \underbrace{a_{\text{gr } f} \prod_{j=1}^{\text{gr } f} (x-\lambda_j)}_{\text{multiplikativ}}, \quad \lambda_j \in f^{-1}(0) \text{ (mit Vielfachheit)}$$

$\frac{f(x)}{g(x)} = r(x)$

1. Fall gr $f >$ gr $g \Rightarrow \exists f_1, f_2 \in \mathbb{R}[x]$ mit gr $f_2 <$ gr g, so dass $f = f_1 g + f_2 \Rightarrow r(x) = f_1(x) + \frac{f_2(x)}{g(x)}$, also oBdA. gr $f <$ gr g für *lineare Normalform*

3.1.12 Satz (Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen)

Es sei $r = \frac{f}{g}$ mit $f, g \in \mathbb{R}[x]$, gr $f <$ gr g. Ferner seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ *die verschiedenen* Nullstellen von g, d.h. $g(x) = g_0 \prod_{i=1}^{k} (x-\lambda_i)^{a_i}$ für gewisse $a_i \in \mathbb{N}$.

Dann gibt es eindeutig bestimmte Konstanten $b_{ij} \in \mathbb{C}$, so dass

$$r(x) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{a_i} \frac{b_{ij}}{(x-\lambda_i)^j}$$

Beweis Induktion über $m :=$ gr g

<u>$m = 1$</u>

$$r(x) = \frac{f(0)}{g(x)} = \frac{f(0)}{ax+b} = \frac{f(0)}{a(x+\frac{b}{a})} \checkmark$$

<u>$m \to m+1$</u>

$$g(x) = g_0 \prod_{i=1}^{k} (x-\lambda_i)^{a_i} =: (x-\lambda_1)^{a_1} g_1(x) \Rightarrow \text{gr } g_1 < \text{gr } g$$

Betrachte $\dfrac{f(x)}{g_1(x)} - \dfrac{f(\lambda_1)}{g_1(\lambda_1)} = \dfrac{f(x)g_1(\lambda_1) - g_1(x)f(\lambda_1)}{g_1(x)g_1(\lambda_1)} =: \dfrac{h(x)}{g_1(x)}$ für $g_1(x) \neq 0$

Dann ist $h \in \mathbb{R}[x]$ mit $h(\lambda_1) = 0$
$\Rightarrow h(x) = (x-\lambda_1)h_1(x)$ mit gr $h_1 <$ gr $h \leqslant$ gr $g_1 + (a_1 - 1) =$ gr $g - 1$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g_1(x)} = \frac{f(\lambda_1)}{g_1(\lambda_1)} + (x-\lambda_1)\frac{h_1(x)}{g_1(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(\lambda_1)}{g_1(\lambda_1)} \frac{1}{(x-\lambda_1)^{a_1}} + \frac{h_1(x)}{(x-\lambda_1)^{a_1-1}g_1(x)}$$

Betrachte $r_1 = \frac{h_1}{g_1}$: gr $g_1 <$ gr $g = m+1$, gr $h_1 <$ gr $g_1 + (a_1 - 1)$
$\Rightarrow$ Induktionsvoraussetzung ist anwendbar auf $\frac{h_1(x)}{(x-\lambda_1)^{a_1-1}g_1(x)} \Rightarrow$ Existenz (!),
Eindeutigkeit: nur für $b_{ia_i} = \lim\limits_{x\to\lambda_i} (x-\lambda_i)^{a_i} r(x)$

Berechnung der Partialbruchzerlegung

Ansatz mit unbekannten Koeffizienten

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{a_i} \frac{b_{ij}}{(x-\lambda_i)^j}$$

$$\Rightarrow f(x) = g_0 \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{a_i} b_{ij}(x-\lambda_i)^{a_i-j} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{k} (x-\lambda_l)^{a_l}$$

Dann bestimmt man die b_{ij} durch *Koeffizientenvergleich.*
$\Rightarrow$ eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem

Eine weitere Operation führt aus den Polynomen heraus:
$f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv, dann ist f^{-1} i. allg. *kein* Polynom,
z.B. $f(x) = x^3 \Rightarrow f^{-1} = x^{\frac{1}{3}}$
(f^{-1} nicht differenzierbar in 0: $\frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = h^{-\frac{2}{3}} \underset{h \to 0+}{\longrightarrow} \infty$!)

3.2 Differenzierbare reelle Funktionen

3.2.1 Definition

Es seien X, Y metrische Räume, $f:\ X \to Y$, $x_0 \in X$. Dann sagen wir, dass f in x_0 *einen Grenzwert besitzt*, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{x_0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt, dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y konvergiert.

3.2.2 Hilfssatz

Wenn $f:\ X \to Y$ in x_0 einen Grenzwert besitzt, so haben die Folgen $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ einen von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängigen Grenzwert, solange $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{x_0\}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Beweis Annahme: $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den gewünschten Eigenschaften, aber $\lim\limits_n f(x_n) \neq \lim\limits_n f(x'_n)$

Setzen $y_{2n} := x_n,\ y_{2n+1} := x'_n,\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt die Voraussetzungen, aber $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht konvergent.$\Rightarrow$ Wid. □

Bemerkungen Wir schreiben dann $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ für den gemeinsamen Grenzwert.

Ist f stetig in x_0, so besitzt f in x_0 den Grenzwert $f(x_0)$

$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$: kein Grenzwert in 0,
rechtsseitiger Grenzwert: betrachte $f \mid \mathbb{R}_+ \Rightarrow \exists$ Grenzwert in 0, $= 1 \neq f(0)$

3.2.3 Hilfssatz (Cauchy-Kriterium)

$f: X \to Y$, Y vollständig.
f besitzt in $x_0 \in X$ einen Grenzwert

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) \; \forall x, y \in \dot{B}_\delta(x_0): \; d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Beweis Übung!

3.2.4 Definition

Es sei $f: \mathbb{R} \supset \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathcal{D}(f)$ sei ein innerer Punkt. Dann heißt f differenzierbar in x_0, wenn

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =: \frac{df}{dx}(x_0) =: f'(x_0)$$

existiert.

$x_0 + h \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\} \iff 0 < |h| < \varepsilon$, d.h. bilde den Limes für alle hinreichend kleinen $h \neq 0$. *VL: Do, 2003-02-13*

Beispiel: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$, x_0 bel., zu berechnen:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{x_0 + h_n} - \frac{1}{x_0}}{h_n}$$

für $(h_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(x_0 + h_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = 0$,
d.h. für alle Nullfolgen $(h_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $(x_0 + h_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{\frac{1}{x_0 + h_n} - \frac{1}{x_0}}{h_n} = \frac{-h_n}{h_n x_0 (x_0 + h_n)} = -\frac{1}{x_0(x_0 + h_n)} \to -\frac{1}{x_0^2}$$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} x^{-1} = -x^{-2}$

3.2.5 Definition (Die Landau-Symbole)

Motivation: f differenzierbar in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right] = 0$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \underbrace{[f(x_0 + h) - f(x_0) - h f'(x_0)]}_{=: R_f(x_0, h)}$$

$f, g: X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X$
Wir schreiben dann $f = O(g)$ für $x \to x_0$, wenn es ein $\varepsilon > 0$ und ein $C > 0$ gibt mit $|f(x)| \leqslant C|g(x)| \; \forall x \in \dot{B}_\varepsilon(x_0)$

Wir schreiben weiter $f = o(g)$ für $x \to x_0$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert mit $|f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)|$ für $x \in \dot{B}_\delta(x_0)$

Diskussion

1. Ist $g(x) \neq 0$ in $\dot{B}_\varepsilon(x_0)$, so gilt $f = o(g)$ für $x \to x_0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = 0$

2. f differenzierbar in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)} \Rightarrow$

   $$f(x_0+h) = f(x_0)+hf'(x_0)+[f(x_0+h)-f(x_0)-hf'(x_0)] = f(x_0)+hf'(x_0)+o(h)$$

   Umgekehrt: $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + o(h)$
   $\overset{h \neq 0}{\Rightarrow} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + o(1)$ für $h \to 0$
   $\iff \lim\limits_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)\right] = 0$

3.2.6 Hilfssatz

$f : \mathbb{R} \supset \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$

$$\iff f(x_0 + h) = \underbrace{f(x_0) + hf'(x_0)}_{\text{Tangente!}} + o(h)$$

3. Für $h \to 0$ ist $|h|^{1+\alpha} = o(h)$ für jedes α $(\in \mathbb{Q})$ > 0

$g : g(h) = g_0 + hg_1, \quad g(0) = g_0 = f(x_0)$
Steigung in $x_0 = f'(x_0) = g_1 \Rightarrow$ Gleichung der Tangenten ist $g(h) = f(x_0) + hf'(x_0)$

3.2.7 Hilfssatz

$f : \mathbb{R} \supset \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f)}$ differenzierbar, wenn es eine lineare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(x_0 + h) - g(h) = o(h) \text{ für } h \to 0$$

Diese lineare Funktion ist eindeutig bestimmt (für f differenzierbar): ihr Graph ist die Tangente an $\mathcal{G}(f)$ in $(x_0, f(x_0))$.

3.2.8 Satz

$f_j : \mathbb{R} \supset \mathcal{D}(f_j) \to \mathbb{R}$

1. f_j differenzierbar in $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f_j)} \Rightarrow \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ differenzierbar in x_0 und

   $$\frac{d}{dy}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 f_1'(x_0) + \alpha_2 f_2'(x_0)$$

2. Voraussetzungen wie in 1. $\Rightarrow f_1 f_2$ differenzierbar in x_0 mit

   $$(f_1 f_2)'(x_0) = f_1'(x_0) f_2(x_0) + f_1(x_0) f_2'(x_0)$$

3. $f_2(\mathcal{D}(f_2)) \subset \mathcal{D}(f_1)$, $x_0 \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f_2)}$, $f_2(x_0) \in \overset{\circ}{\mathcal{D}(f_1)}$, f_1 differenzierbar in $f_2(x_0)$,f_2 differenzierbar in $x_0 \Rightarrow f_1 \circ f_2$ differenzierbar in x_0 und

   $$(f_1 \circ f_2)'(x_0) = f_1'(f_2(x_0)) f_2'(x_0)$$

Beweis Nur 3. !

$$
\begin{aligned}
f_1 \circ f_2(x_0+h) &= f_1(f_2(x_0+h)) = f_1(f_2(x_0) + \underbrace{hf_2'(x_0) + o(h)}_{k}) \\
&= f_1(f_2(x_0)) + kf_1'(f_2(x_0)) + o(k) \\
&= f_1(f_2(x_0)) + hf_1'(f_2(x_0))f_2'(x_0) + \underbrace{o(h)f_1'(f_2(x_0))}_{o(h)} + o(k) \\
&\quad (\text{mit } o(k) \leqslant \varepsilon(|h||f_2'(x_0)| + C|h|) = o(h)) \\
&= f_1(f_2(x_0)) + h\underbrace{f_1'(f_2(x_0))f_2'(x_0)}_{(f_1\circ f_2)'(x_0)} + o(h)
\end{aligned}
$$

□

3.2.9 Satz

VL: Mo, 2003-04-14

$f:\ \mathcal{D}(f) \to \mathcal{R}(f)$ bijektiv, f differenzierbar in x_0, $f(x_0)$ innerer Punkt von $\mathcal{R}(f)$. Dann ist $f^{-1}:\ \mathcal{R}(f) \to \mathcal{D}(f)$ differenzierbar in $f(x_0)$ genau dann, wenn gilt:
(1) $f'(x_0) \neq 0$ (2) f^{-1} ist stetig in $f(x_0)$

Beweis "⇒" Sei f^{-1} differenzierbar in $f(x_0)$. Dann ist f^{-1} auch stetig in $f(x_0) \Rightarrow$ (2). Weiter gilt die Kettenregel, wegen

$$f^{-1} \circ f(x) = x = \mathrm{id}(x) \Rightarrow 1 = (f^{-1})'(f(x_0))f'(x_0) \Rightarrow (1)$$

$$\text{und } (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ oder } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \ (\text{mit } f(x_0) =: y_0)$$

"⇐" Es sei f^{-1} stetig in $f(x_0)$ und $f'(x_0) \neq 0$. Wir müssen den Grenzwert $\lim\limits_{k\to 0} \frac{1}{k}(f^{-1}(f(x_0)+k) - x_0)$ bestimmen.
Für hinreichend kleines $k, |k| < \varepsilon$ gibt es $h(k)$ mit $f(x_0)+k = f(x_0+h(k)) \iff f^{-1}(f(x_0)+k) = x_0 + h(k) \Rightarrow \lim\limits_{k\to 0} h(k) = 0$ wegen Stetigkeit

$$
\begin{aligned}
&f(x_0) + k = f(x_0+h(k)) = f(x_0) + h(k)f'(x_0) + o(h(k)) \\
&\Rightarrow k = h(k)f'(x_0)(1 + o(h(k))), \text{ d.h. } h(k) = \tfrac{k}{f'(x_0)}(1+o(k)) \ (!)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(x_0)+k) - x_0 = h(k) = \frac{k}{f'(x_0)} + o(k)$$

□

$(*) f:\ [a,b] \to \mathbb{R}, -\infty < a < b < \infty$ ist stetig und in (a,b) differenzierbar.

3.2.10 Satz (von Rolle)

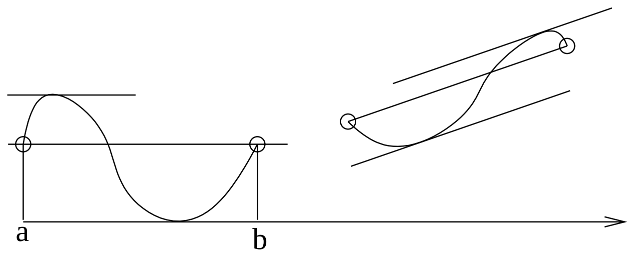
f erfülle $(*)$ und $f(a) = f(b)$. Dann gibt es $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = 0$

Beweis 1. Fall f ist konstant, $f(x) = f(a)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$

2.Fall f nicht konstant
$\Rightarrow \exists \tilde{c} \in (a,b)$ mit $f(\tilde{c}) \neq f(a)$, oBdA. $f(\tilde{c}) > f(a)$ (sonst betrachte $-f$)
Da f stetig ist in $[a,b]$ und $[a,b]$ kompakt ist, bestitzt f ein Maximum$= f(c) > f(a)$ für ein $c \in (a,b)$ Nun ist

$$\frac{1}{h}(f(c+h) - f(c)) \begin{cases} \leqslant 0 & \text{für } h > 0 \\ \geqslant 0 & \text{für } h < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f'(c) = 0$ □



3.2.11 Satz (Mittelwertsatz)

Wenn f $(*)$ erfüllt, so gibt es $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Beweis: Setze $F(x) := f(x) - (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
$\Rightarrow$ auf F ist 3.2.10 anwendbar $\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ mit $0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ □

VL: Do, 2003-04-17

3.2.12 Hilfssatz

Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ ist $(0,\infty) \ni x \mapsto x^\alpha \in (0,\infty)$ diffb. mit $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$.

$(*)$ $-\infty < a < b < \infty \Rightarrow [a,b]$ kompakt, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) diffb.

Bemerkungen:

1. $(*)$ f konstant in [a,b] $\Leftrightarrow f'(x) = 0\ \forall x \in (a,b)$
   - „$\Longleftarrow$": trivial
   - „$\Longrightarrow$": Wähle $x_1 < x_2$ in [a,b] und verwende Mittelwertsatz
     $\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(c) = 0$ für ein $c \in (x_1, x_2)$
2. $(*)$ $f'(x) \underset{(\geqslant)}{>} 0\ \forall x \in (a,b)$. Dann gilt für $x_1 < x_2 \in [a,b] : f(x_1) \underset{(\leqslant)}{<} f(x_2)$
   Analog für $<$ oder $\leqslant$!

3.2.13 Hilfssatz

$(*)$ ist $f'(x) \gtrless 0$ bzw. $f'(x) \underset{\leqslant}{\geqslant} 0\ \forall x \in (a,b)$ so ist f (streng) monoton $\genfrac{}{}{0pt}{}{wachsend}{fallend}$ in [a,b].

Beispiel Die AGM-Ungleichung in allgemeiner Form lautet:
$a_1^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n} \leqslant \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n$
für $a_i \in (0, \infty), \varepsilon_i \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$ und $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 1$.
Klassischer Fall: $\varepsilon_i = \frac{1}{n}\ \forall i$

Beweis 1. Schritt: Es genügt der Fall $n = 2$.
2. Schritt: $a_1^{\varepsilon} a_2^{1-\varepsilon} \leqslant \varepsilon a_1 + (1-\varepsilon) a_2$
$(\frac{a_1}{a_2})^{\varepsilon} \leqslant \varepsilon \frac{a_1}{a_2} + (1-\varepsilon)$ oder
$x^{\varepsilon} \leqslant \varepsilon x + (1-\varepsilon)$ oder
$f_{\varepsilon}(x) := \varepsilon x + (1-\varepsilon) - x^{\varepsilon} \geqslant 0$
$f_{\varepsilon}(1) = 0$
$f'_{\varepsilon}(x) = \varepsilon - \varepsilon x^{\varepsilon-1} = \varepsilon(1 - x^{\varepsilon-1}) = \varepsilon(1 - \frac{1}{x^{1-\varepsilon}}) = 0$ für $x = 1$
> 0 für $x > 1$
< 0 für $x < 1$
$\Rightarrow f_{\varepsilon}(x) \geqslant f_{\varepsilon}(1) = 0$ für $x \geqslant 0$ und $x \leqslant 0$.

3.2.14 Hilfssatz

$(*)$; dann ist für $x, y \in [a,b]$ $|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y| \sup\limits_{x \in (a,b)} |f'(x)|$.

Ist also $L = \sup\limits_{x \in (a,b)} |f'(x)| < \infty$ so ist f in [a,b] Lipschitz-stetig.

3.2.15 Satz (Erweiterter MWS)

f, g mit $(*)$ und $g'(x) \gtrless 0$ für $x \in [a,b]$. Dann gibt es ein $c \in (a,b)$ mit
$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'}{g'}(c)$.

Beweis Setze $F(x) := f(x) - (g(x) - g(a)) \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
$\Rightarrow 0 = F'(c) = f'(c) - g'(c) \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
$\Rightarrow f'(c) = g'(c) \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
Wegen $g'(x) \gtrless 0$, ist $g(b) - g(a) \neq 0$
$\Rightarrow$ Beh. □
Wichtige Konsequenz: Limes-Berechnung!

3.2.16 Satz (Regel von de l'Hospital)

f, g erfüllen $(*)$ in $[a, b-\varepsilon]$ ($\varepsilon \in (0, b-a)$) und $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} g(x) = 0(1)/\infty(2)$
aber $g'(x) \gtrless 0$ in $[a,b]$ und $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f'}{g'}(x) =: A$ existiert.
Dann existiert auch $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f}{g}(x) = A$.

Beweis (1) f und g stetig in [a,b], wenn wir $f(b) = g(b) = 0$ setzen, also erfüllen f, g die Voraussetzungen von 3.2.15.

Also gibt es $d \in [c,b)$ $\forall c \in (a,b)$ mit $\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f(c)-f(b)}{g(c)-g(b)} = \frac{f'(d)}{g'(d)} \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ wenn $c \in [b-\delta, b)$.

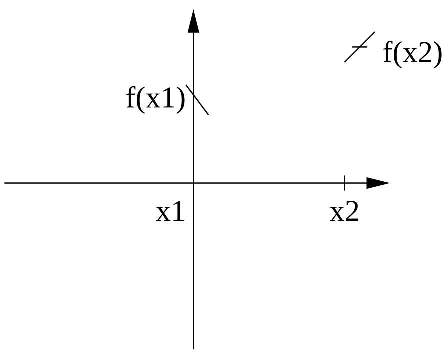
(2) Wir wählen $c \in (a,b)$ mit $f, g > 0$ in $[c,b)$ und schreiben für $x < y$ in (c,b), so dass $g(y) > g(x)$.
$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} = \frac{f'(z_{x,y})}{g'(z_{x,y})} \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ für $x \in (b-\delta, b), \delta = \delta(\varepsilon)$
$= \frac{f(y)}{g(y)}\left(\frac{1-\frac{f(x)}{f(y)}}{1-\frac{g(x)}{g(y)}}\right) \geqslant (1-\varepsilon)\frac{f(y)}{g(y)}$ und auch
$\leqslant (1+\varepsilon)\frac{f(y)}{g(y)}$ für $y \in (b-\delta', b)$ und festes $x \in (b-\delta, b)$.
Also folgt $\frac{A-\varepsilon}{1+\varepsilon} \leqslant \frac{f(y)}{g(y)} \leqslant \frac{A+\varepsilon}{1-\varepsilon} \Rightarrow$ Behauptung. □

3.2.17 Satz (Darboux)

Unter $(*)$ hat f' in (a,b) die Zwischenwerteigenschaft, d.h. ist $f'(x_1) = \alpha < f'(x_2) = \beta$, so gibt es zu $\gamma \in (\alpha, \beta)$ ein $x \in (x_1, x_2)$ mit $f'(x) = \gamma$.

Beweis: O.B.d.A. $\gamma = 0$; sonst betrachte $\tilde{f}(x) := f(x) - \gamma x$

$$\Rightarrow \tilde{f}'(x_1) = \alpha - \gamma < 0,\ \tilde{f}'(x_2) = \beta - \gamma > 0$$
$$\Rightarrow \exists x \in (x_1, x_2) : \tilde{f}'(x) = 0 \iff f'(x) = \gamma$$



z.z.: Aus $f'(x_1) < 0$ folgt $f(x) < f(x_1)$ für ein $x > x_1$.

Wie verhalten sich Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft $(*)$?

D.h.: (1) jedes f_n erfüllt $(*)$,
(2) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ existiert für $x \in [a,b]$.
Insbesondere soll f in [a,b] stetig sein. Das gilt im allgemeinen nicht, wenn die Konvergenz nicht glm. ist: $f_n(x) = x^n$ in [0,1]
Also verlangen wir:
(3a) (f_n) ist glm. konv. gegen f

Problem: betrachte $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ ist glm. konverg., aber $f_n'(x) = x^{n-1}$ ist so schlecht wie vorher; der Limes ist nicht überall gleich der Ableitung!
(3b) (f_n') ist ebenfalls konvergent und zwar gleichmäßig.

3.2.18 Satz

Die Folge (f_n) erfülle $(*)$ und (3b); ferner sei $(f_n(x_0))$ konvergent für ein $x_0 \in [a,b]$. Dann ist (f_n) glm. konv. und es gilt, dass $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ $(*)$ erfüllt mit $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim\limits_{n\to\infty} f_n)'(x)$.

Beweis: Für $x \in [a,b]$ ist

$$\begin{aligned}|f_m(x) - f_n(x)| &\leqslant |(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(x_0)| + |(f_m - f_n)(x_0)|\\ &= |(x - x_0)(f_m - f_n)'(y_{x,x_0,n,m})| + |(f_m - f_n)(x_0)|\\ &\leqslant \varepsilon + |x - x_0| \cdot |(f_m - f_n)'(y_{x,x_0,n,m})| \leqslant \varepsilon + (b-a)\varepsilon \text{ für } n,m \geqslant n(\varepsilon).\end{aligned}$$

Also ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a,b]$ glm. konvergent. Es bleibt zu berechnen für $x \in (a,b)$:

$$\lim_{h\to 0}[\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) - f'(x)] =$$

$$\lim_{h\to 0}\Big[\underbrace{\frac{1}{h}[(f - f_n)(x+h) - (f - f_n)(x)]}_{=I} + \underbrace{[\frac{1}{h}(f_n(x+h) - f_n(x)) - f_n'(x)]}_{=II} + \underbrace{[f_n'(x) - f'(x)]}_{=III}\Big]$$

- $|III| \leqslant \varepsilon$ für $n \geqslant n(\varepsilon)$
- $\lim\limits_{h\to 0} |II| = 0$ für festes $n = n(\varepsilon)$
- $|I| = \left|\frac{1}{h}[(f - f_n)(x+h) - (f - f_n)(x)]\right|$
  $= \frac{1}{h} \lim\limits_{m\to\infty} |[(f_m - f_n)(x+h) - (f_m - f_n)(x)]|$
  $= \lim\limits_{m\to\infty} \left|\frac{1}{h} h(f_m' - f_n')(y_{h,x,m,n})\right| \leqslant \varepsilon$ für $m \geqslant n = n(\varepsilon)$.

Insgesamt ist $\lim\limits_{h\to 0}[\frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)) - f'(x)] < \varepsilon \ \forall \varepsilon$
$\Rightarrow$ Beh. □ *VL: Do, 2003-04-24*

Frage: Wie steht es mit Lipschitz-stetigen Funktionenfolgen?

Betrachte f_n L.-stet. in $[a,b]$ mit

- Lipschitz-Konstante $L_n := \inf\{L \mid |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant L|x-y|\}$
- $f(x) := \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ konvergent in $[a,b]$

Dann gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} |f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \sum_{n\geqslant 1} L_n|x-y| = |x-y| \sum_{n\geqslant 1} L_n$$

3.2.19 Satz

Es sei $f_n : X \to \mathbb{R}$ L.-stet. auf dem metrischen Raum X mit L.-Konstante L_n. Wenn $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x_0)$ konvergiert für ein $x_0 \in X$ und $L := \sum_{n\geqslant 1} L_n < \infty$, dann ist $f(x) := \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ glm. konvergent auf jeder beschränkten Teilmenge von X, und f ist L.-stet. mit Lipschitz-Konstante $\leqslant L$.

Beweis (glm. Konvergenz): Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\geqslant n(\varepsilon)} f_n(x)\right| &\leqslant \left|\sum_{n\geqslant n(\varepsilon)} \big(f_n(x)-f_n(x_0)\big)\right| + \underbrace{\left|\sum_{n\geqslant n(\varepsilon)} f_n(x_0)\right|}_{<\frac{\varepsilon}{2}\text{ für } n(\varepsilon)=:n_1(\varepsilon)} \\ &\leqslant \sum_{n\geqslant n(\varepsilon)} L_n d(x,x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\big(1+d(x,x_0)\big) \qquad \left(\text{da } \sum L_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n \geqslant n_2(\varepsilon)\right)\end{aligned}$$

Bemerkungen:

- (f_n) stetig in $[a,b]$ so, dass $\|f_n\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f_n(x)|$. Dann heißt $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ in $[a,b]$ *normal konvergent*, wenn $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty < \infty$.
- Übung: $\sum f_n$ in $[a,b]$ normal konvergent $\Rightarrow \sum f_n$ glm. konvergent.
- Die Umkehrung gilt nicht:

  $$\sum_{j\geqslant 1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^j \text{ ist in } [0,1] \text{ glm. konv.,}$$

  aber nicht normal konvergent, denn

  $$\max_{[0,1]} \left|\frac{(-1)^{j-1}}{j} x^j\right| = \frac{1}{j}$$

Beispiel:

$$\exp(x) = e^x = \sum_{j\geqslant 0} \frac{x^j}{j!}, \qquad x \in \mathbb{C}$$

Wir wissen, dass e^x glm. konvergiert in $[-T,T]$ für jedes $T > 0$. Nach 3.2.18 folgt $\frac{d}{dx}e^x = e^x$!

Um e^x genauer zu diskutieren, berechnen wir etwas allgemeiner $e^{\lambda_0+\lambda_1 x}$, $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$. Hier ist die Kettenregel ($\frac{d}{dx}e^{\lambda_0+\lambda_1 x} = \lambda_1 e^{\lambda_0+\lambda_1 x}$) nicht anwendbar!

Ausweg: 3.2.18 gilt auch für komplexwertige Funktionen, wenn wir definieren:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(x+h) - f(x)\big)$$

Dann ist aber klar, dass

$$\frac{d}{dt}(\lambda_0 + \lambda_1 t) = \lambda_1$$

$$\frac{d}{dt}(\lambda_0 + \lambda_1 t)^j = j(\lambda_0 + \lambda_1 t)^{j-1}\lambda_1$$

nach Leibniz und Induktion.

3.2.20 Satz

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ in $\mathbb{R}$ diffb. mit

$$f'(t) = \lambda_1 f(t)$$

für ein $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Dann gilt für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$f(t) = e^{\lambda_1 t} f(0) = e^{\lambda_1 (t-t_0)} f(t_0)$$

Beweis: $g(t) := e^{-\lambda_1 t} f(t)$
$\Rightarrow$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ist diffb. in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ mit

$$g'(t) = (-\lambda_1) e^{-\lambda_1 t} f(t) + e^{-\lambda_1 t} f(t) \lambda_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad g(t) \equiv g(0) = f(0)$$

$\Rightarrow$ Daraus folgt $f(t) = e^{\lambda_1 t} f(0)$. Genauso folgt:

$$e^{-\lambda_1 (t-t_0)} f(t) = f(t_0) \qquad \Rightarrow \qquad \text{Beh.}$$

□

Wir haben hier verwendet, dass

$$1 = e^{-\lambda_1 t} e^{\lambda_1 t}$$

die durch Diff. folgt. □

3.2.21 Folgerung

Es gilt

$$\boxed{e^{\lambda_0} e^{\lambda_1} = e^{\lambda_0 + \lambda_1}}$$

mit $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{C}$.

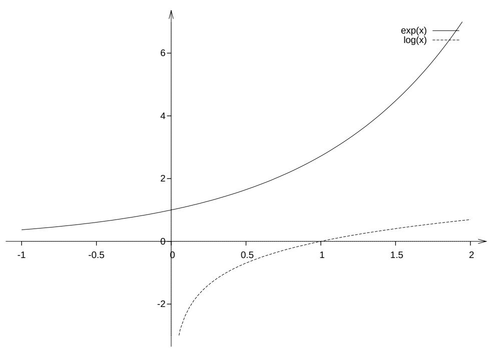
Beweis: Die Funktionen

$$f(t) = e^{\lambda_0} e^{\lambda_1 t} \qquad g(t) = e^{\lambda_0 + \lambda_1 t}$$

erfüllen beide die Gleichungen

$$h'(t) = \lambda_1 h(t) \qquad h(0) = e^{\lambda_0}$$

Diskussion von e^x:



Annahme: Es existiert eine Nullstelle: $e^{x_0} = 0, x_0 \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow e^x = e^{x-x_0} e^{x_0} \equiv 0$ – Wid. $\Rightarrow e^x > 0$.

Was ist $\lim_{x\to\infty} e^x$? Vermutung: $e^x \geqslant x$ für $x \geqslant 1$.
Es ist $e^x \geqslant 1$ für $x > 0$ weil $(e^x)' > 0$ und $e^x > 1$ für $x > 0$.

Betrachte $f(x) := e^x - x \Rightarrow f(1) > 0$. $f'(x) = e^x - 1 > 0$ für $x \geqslant 1$
$\Rightarrow f \nearrow \quad f(x) \geqslant f(1) > 0$.

Für $x > 0$ ist $e^x > \frac{x^j}{j!}$.

Umkehrfunktion: $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist bijektiv, da exp stetig und streng monoton wachsend ist. Also gibt es eine Umkehrfunktion

$$\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

bijektiv, stetig und streng monoton wachsend;

$$\log' e^x = \frac{1}{e^x} \iff \log' y = \frac{1}{y}$$

$$\log xy = \log x + \log y$$

3.2.22 Satz

1. Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ erfüllt

   - $\exp x > 0$,
   - $\exp 0 = 1$,
   - $\lim_{x\to\pm\infty} \exp x = \infty/0$,
   - $\exp(x + y) = \exp x \exp y$,
   - $\frac{d}{dx} \exp x = \exp x$

2. exp ist bijektiv, stetig und streng monoton mit Umkehrfunktion $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ für die gilt

   - $\log 1 = 0$,
   - $\lim_{x\to\infty/0} \log x = \infty/-\infty$,
   - $\log xy = \log x + \log y$,
   - $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$

Betrachte nun wieder $\lambda = x + iy \in \mathbb{C}$:
$e^z = e^x e^{iy}$ mit $e^x > 0$
$\overline{e^z} = e^{\overline{z}} = e^x \overline{e^{iy}} = e^x e^{-iy}$
$\Rightarrow |e^z| = e^x |e^{iy}| = |\overline{e^z}| = e^x |e^{-iy}|$
$\Rightarrow |e^{iy}| = |e^{-iy}|$;
$1 = |e^{i(y-y)}| = |e^{iy} e^{-iy}| = |e^{iy}| \cdot |e^{-iy}| = |e^{iy}|^2$

3.2.23 Hilfssatz

Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|e^{ix}| = 1$ und für $z \in \mathbb{C}$ ist $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$.

Frage: Ist $z \in S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ von der Form $z = e^{ix}$ für ein $x \in \mathbb{R}$? Falls ja, erhalten wir:

3.2.24 Hilfssatz (Polardarstellung komplexer Zahlen)

$\mathbb{C} \ni z =: |z| e^{i \text{ „arg" } z}$ mit „arg" $z \in \mathbb{R}$.

Zur Klärung betrachten wir:

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \underbrace{\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})}_{(*)} + \frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) \\
(*) &= \frac{1}{2} \sum_{j \geqslant 0} \frac{1}{j!} \left[(ix)^j + (-ix)^j \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j \geqslant 0} \frac{1}{(2j)!} \left[(-1)^j x^{2j} + (-1)^j x^{2j} \right] + 0 \\
&= \sum_{j \geqslant 0} \frac{1}{(2j)!} (-1)^j x^{2j} =: \cos x \\
e^{ix} &= \underbrace{\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})}_{=:\cos x} + \underbrace{\frac{1}{2}(e^{ix} - e^{-ix})}_{=: i \sin x} \\
\sin x &= \sum_{j \geqslant 0} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Eigenschaften von $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad$ (da $|e^{ix}| = 1$)
2. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$
3. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
4. $\frac{d}{dx} \cos x = - \sin x$
5. $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

Hierbei werden 2. und 3. die *Additionstheoreme* genannt.

VL: Mo, 2003-04-28

Beweis (2 und 3)

$$\begin{aligned}
\cos(x_1 + x_2) + i \sin(x_1 + x_2) &= e^{i(x_1 + x_2)} = e^{ix_1} e^{ix_2} = (\cos x_1 + i \sin x_1)(\cos x_2 + i \sin x_2) \\
&= (\cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2) + i(\sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_1)
\end{aligned}$$

Folgerungen aus dem Additionstheorem

1)

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

Allgemeiner benutze (Moivre, Euler)

$$e^{imx} = (\cos x + i\sin x)^m = \cos mx + i\sin mx$$

2)

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

zum Beweis beachte $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, \quad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$

$$\Rightarrow \cos x = \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$
$$\cos y = \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \Rightarrow \text{Beh., sin analog}$$

Wie verhält sich $\sin x$ für kleine x? Aus der Reihendarstellung folgt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$ Vermutung: $\sin x \leqslant x$ für $x \geqslant 0$.

Beweis $f(x) = x - \sin x,\ f(0) = 0,\ f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0 \Rightarrow f \nearrow \Rightarrow$ Beh.

Analog $\sin x \geqslant x - \frac{x^3}{3!}$
sicher dann, wenn $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geqslant 0$
sicher dann, wenn $-\sin x + x \geqslant 0$ ✓

3.2.25 Hilfssatz

Für $x \geqslant 0$ gilt

$$(1)\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x, \quad (2)\ 1 \geqslant \cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$$

Ann. $\sin x > 0$ für $x > 0 \quad \Rightarrow 0 < \cos x < 1$ für $x > 0 \Rightarrow \sin \nearrow,\ \cos \searrow$,
d.h. $\exists \lim\limits_{x\to\infty} \sin x =: c \leqslant 1, \quad \lim\limits_{x\to\infty}\cos x = \sqrt{1-c^2}$
Wähle zu $\varepsilon > 0$ ein x_0 mit

$$\sqrt{1-c^2} + \varepsilon \geqslant \cos x_0 \geqslant \sqrt{1-c^2}, \quad c - \varepsilon \leqslant \sin x_0 \leqslant c$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \sqrt{1-c^2} + \varepsilon - \sqrt{1-c^2} \geqslant \cos x_0 - \cos(x_0+1) = \sin\frac{1}{2}\sin(x_0+\frac{1}{2})$$
$$= \sin\frac{1}{2}(c-\varepsilon) \geqslant \frac{c}{2}\sin\frac{1}{2}, \text{ falls } c>0 \text{ und } \varepsilon < \frac{c}{2} \text{ – Wid.}$$

Also ist $c=0$, d.h. $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x = 1$ und damit $\min\limits_{x\geqslant 0}\cos x = c' < 1$. Dann ist aber am Minimum $-\sin x_{\min} = \cos' x_{\min} = 0$ – Widerspruch!

3.2.26 Definition

Wir setzen

$$\pi := \min\{x>0;\ \sin x = 0\} \quad (\inf = \min\,,\ \text{weil } \sin \text{ stetig})$$

3.2.27 Satz

Wir haben

$$\sin^{-1}\{0\}\cap\mathbb{R} = \{k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\},\quad \cos^{-1}\{0\}\cap\mathbb{R} = \{\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in\mathbb{Z}\}$$

Beweis

$$\sin\pi = \sin 2\cdot\frac{\pi}{2} = 0 = 2\sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

und die einzige Nullstelle von cos in $[0,\pi]$ wegen $\sin 0 = \sin\pi = 0$, $\sin x > 0$ in $(0,\pi)$. Also gilt auch $\cos\pi = -1$. Weiter ist

$$\sin(x+\pi) = \sin x\cos\pi + \underbrace{\sin\pi}_{=0}\cos x = -\sin x \text{ und}$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin x\cos 2\pi + \underbrace{\sin 2\pi}_{=0}\cos x = \sin x(\cos^2\pi - \sin^2\pi) = \sin x$$

Weiter ist

$$\cos(x-\frac{\pi}{2}) = \cos x\cos\frac{\pi}{2} + \sin x\sin\frac{\pi}{2} = \sin x$$
$$\text{und } \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$$

Wie steht es in $\mathbb{C}$?

$$0 = \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}) \iff e^{iz} = \frac{1}{e^{iz}} \iff e^{2iz} = 1 = e^{2ix-2y},\quad z = x+iy$$
$$\iff \underbrace{e^{-2y} = 1}_{\iff y=0} \text{ und } e^{2ix} = 1 \iff \cos 2x = 1,\ \sin 2x = 0$$

$\Rightarrow 2x = k\pi \iff x = \frac{k}{2}\pi$ mit $k\in\mathbb{Z}$ und $\cos 2x = 1 = \cos k\pi = (-1)^k$ und deshalb $x = l\pi$ mit $l\in\mathbb{Z}$

3.2.28 Satz

Die Funktionen sin und cos sind in $\mathbb{R}$ *mit* 2π *periodisch*, d.h.

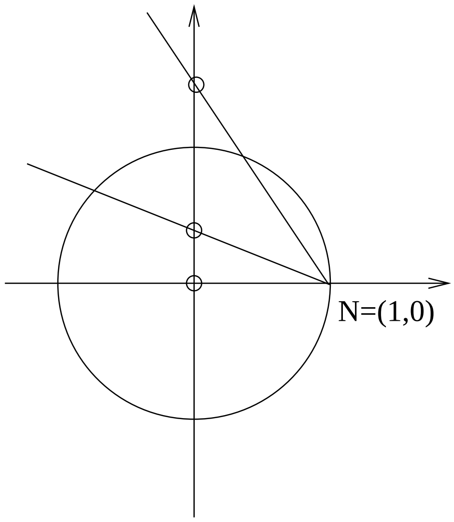
$$\sin(x+2\pi) = \sin x,\ \cos(x+2\pi) = \cos x \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Zur Frage der Polarzerlegung

$\mathbb{C} \ni z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} =: |z| \cdot w$ mit $w \in S^1$

Um ein $x \in \mathbb{R}$ zu finden mit $w = e^{ix}$ müssen wir zeigen, dass die Abb. $\mathbb{R} \ni x \mapsto e^{ix} \in S^1$ surjektiv ist.

$$S^1 \setminus \{N\} \ni z = (x,y) \mapsto p_N(z) \in \mathbb{R}$$



Gerade ist $z(t) := t \cdot N + (1-t)z = (t,0) + ((1-t)x, (1-t)y) \Rightarrow$ $z(t)$ liegt auf y-Achse $\iff t + (1-t)x = 0 \iff t(1-x) = -x \iff t = -\frac{x}{1-x}$
$\Rightarrow p_N(x,y) = (x - \frac{-x}{1-x})y = \frac{y}{1-x}$ (bijektiv)

Dann folgt

$$F: \ (0,2\pi) \overset{e^{i\cdot}}{\longmapsto} S^1 \setminus \{N\} \overset{p_N}{\longmapsto} \mathbb{R}$$

$$F(t) = \frac{\sin t}{1-\cos t} \quad (0,2\pi) \to \mathbb{R} \text{ ist stetig,}$$

und $e^{i\cdot}$ ist surjektiv genau dann, wenn F surjektiv ist. Nun ist

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{1-\cos t} = \lim_{t\to 0+} \frac{\cos t}{\sin t} = \infty$$
$$\lim_{t\to 2\pi-} \frac{\sin t}{1-\cos t} = \lim_{t\to 2\pi-} \frac{\cos t}{\sin t} = -\infty$$

d.h. F ist surjektiv nach dem Zwischenwertsatz.

VL: Mo, 2003-05-05

Allgemeines Schema der Diskussion spezieller Funktionen

1. Explizite Definition durch einen algbraischen oder analytischen Ausdruck, der die Funktion eindeutig festlegt.

$$F(x) = x^n - 1 \quad \text{(Polynom)}$$
$$f(x) = \exp(x) = \sum_{j\geqslant 0} \frac{x^j}{j!} \quad \text{(Potenzreihe)}$$

2. Funktionalgleichungen
   Koeffizienten ausgedrückt durch die Wurzeln, Produktdarstellung
   $$\exp(z+w) = \exp z \exp w$$
   Lösung der Differentialgleichung $f'(t) = f(t), f(0) = 1$
3. Spezielle Werte/ Funktionswertetafeln

   Wurzeln von $f^{-1}(0)$
   $$\exp(0) = 1, \ \ \exp(2\pi i k) = 1 \ \forall k \in \mathbb{Z}, \ \ \lim_{x \to \pm\infty} \exp(x) = \begin{cases} \infty \\ 0 \end{cases}$$
4. Skizze der Graphen (über $\mathbb{R}$ oder Geraden in $\mathbb{C}$)
5. Ableitung und andere anal. Ausdrücke
   $$\exp(ix) = \cos x + i \sin x$$

3.2.29 Definition

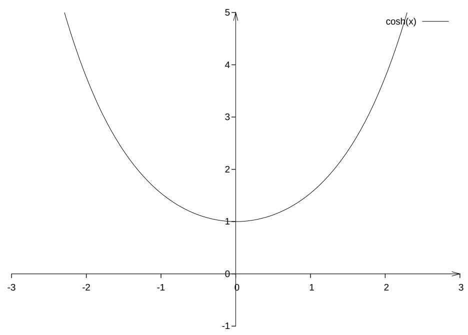
Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C} \to \mathbb{C}$) heißt *gerade* (bzw. *ungerade*), falls $f(-x) = f(x)$ (bzw. $f(-x) = -f(x)$).

Bem. Jede Funktion $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion, denn

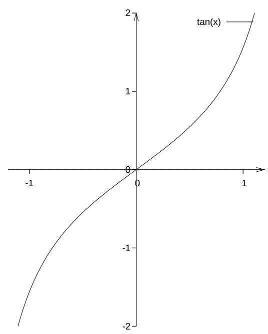
$$f(z) = \underbrace{\frac{1}{2}(f(z) + f(-z))}_{\text{gerade}} + \underbrace{\frac{1}{2}(f(z) - f(-z))}_{\text{ungerade}}$$

Beispiele

1. Polynom
   $$f(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j = \sum_{j=0}^{n} a_j [\frac{1}{2}(\underbrace{z^j + (-z)^j}_{\begin{cases} 2z^j, \ j \equiv 0 \pmod 2 \\ 0, \ j \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}}) + \frac{1}{2}(\underbrace{z^j - (-z)^j}_{\begin{cases} 0, \ j \equiv 0 \pmod 2 \\ 2z^j, \ j \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}})]$$
2. $$\exp(iz) = \frac{1}{2}[\exp(iz) + \exp(-iz)] + \frac{1}{2}[\exp(iz) - \exp(-iz)] = \cos z + i \sin z$$
3. $$\begin{aligned} \exp(z) &= \frac{1}{2}[\exp(z) + \exp(-z)] + \frac{1}{2}[\exp(z) - \exp(-z)] \\ &= \cosh z + \sinh z \end{aligned}$$
   Cosinus / Sinus hyperbolicus



Cosinus hyperbolicus: „Sieht aus” wie eine Parabel, beschreibt eine massive Kette.



$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\tan x = 1 \iff \sin x = \cos x \iff \sin^2 x = 1 - \sin^2 x \iff \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \overset{?}{\iff} x = \frac{\pi}{4}$$

3.2.30 Umkehrfunktionen

$\sin : \mathbb{R} \to [-1{,}1]$ ist nicht bijektiv, aber $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} = I$ ist streng monoton wachsend, weil für $x_1 < x_2 \ \in I folgt:$

$$\sin x_2 - \sin x_1 = (x_2 - x_1)\cos\theta,\ \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

Arcusfunktionen arcsin/cos/tan/cot

$$\arcsin := (\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})^{-1} \quad \text{„Hauptzweig“!}$$

$$\arcsin'(\sin x) = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Die allgemeine Potenz

Frage: Wie definieren wir a^b für $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$? Für $b \in \mathbb{Q},\ b = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$, hatten wir $a^b = a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a^m})$.
Sei $b \in \mathbb{Q},\ a > 0$

$$0 < a^m = \exp \circ \log a^m = \exp(m \log a)$$

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a \quad \Rightarrow \ n \cdot \log a^{\frac{1}{n}} = \log a$$

$$\Rightarrow \quad \log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log a \quad \Rightarrow \ \log a^b = b \cdot \log a$$

$$\Rightarrow \quad a^b = \exp \circ \log(a^b) = \exp(b \cdot \log a)$$

3.2.31 Definition

Für $a > 0,\ x \in \mathbb{R}$ definieren wir $a^x := \exp(x \log a)$.
$1 = \log(\exp(1))$; setze ein $a = \exp(1) =: e$ (Eulersche Zahl)

$$e = \sum_{j \geqslant 0} \frac{1}{j!} \approx 2{,}718$$

$$\boxed{\Rightarrow \ \exp(x) = \exp(x \log e) = e^x}$$

e ist nicht rational, sogar transzendent, das heißt es gibt *kein Polynom* $f(z) = \sum_{j \geqslant 0} a_j z^j$ mit $a_j \in \mathbb{Z}$ und $f(e) = 0$.
z.B.$(\sqrt{p})^2 - p = 0$ *algebraisch*

Beispiel Für $x > 0$ ist $\frac{d}{dx} x^a = \frac{d}{dx} e^{a \log x} = e^{a \log x} \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{-1} x^a = a x^{a-1}$
Für $x \in \mathbb{R},\ a > 0$ ist $\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{x \log a} = a^x \log a$.
Die Ableitung $\mathbb{C} \ni z \ \mapsto \ e^z \in \mathbb{C}$
Wir hatten gesehen, daß die Abb. $[0, 2\pi) \ni x \mapsto e^{ix} \in S^1$ bijektiv ist.

3.2.32 Definition

Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ schreiben wir $\arg z \in [0,\ 2\pi)$ für die eindeutig bestimmte Zahl mit der Eigenschaft

$$e^{i \arg z} = \frac{z}{|z|}.$$

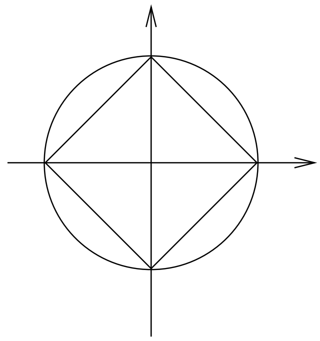
Also ist $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = e^{\log |z|} \cdot e^{i \cdot \arg z} = e^{(\log |z| + i \arg z)}$
Also ist $\exp|_{\{z \in \mathbb{C};\ 0 \leqslant \mathrm{Im} z < 2\pi\}} : \{||\} \to C^*$ bijektiv. Die Umkehrung heißt der Hauptzweig des komplexen Logarithmus und ist gegeben durch

$$\log z := \log |z| + i \cdot \arg z$$

Anwendung: Das Polynom $f(z) = z^n - 1,\ n \in \mathbb{N}$ hat die Nullstellen

$$\vartheta_{n,k} = e^{\frac{k}{n}2\pi i};\ 0 \leqslant k \leqslant n-1$$

Sie heißen die n-ten Einheitswurzeln z.B. $n = 4$:



3.3 Höhere Ableitungen

3.3.1 Definition

$f : \mathbb{R} \supset \mathcal{D}(f) \to \mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$ heißt in $\mathcal{D}(f)$ n-mal diffb., $n \in \mathbb{Z}_+$, mit der Ableitung $f^{(n)} : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$, wenn $\mathcal{D}(f)$ *offen* ist und $f^{(0)}(x) := f(x)$, und für $n \geqslant 1$ $f^{(n)}(x) := \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x)$ existiert für alle $x \in \mathcal{D}(f)$.

Beispiel: $f(x) := \log(1+x),\ x \in (-1,\ 1)$ Dann ist f diffb. in $\mathcal{D}$ mit

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= \frac{1}{1+x} \\
f^{(2)}(x) &= \frac{-1}{(1+x)^2} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{(-1)(-2)}{(1+x)^3} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{(-1)(-2)(-3)}{(1+x)^4} \\
&\ \vdots \\
f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)(-2)(-3)\ldots(-n+1)}{(1+x)^n} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(0) &= (-1)^{n-1}(n-1)!,\ n \geqslant 1 \\
f^{(0)}(0) &= 0.
\end{aligned}$$

Wir schreiben auch $f^{(n)}(x) = \partial_x^n f(x)$

3.3.2 Hilfsatz

Es sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ offen und $f_1,\ f_2$ seien n-mal differenzierbar in $\mathbb{R}$. Dann gilt

1. $\partial_x^n(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \partial_x^n f_1 + \alpha_2 \partial_x^n f_2$

2. Leibnizregel $\quad \partial_x^n(f_1 f_2)(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \partial_x^j f_1(x) \partial_x^{n-j} f_2(x)$

Beweis (1) ✓
(2) Wir beweisen durch Induktion (!), daß es Konstanten c_n^j gibt, $0 \leqslant j \leqslant n$, unabhängig von f_i, so daß

$$\partial_x^n(f_1 f_2) = \sum_{j=0}^n c_n^j \partial_x^j f_1 \partial_x^{n-j} f_2$$

Zur Bestimmung der c_n^j wählen wir $f_1,\ f_2$ speziell, nämlich $f_1(x) = x^j,\ f_2(x) = x^{n-j}$ für ein j.
Dann folgt

$$\begin{aligned} n! = \partial_x^n(x^n)|_{x=0} &= c_n^j j!(n-j)! \\ = \sum_{k=0}^n c_n^k (\partial_n^k x^j)|_{x=0} &(\partial_n^{n-k} x^{n-j})|_{x=0} \end{aligned}$$

3.3.3 Definition der Klassen $\mathcal{C}^k$

VL: Do, 2003-05-08

Ist $f: \ \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ $n-$mal diffenzierbar und ist $f^{(n)}$ in $\mathcal{D}$ stetig, so heißt f in $\mathcal{D}$ $n-$mal stetig differenzierbar, in Zeichen

$$f \in \mathcal{C}^n(\mathcal{D}, \mathbb{R}) =: \mathcal{C}^n(\mathcal{D})$$

(auch: f ist von der Klasse $\mathcal{C}^n$)
Insbesondere $\mathcal{C}^0(\mathcal{D})$ = die Menge der auf $\mathcal{D}$ stetigen Funktionen

3.3.4 Definition

Sei $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}) = \bigcap\limits_{n \geqslant 0} \mathcal{C}^n(\mathcal{D})$ die Menge aller auf $\mathcal{D}$ beliebig oft differenzierbaren Funktionen. (Kürzer: Funktionen von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$)

Bemerkungen

1. $\mathcal{C}^n(\mathcal{D})$ ist eine Algebra.

2. $\mathcal{C}^\infty \subset \mathcal{C}^n \subset \mathcal{C}^{n-1} \subset \ldots \subset \mathcal{C}^0$

3. $P \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$
   $e^x, \sin, \cos \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \log \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$

$$\frac{d^n}{dx^n} e^x = e^x, \quad \frac{d^n}{dx^n} \log x = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{x^n}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin x = \begin{cases} \sin x & n = 4k \\ \cos x & n = 4k+1 \\ -\sin x & n = 4k+2 \\ -\cos x & n = 4k+3 \end{cases}$$

Erinnerung

$$\begin{aligned}
P(y) &= \sum_{j=0}^{n} a_j (y-x)^j, \quad a_j \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{C} \\
P^{(1)}(y) &= \frac{d}{dy} P(y) = a_n n (y-x)^{n-1} + \ldots + 2a_2(y-x) + a_1 \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j j (y-x)^{j-1}
\end{aligned}$$

$$\text{Allgemeiner: } P^{(k)}(y) = \frac{d^k P}{dy^k}(y) = \sum_{j=k}^{n} a_j j(j-1)\cdots(j-k+1)(y-x)^{j-k}$$

$$\begin{aligned}
P^{(k)}(x) = k!\ a_k \Rightarrow a_k &= \frac{1}{k!} P^{(k)}(x) \\
\Rightarrow P(y) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} P^{(j)}(x)(y-x)^j
\end{aligned}$$

Es sei nun $f:\ \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Sei $x \in \mathcal{D}$ fest. Wir suchen dazu ein Polynom T eines Grades $\leqslant n$:

$$T(x) = f(x),\ T'(x) = f'(x), \ldots, T^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$$

Nach der obigen Formel gilt

$$T(y) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(x)(y-x)^j$$

3.3.5 Definition

$$T_n f(x,h) := \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j, \quad x, x+h \in \mathcal{D}$$

heißt das n-te *Taylor-Polynom* von f bezüglich der Stelle x.
(Brook Taylor (1685-1731), in Cambridge Schüler von Newton)

$$T_0 f(x,h) = f(x),\ T_1 f(x,h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!} h, \ldots$$

3.3.6 Satz (Taylorformel mit Restglied von Cauchy)

Sei f in $\mathcal{D}$ $(n+1)$-mal differenzierbar und $x, x+h \in \mathcal{D}(f)$. Dann existiert ein $\vartheta = \vartheta(x,h) \in (0{,}1)$ so, dass

$$f(x+h) = T_n f(x,h) + \underbrace{\frac{(1-\vartheta)^n h^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(x+\vartheta h)}_{R_n f(x,h)\ \text{(Cauchy-Restglied)}}$$

Mit $\xi = x + \vartheta h$ ein Punkt zwischen x und $x+h$ gilt

$$R_n f(x,h) = \frac{h(x+h-\xi)^n}{n!} f^{(n+1)}(\xi)$$

Beweis Sei $g: \ [x, x+h] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(y) := T_n f(y, x+h-y) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(y)}{j!}(x+h-y)^j$$

g ist differenzierbar in $\mathcal{D}$.

$$g(x) = T_n f(x,h), \quad g(x+h) = T_n f(x+h, 0) = f(x+h)$$

Wir wenden den MWS auf g an:

$$f(x+h) - T_n f(x,h) = g(x+h) - g(x) = hg'(\xi)$$

wobei $\xi = x + \vartheta h$ in $(x, x+h)$ liegt mit $\vartheta \in (0,1)$.
Aber $g'(y) = \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x+h-y)^n$ (siehe unten). Es folgt

$$\begin{aligned} f(x+h) - T_n f(x,h) &= h(x+h-x-\vartheta h)^n \frac{f^{(n+1)}(x+\vartheta h)}{n!} \\ &= \frac{h^{n+1}(1-\vartheta)^n}{n!} f^{(n+1)}(x+\vartheta h) =: R_n f(x,h) \end{aligned}$$

Wir berechnen nun

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{d}{dy} \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(y)}{j!}(x+h-y)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j+1)}(y)}{j!}(x+h-y)^j + \sum_{j=1}^{n} \frac{f^{(j)}(y)}{j!}(x+h-y)^{j-1} j(-y)' \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j+1)}(y)}{j!}(x+h-y)^j - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(y)}{j!}(x+h-y)^j \\ &= \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x+h-y)^n \end{aligned}$$

□

3.3.7 Satz (Taylorformel mit Lagrange-Restglied)

Unter den obigen Voraussetzungen ist

$$f(x+h) = T_n f(x,h) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x+\vartheta h)}{(n+1)!} h^{n+1}}_{\text{Lagrange-Restglied}}$$

(einfach das nächste Glied im Taylor-Polynom T_{n+1}, wobei lediglich das Argument x von $f^{(n+1)}$ durch $x + \vartheta h$ zu ersetzen ist)

Beweis Bilde

$$F(y) = f(x+h) - g(y) - \sigma \frac{(x+h-y)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Dann ist $F(x+h) = 0$. Wir bestimmen σ so, dass $F(x) = 0$, d.h.

$$f(x+h) = g(x) + \sigma\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} = T_n f(x,h) + \sigma\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

Für σ so bestimmt kann man den Satz von Rolle anwenden:

$$\begin{aligned}
&\exists\xi = x + \vartheta h,\ \vartheta \in (0{,}1) \text{ mit } F'(\xi) = 0\\
&\Rightarrow 0 = -g'(\xi) - \sigma\frac{(x+h-\xi)^n(n+1)}{(n+1)!}(-y)'\\
\Rightarrow \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x+h-\xi)^n = g'(\xi) &= \sigma\frac{(x+h-\xi)^n}{n!},\ x+h-\xi \neq 0\\
&\Rightarrow f^{(n+1)}(\xi) = \sigma
\end{aligned}$$

Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}),\ \mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ offen, $x \in \mathcal{D}$. Das Taylor-Polynom $T_n f$ ist die n-te Teilsumme der Taylor-Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}f^{(j)}(x)h^j$$

Eine Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} g_j(h)$ heißt gleichmäßig konvergent auf $\mathcal{D}$, wenn die Folge der Teilsumme $s_n(h) = s_0(h) + \ldots + s_n(h)$ auf $\mathcal{D}$ gleichmäßig konvergiert.

Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} g_j(h)$ heißt punktweise konvergent, wenn $s_n(h) \to s(h)\ \forall h \in \mathcal{D}$.

Also $f(x+h) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}f^{(j)}(x)h^j$ punktweise (bzw. gleichmäßig) konvergent genau dann, wenn $T_n f(x,h) \to f(x+h)$ punktweise/gleichmäßig.

3.3.8 Satz

a) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}),\ x, x+h \in \mathcal{D}$

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}f^{(j)}(x)h^j \iff \lim_{n\to\infty} R_n(x,h) = 0$$

b) $f(x+h) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}f^{(j)}(x)h^j$ gleichmäßig konvergent, wenn $|R_n(x,h)| \leqslant a_n\ \forall h$ mit $x+h \in \mathcal{D}$, wobei $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
Beweis: $|f(x+h) - T_n f(x,h)| = |R_n f(x,h)| \leqslant a_n$

Beispiel

$f:\ [-T,T] \to \mathbb{R},\ f(x) = e^x,\ x = 0,\ f^{(n)}(x) = e^x,\ f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

$$\begin{aligned}
T_n f(0,h) &= 1 + \frac{h}{1!} + \frac{h^2}{2!} + \ldots + \frac{h^n}{n!}\\
R_n f(0,h) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} = \frac{e^\xi h^{n+1}}{(n+1)!},\ \xi \in (0,h)\ \text{(Lagrange)}\\
|R_n f(0,h)| &\leqslant \frac{e^T T^{n+1}}{(n+1)!},\quad \lim_{n\to\infty}\frac{T^{n+1}}{(n+1)!} = 0\\
&\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \text{ gleichmäßig konvergent auf } [-T,T]
\end{aligned}$$

Weil T beliebig ist, gilt die punktweise Konvergenz auf $\mathbb{R}$.

Hinreichende Kriterien für Maxima und Minima

3.3.9 Satz

Sei $f:\ \mathcal{D} \to \mathbb{R},\ f \in \mathcal{C}^n,\ n \geqslant 2,\ a \in \mathcal{D}$ mit

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0,\ f^{(n)}(a) \neq 0$$

a) Wenn n gerade ist:

$$f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f \text{ hat in } a \text{ ein lokales Maximum.}$$
$$f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f \text{ hat in } a \text{ ein lokales Minimum.}$$

b) Wenn n ungerade ist, dann ist a kein lok. Extremum.

Beweis Taylorformel mit Lagrange-Restglied

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)(x-a)^n$$

mit ξ zwischen x und a, weil $T_{n-1}f(a, x-a) = f(a)$

- n gerade $\Rightarrow (x-a)^n \geqslant 0,\ (x-a)^n > 0$ für $x \neq a$
  $\Rightarrow$ In einer Umgebung von a hat $f(x) - f(a)$ das Vorzeichen von $f^{(n)}(a)$.
- n ungerade $\Rightarrow f(x) - f(a)$ wechselt das Vorzeichen in jeder Umgebung.

Bemerkung zu den Restgliedern

VL: Mo, 2003-05-12

Es sei $(*)_n$:

- f in $[a, b]$ definiert
- f in (a, b) $n+1$-mal diffb.
- $f^{(j)}$ stetig in $[a, b]$ für $a \leqslant j \leqslant n$

Dann ist $(*) = (*)_0$.
Für f mit $(*)_n$ sei

$$T_n f(x, h) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j \qquad \text{für } x, x+h \in (a, b)$$

$$f(x) =: T_n f(x, h) + R_n f(x, h)$$

Satz (zur Erinnerung): Es gibt $\vartheta \in (0, 1)$ mit

$$R_n f(x, h) = \begin{cases} (1-\vartheta)^n \frac{f^{(n+1)}(x+\vartheta h)}{n!} h^{n+1} & \text{Cauchy-Restglied} \\ \frac{f^{(n+1)}(x+\vartheta h)}{(n+1)!} h^{n+1} & \text{Lagrange-Restglied} \end{cases}$$

ϑ hängt von f, x, h, n und der Restgliedform ab! Großer Nachteil: ϑ ist *nicht explizit*!

Bemerkung: Es gibt etwas allgemeiner das *Schlömilch Restglied:*

$$\frac{(1-\vartheta)^{n+1-p}}{p} \cdot \frac{f^{(n+1)}(x+\vartheta h)}{n!} h^{n+1} \qquad \forall p = 1, \ldots, n+1$$

Wenn wir zeigen, dass $R_n f(x,h) \to 0$ für $n \to \infty$, dann ist die Analogie erreicht: f wird durch die Taylor-Reihe dargestellt.

Beispiele:

- $e^x = \sum\limits_{j \geqslant 0} \frac{x^j}{j!}$
- $\log(1+x) = \sum\limits_{j \geqslant 1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} x^j \qquad x \in (-1,1)$
- $(1+x)^\alpha = e^{\alpha \log(1+x)} = \sum\limits_{j \geqslant 0} \binom{\alpha}{j} x^j \qquad x \in (-1,1)$
  (mit $\binom{\alpha}{j} := \frac{\alpha \cdot \ldots \cdot (\alpha - j + 1)}{j!}$;
  Beweis der Reihendarstellung über das Cauchy-Restglied)

Bemerkung zu den Extremwerten:

Anwendung: $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ symmetrisch

$$\iff \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$$

Betrachte $f(x) := \langle Ax, x \rangle : S^{m-1} \to \mathbb{R}$. Dann ist f L.-stet. und S^{m-1} ist kompakt, also gibt es $e \in S^{m-1}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \leqslant \lambda = f(e) \quad \forall x \in S^{m-1}$.

$$\Rightarrow F_y(t) = \frac{\langle A(e+ty), e+ty \rangle}{|e+ty|^2} \leqslant F_y(0) = \lambda$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & \frac{d}{dt} F_y(t)|_{t=0} \\
= \ & \frac{|e+ty|^2 \frac{d}{dt}[\lambda + 2t\langle Ae, y \rangle + t^2|y|^2]|_{t=0} - \lambda \frac{d}{dt}[1 + 2t\langle e, y \rangle + t^2 |y|^2]|_{t=0}}{|e+ty|^2_{t=0}} \\
= \ & \frac{2\langle Ae, y \rangle - 2\langle \lambda e, y \rangle}{1}
\end{aligned}$$

$\iff \langle (A-\lambda)e, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$
$\iff Ae = \lambda e$ d.h. e ist Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

Induktiv: Es gibt eine orthogonale Basis $(e_i)_{i=1}^m$ (d.h. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$).

$$Ae_i = \lambda_i e_i \text{ d.h. bzgl. } (e_i) \text{ hat } A \text{ die Matrix } \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

f erfülle $(*)_1$ in $[a,b]$. Für $x_1 < x_2 \in (a,b)$ sei

$$S_f(x_1, x_2, x) = \underbrace{\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}}_{\mu_1} f(x_1) + \underbrace{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}_{\mu_2} f(x_2)$$

(also $\mu_1 + \mu_2 = 1$)

3.3.10 Definition

f erfülle $(*)_1$ in $[a,b]$. f heißt *konvex* (*streng konvex*) in $[a,b]$, wenn für jedes Tripel $x_1 < x < x_2 \in [a,b]$ gilt:

$$(K_1) \qquad f(x) \leqslant (<) S_f(x_1, x_2, x)$$

und *konkav* (*streng konkav*) wenn

$$f(x) \geqslant (>) S_f(x_1, x_2, x)$$

3.3.11 Hilfssatz

(K_1) ist äquivalent zu

$$(K_2) \qquad f(\lambda x_1 - (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in [a,b], \lambda \in [0,1]$$

Beweis: Setze $x := \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ in (K_1) mit $\lambda \in [0,1]$. Dann ist

$$\mu_1 = \frac{x_2 - \lambda x_1 - (1-\lambda)x_2}{x_2 - x_1} = \lambda$$

$$\mu_1 + \mu_2 = 1 \Longrightarrow \mu_2 = 1 - \lambda$$

$\Rightarrow$ Behauptung in beide Richtungen. $\square$

Vermutung: Dann gilt auch

$$(+) \qquad f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$$

$$x_i \in [a,b] \qquad \lambda_i \in [0,1] \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

3.3.12 Satz (Ungleichung von Jensen)

$(+)$ ist wahr. $\qquad$ (f konvex)

Beweis: Induktion über $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$
$n \to n+1$ (mit $\lambda_{n+1} \in (0,1)$)

$$\begin{aligned}
& f\left((1-\lambda_{n+1})\frac{(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)}{(1-\lambda_{n+1})} + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\
\overset{n=2}{\leqslant}\; & (1-\lambda_{n+1}) f\left(\underbrace{\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n}_{\in [a,b] (!)}\right) + \lambda_{n+1} f(x_n + 1) \\
\overset{n}{\leqslant}\; & (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)
\end{aligned}$$

$\square$

Folgerung:

$$a_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \log a_i \leqslant \log(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n)$$

Mit Jensen für „konkav" ist z.z.: log ist konkav.

3.3.13 Satz

f erfülle $(*)$ in $[a,b]$. f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geqslant 0$, $x \in (a,b)$.

Beweis: $\Rightarrow$: Verwende $(+)$ für $x-h, x+h \in (a,b)$. $x_1 := x+h, x_2 := x-h, \lambda = \frac{1}{2}$

$$f(x) = f\left(\frac{1}{2}(x+h) + \frac{1}{2}(x-h)\right) \leqslant \frac{1}{2}\big[f(x+h) + f(x-h)\big]$$

oder $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geqslant 0 \quad \overset{\text{Ü 4.2}}{\Longrightarrow} f''(x) \geqslant 0$.

$\Leftarrow$: Betrachte für $x_1 < x_2 \in (a,b)$ die Funktion

$$(f - S_f)(x) =: F(x), x \in [x_1, x_2]$$

Z.z.: $F(x) \leqslant 0$
Dann ist $F(x_i) = 0, \quad i = 1,2$

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

und wegen $f''(x) \geqslant 0$ sind f' und F' $\nearrow$.
Es interessiert $F'(x_1)$:

1. Fall: $F'(x_1) < 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0$ mit $F(x_1 + \varepsilon) < F(x_1) = 0$.
Wäre $F(x_1 + \delta) > 0$, so gibt es $x', x'' \in (x_1, x_2)$ mit

$$\min F = F(x') < 0$$

$$\max F = F(x'') > 0$$

$\Rightarrow F'(x') = F'(x'') = 0$
$\Rightarrow F'(x) = 0$ in (x', x'') (monoton)
$\Rightarrow F =$ const. in (x', x'') Wid!
D.h. im 1. Fall gilt $F(x) \leqslant 0$ wie behauptet.

2. Fall: $F'(x_1) \geqslant 0$
$\overset{\text{Mon.}}{\Rightarrow} F'(x) \geqslant 0$ in $[x_1, x_2]$
$\Rightarrow$ wegen $F(x_2) = 0 \Rightarrow F \equiv 0$, insbes. $\leqslant 0$. $\square$

Anmerkung: Für $\leqslant 0$ erhalten wir „konkav".

$$\frac{d^2}{dx^2} \log x = \frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

3.4 Potenzreihen

3.4.1 Definition

Zu jeder Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}_+} \subset \mathbb{C}$ von komplexen Zahlen bilden wir die *formale Potenzreihe*

$$\sum_{j\geqslant 0} a_j z^j$$

ohne Interesse für die Konvergenz.

Aber: Es gibt immer Konvergenz für $z = 0$.

Frage: Gibt es zu geg. (a_j) ein $z \neq 0$, sodass die Reihe konvergiert?

Annahme: Die Potenzreihe $\sum a_j z^j$ konvergiert für $z_1 \neq 0$.
Dann gilt

$$\lim_{j\to\infty} |a_j z_1^j| = \lim_{j\to\infty} |a_j| \cdot |z_1^j| = 0$$

Insbesondere gibt es $C > 0$ mit $|a_j| \cdot |z_1|^j \leqslant C \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sqrt[j]{|a_j|}|z_1| \leqslant \sqrt[j]{C} = e^{\frac{1}{j}\log C} \overset{j\to\infty}{\to} 1 \\
&\Rightarrow \sqrt[j]{|a_j|} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{|z_1|} \qquad \text{für } j \geqslant j(\varepsilon) \qquad \text{insbes. beschränkt} \\
&\Rightarrow \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|} = \varrho \leqslant \frac{1}{|z_1|}
\end{aligned}$$

$$\text{Wir setzen } \varrho := \begin{cases} \limsup \sqrt[j]{|a_j|} & \text{falls } (\sqrt[j]{|a_j|}) \text{ beschr.} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

1. Fall: $\varrho = 0 = \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|a_j|}$
$\Rightarrow |a_j| \cdot |z^j| = \left(\sqrt[j]{|a_j|}|z|\right)^j \leqslant (\varepsilon|z|)^j$ für $j \geqslant j_0(\varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0$
Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2|z|} \Rightarrow \sum a_j z^j$ konv. $\forall z \in \mathbb{C}$

2. Fall: $\varrho = \infty$
D.h. $\lim_{k\to\infty} \sqrt[j_k]{|a_{j_k}|} = \infty$
$\Rightarrow$ für $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist

$$|a_{j_k}| \cdot |z|^{j_k} = \left(\underbrace{\sqrt[j_k]{|a_{j_k}|}}_{\geqslant \frac{1}{|z|} \text{ für } k \geqslant k(z)} |z| \right)^{j_k} \geqslant 1$$

Also konvergiert die Reihe für kein $z \in \mathbb{C}^*$.

VL: Do, 2003-05-15

Potenzreihen (PR)

$$\sum_{j\geqslant 0} a_j z^j, {}_j, \ z \in \mathbb{C}$$

Wann konvergiert diese Reihe?

1. Immer für $z = 0$
2. Konvergenz für $z_0 \neq 0 \Rightarrow |a_j||z_0|^j \to 0$
$$\Rightarrow |a_j||z_0| \leqslant c$$
$$\Rightarrow \sqrt[j]{|a_j|}|z_0| \leqslant \sqrt[j]{c}$$
$$\varrho := \lim_{n\to\infty} \sup \sqrt[j]{|a_j|} \leqslant \frac{1}{|z_0|}$$
$$\varrho = 0 \Rightarrow \text{ Konvergenz für alle } z \in \mathbb{C}$$
$$\varrho = \infty \Rightarrow \text{Konvergenz nur für } z = 0$$
3. $0 < \varrho < \infty$
Wähle z mit $|z| < \frac{1}{\varrho}$, also gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit
$$|z| \leqslant \frac{1}{\varrho + 2\varepsilon}$$
Für $j \geqslant j_0(\varepsilon)$ ist $\sqrt[j]{|a_j|} \leqslant \varrho + \varepsilon$, also
$$|a_j||z|^j = (\sqrt[j]{|a_j|}|z|)^j \leqslant \left(\frac{\varrho+\varepsilon}{\varrho+2\varepsilon}\right)^j \quad \text{(geometrische Reihe)}$$
$$\Rightarrow \sum_{j\geqslant 0} a_j z^j \text{ ist absolut konvergent!}$$
Ist $|z| > \frac{1}{\varrho} \Rightarrow |z| \geqslant \frac{1}{\varrho-\varepsilon}$ für ein $\varepsilon > 0$ und es gibt $l_0 = l_0(\varepsilon)$ so, daß $\sqrt[j_l]{|a_{j_l}|} \geqslant \varrho - \varepsilon$ für $l \geqslant l_0(\varepsilon)$
$$\Rightarrow |a_{j_l} z^{j_l}| = (\sqrt[j_l]{|a_{j_l}|}|z|)^{j_l} \geqslant ((\varrho-\varepsilon)\frac{1}{\varrho-\varepsilon})^{j_l}, \ l \geqslant l_0(\varepsilon)$$
$\Rightarrow$ keine Konvergenz.

3.4.2 Definition

Für die durch $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$ definierten Potenzreihen setzen wir

$$R := \begin{cases} \frac{1}{\varrho}, & \text{falls } 0 < \varrho < \infty \\ 0, & \text{falls } \varrho = \infty \\ \infty, & \text{falls } \varrho = 0 \end{cases}$$

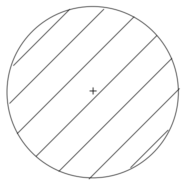
R heißt *Konvergenzradius* von $\sum a_j z^j$

3.4.3 Satz

Die durch $(a_j)_{j\in\mathbb{Z}_+}$ definierte Potenzreihe ist

- absolut konvergent für $|z| < R$,
- divergent für $|z| > R$.

In $\{z: \ |z| \leqslant R'\}$ ist die Potenzreihe glm. konvergent *für jedes* $R' < R$.



Beispiele

1. $\sum_{j\geqslant 0} z^j$ hat $R = 1$, ist aber niemals konvergent für $|z| = 1$

$$\sum_{j\geqslant 0} z^j = \frac{1}{1-z} = f(z) \quad \text{singulär für } z = 1$$

2.

$$\sum_{j\geqslant 1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} z^j \Rightarrow \sqrt[j]{\frac{1}{j}} = \frac{1}{\sqrt[j]{j}} \to 1$$

$\Rightarrow R = 1$, divergent für $z = -1$, aber konvergent für $z = 1$!

3.

$$\sum_{j\geqslant 1} \frac{z^j}{j^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[j]{j^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt[j]{j}}\right)^2 \to 1$$

$\Rightarrow R = 1$, aber absolut konvergent für $|z| = R$!

4.

$$\sum_{j\geqslant 0} \frac{z^j}{j!} = e^z \text{ konvergiert } \forall z \in \mathbb{C} \Rightarrow R = \infty$$

$$\log \sqrt[j]{j!} = \frac{1}{j} \cdot \sum_{k=1}^{j} \log k \geqslant \frac{1}{j} \sum_{k=\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}^{j} \log k \geqslant \frac{j - \lfloor \frac{j}{2} \rfloor}{j} \log \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor \geqslant \frac{1}{2} \log \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

$[x] := \sup\{n \in \mathbb{Z}; n \leqslant x\}$

3.4.4 Hilfssatz

Es sei $f(z) = \sum_{j\geqslant 0} a_j z^j$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ (und $\varrho = \frac{1}{R}$). Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C_\varepsilon > 0$ so, daß $|a_j| \leqslant C_\varepsilon(\varrho + \varepsilon)^j$ (*).

Beweis Für $j \geqslant j_0(\varepsilon)$ gilt $(*)$ mit $C_\varepsilon = 1$. Für $j < j_0(\varepsilon)$ gilt $|a_j| = \frac{|a_j|}{(\varrho+\varepsilon)^j}(\varrho + \varepsilon)^j$, also $C_\varepsilon = \max\left\{1, \left(\frac{|a_j|}{(\varrho+\varepsilon)^j}\right)_{j=0}^{j_0-1}\right\}$.

3.4.5 Satz

Gegeben seien Potenzreihen

$$f^k(z) = \sum_{j\geqslant 0} a_j^k z^j \text{ mit KR } R_k > 0,\ k = 1, 2.$$

1. $$\alpha_1 f^1(z) + \alpha_2 f^2(z) = \sum_{j\geqslant 0} (\alpha_1 a_j^1 + \alpha_2 a_j^2) z^j$$

   hat Konvergenzradius $R \geqslant \min\{R_1, R_2\}$

2. $$f^1 f^2(z) = \sum_{j\geqslant 0} a_j^1 z^j \sum_{k\geqslant 0} a_k^2 z^k = \sum_{j,k\geqslant 0} z^{j+k} a_j^1 a_k^2 = \sum_{l=0} z^l \left[\sum_{j+k=l} a_j^1 a_k^2\right] \quad \text{"Cauchy-Produkt"}$$

   ist ein Potenzreihe mit KR $R \geqslant \min\{R_1, R_2\}$.

3. Die Potenzreihen

   $$f^{1(j)} = \sum_{k\geqslant 0} k(k-1)\cdots(k-j+1) a_k^1 z^{k-j}$$

   haben den KR R_1. Ferner gilt $f^{1(0)}(z) = f^1(z)$,

   $$f^{1(j+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{1(j)}(z+h) - f^{1(j)}(z)}{h} \qquad \text{!Komplexe Zahlen!}$$

4. $$f^1(z+h) = \sum_{j\geqslant 0} \frac{f^{1(j)}(z)}{j!} h^j \qquad \text{für } |z| < R_1 \text{ und } |h| < R_1 - |z|.$$

Beweis: o.B.d.A. $R_1 \leqslant R_2 \Leftrightarrow \varrho_1 \geqslant \varrho_2$

1. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein C_ε mit

   $$|\alpha_1 a_j^1 + \alpha_2 a_j^2| \leqslant |\alpha_1| C_\varepsilon^1 (\varrho_1+\varepsilon)^j + |\alpha_2| C_\varepsilon^2 (\varrho_2+\varepsilon)^j \leqslant \underbrace{\max_{k=1,2} C_\varepsilon^k (|\alpha_1| + |\alpha_2|)}_{=:C_\varepsilon} (\varrho_1+\varepsilon)^j$$

   $\Rightarrow$ Konvergenz für $\varrho_1 |z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{\varrho_1} = R_1$ $\square$

2. $$\left|\sum_{j+k=l} a_j^1 a_k^2\right| \leqslant \sum_{j+k=l} (C_\varepsilon^1 (\varrho_1+\varepsilon)^j C_\varepsilon^2 (\varrho_2+\varepsilon)^k) \leqslant (\varrho_1+\varepsilon)^l \underbrace{C_\varepsilon^1 C_\varepsilon^2}_{C_\varepsilon} (l+1)$$

   $$= C_\varepsilon (l+1) \left(\frac{\varrho_1+\varepsilon}{\varrho_1+2\varepsilon}\right)^l (\varrho_1+2\varepsilon)^l \leqslant C_\varepsilon (\varrho_1+2\varepsilon)^l$$

   $\square$

3. „1” wird unterdrückt!

$$f^{(j)} := \sum_{k\geqslant j} k(k-1)\cdots(k-j+1)a_k z^{k-j}$$
$$= \sum_{k\geqslant 0} \frac{(k+j)!}{k!} a_{k+j} z^k$$

Also müssen wir berechnen

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_{k+j}|\frac{(k+j)!}{k!}} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_{k+j}|}\sqrt[k]{(k+1)\cdots(k+j)}$$
$$= \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_{k+j}|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left(\sqrt[k+j]{|a_{k+j}|}\right)^{\frac{k+j}{k}} = \varrho$$

$\Rightarrow$ KR $=R$

Zu zeigen $f^{(j+1)}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(j)}(z+h)-f^{(j)}(z)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \sum_{k\geqslant j} k\cdots(k-j+1)a_k \left[\frac{(z+h)^{k-j} - z^{k-j}}{h}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \sum_{k\geqslant j} k\cdots(k-j+1)a_k \frac{1}{h}\left[\sum_{l=0}^{k-j}\binom{k-j}{l}h^l z^{k-j-l} - z^{k-j}\right]$$
$$= \lim_{h\to 0} \sum_{k\geqslant j} k\cdots(k-j+1)a_k \sum_{l=1}^{k-j}\binom{k-j}{l}h^{l-1}z^{k-j-l}$$
$$\overset{?}{=} \sum_{k\geqslant j+1} k\cdots(k-j+1)(k-j)a_k z^{k-j-1}$$

wenn die Reihe glm. konvergent für $h \in B_\varepsilon^{\mathbb{C}}(0)$ für ein $\varepsilon > 0$.

Dazu wollen wir eine glm. Majorante (in h) für die Reihen finden. D.h.:

$$k(k-1)\cdots(k-j+1)|a_k|\sum_{l=1}^{k-j}\binom{k-j}{l}|h|^{l-1}|z|^{k-j-l}$$
$$= k\cdots(k-j+1)|a_k|\sum_{l=0}^{k-j-1}\binom{k-j}{l+1}|h|^l|z|^{k-j-l-1}$$
$$\left[\binom{k-j}{l+1} = \frac{(k-j)!}{(k-j-l-1)!(l+1)!} = \frac{(k-j-1)!}{l!(k-j-l-1)!}\cdot\frac{k-j}{l+1} = \binom{k-j-1}{l}\cdot\frac{k-j}{l+1}\right]$$
$$= k\cdots(k-j+1)|a_k|\sum_{l=0}^{k-j-1}\binom{k-j-1}{l}\frac{k-j}{l+1}|h|^l|z|^{k-j-1-l}$$
$$= k(k-1)\cdots(k-j+1)|a_k|\frac{k-j}{l+1}(|h|+|z|)^{k-j-1}$$

ohne ”$(k-j)$” konvergent für $|h|+|z|<R$, mit ”$(k-j)$” ändert sich aber der Konvergenzradius nicht! □

4.

$$\begin{aligned}
f(z+h) &= \sum_{j\geqslant 0} a_j (z+h)^j \\
&= \sum_{j\geqslant 0} a_j \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} z^{j-k} h^k \\
&\overset{?}{=} \sum_{k\geqslant 0} \frac{h^k}{k!} \sum_{j\geqslant k} a_j \frac{j!}{(j-k)!} z^{j-k} \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \frac{h^k}{k!} \sum_{j\geqslant k} j(j-1)\cdots(j-k+1) a_j z^{j-k} \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} h^k
\end{aligned}$$

□

VL: Mo, 2003-05-19

Bemerkung Die Ungleichung $R \geqslant \min\{R_1, R_2\}$ in 1./2. ist nicht scharf, z.B.

$$a_j^1 \equiv 1; \quad \{a_0^2 = 1,\ a_1^1 = -1,\ a_j^2 = 0\ \forall j \geqslant 2\}$$

$$\Rightarrow (\sum_{j\geqslant 0} z^j)(1-z) = 1\ \forall z$$

Wir haben die Konvergenz von Doppelreihen benutzt, genauer dass

$$\boxed{\sum_{i\geqslant 0}\sum_{j\geqslant 0} a_{ij} = \sum_{j\geqslant 0}\sum_{i\geqslant 0} a_{ij}}$$

$\mathbb{N} \xrightarrow{\psi} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \xrightarrow{a} \mathbb{C}$, was ist $\sum\limits_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} a_{ij} \overset{?}{=} \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} a_{\psi(k)}$

Aber Das Ergebnis könnte von ψ abhängen!

3.4.6 Satz (B. Riemann)

Es sei $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i$ (oBdA $a_i \in \mathbb{R}$) konvergent, aber *nicht* absolut konvergent, d.h. $\sum_{i\in\mathbb{N}} |a_i| = \infty$

Dann gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Bijektion $\psi:\ \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ so, dass $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{\psi(i)} = x$.

Beweis

$$a_i^+ := \begin{cases} a_i, & a_i \geqslant 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad a_i^- := \begin{cases} -a_i, & a_i < 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt

$$(1) \quad \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i^\pm = \infty$$

$$(2) \quad \lim_{i\to\infty} a_i^\pm = 0$$

denn: (1) $\sum_{i\geqslant 1}|a_i| = \sum_{i\geqslant 1} a_i^+ + \sum_{i\geqslant 1} a_i^-$, $\quad |\sum a_i - \sum a_i^+| = \sum a_i^-$
(2) $\lim a_i = 0$
$x \in \mathbb{R},\ x > 0$ Wähle $i_1 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{i=1}^{i_1} a_i^+ \leqslant x < \sum_{i=1}^{i_1+1} a_i^+$

$$j_1 : \sum_1^{i_1+1} a_i^+ - \sum_1^{j_1} a_i^- > x > \sum_1^{i_1+1} a_i^+ - \sum_1^{j_1+1} a_i^-$$

□

3.4.7 Satz (Der große Umordnungssatz)

Es sei A eine abzählbare Menge, $a :\ A \to \mathbb{C}$. Es gelte

$$(**) \qquad \sum_{\alpha\in K} |a(\alpha)| \leqslant C < \infty$$

für alle endlichen Mengen $K \subset A$ und ein von K unabhängiges C.

Dann ist für jede Bijektion $\psi :\ \mathbb{N} \to A$ die Reihe $\sum_{i\in\mathbb{N}} a(\psi(i))$ konvergent, und ihr Wert ist unabhängig von ψ.

Beweis $\mathcal{K} = \{K \subset A; \#K < \infty\}$
Dann ex.

$$\sup_{K\in\mathcal{K}} \sum_{\alpha\in K} |a(\alpha)| =: C_0 \leqslant C$$

also gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $K_\varepsilon \in \mathcal{K}$ mit $C_0 \geqslant \sum_{\alpha\in K_\varepsilon} |a(\alpha)| \geqslant C_0 - \varepsilon$.

Ist dann K' eine endliche Menge mit $K' \supset K_\varepsilon$, dann gilt

$$\sum_{\alpha\in K'\setminus K_\varepsilon} |a(\alpha)| = \sum_{\alpha\in K'} |a(\alpha)| - \sum_{\alpha\in K_\varepsilon} |a(\alpha)| \leqslant C_0 - C_0 + \varepsilon = \varepsilon$$

Es seien nun $\psi_1, \psi_2 :\ \mathbb{N} \to A$ Bijektionen

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} |a(\psi_j(i))| \leqslant C_0 \text{ für } j = 1{,}2$$

$\Rightarrow$ Beide Reihen sind absolut konvergent. Zu $\varepsilon > 0$ wähle ich $N = N(\varepsilon)$ so, dass

$$\psi_1(\mathbb{N}_N) \cap \psi_2(\mathbb{N}_N) \supset K_\varepsilon \quad (N = \max\{\psi_1^{-1}(K_\varepsilon) \cup \psi_2^{-1}(K_\varepsilon)\})$$

Dann folgt

$$\left|\sum_{i=1}^{N} a(\psi_1(i)) - \sum_{i=1}^{N} a(\psi_2(i))\right| \leqslant \sum_{\alpha\in\psi_1(\mathbb{N}_N)\setminus K_\varepsilon} |a(\alpha)| + \sum_{\alpha\in\psi_2(\mathbb{N}_N)\setminus K_\varepsilon} |a(\alpha)| < 2\varepsilon$$

Also folgt die Behauptung. □

In diesem Fall nennen wir a über A *summierbar* mit Summe

$$\sum_{\alpha\in A} a(\alpha) := \sum_{i\in\mathbb{N}} a(\psi(i))$$

für eine Bijektion $\psi :\ \mathbb{N} \to A$.

Frage: Für $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; $\quad a : \ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ist eine Matrix

$$a = \begin{pmatrix} a(1,1) & a(1,2) & \cdots & a(1,n) & \cdots \\ a(2,1) & a(2,2) & & & \\ a(3,1) & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

$$\sum_i \underbrace{\sum_j a_{ij}}_{\text{Zeilensumme}} \stackrel{?}{=} \sum_j \underbrace{\sum_i a_{ij}}_{\text{Spaltensumme}}$$

Nun sei $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ eine Zerlegung von A, $a_i := a|A_i$ erfüllt (**).
Gilt dann $\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{A_i} a \stackrel{?}{=} \sum_A a$
Wähle $\varepsilon > 0$ und K_ε wie vorher, ferner

$$N = N(\varepsilon) = \max\{i \in \mathbb{N},\ A_i \cap K_\varepsilon \neq \emptyset\}$$

Betrachte dann $A^{(N)} := \bigcup_{i=1}^N A_i$ und schätze ab

$$\left| \sum_{i=1}^N \sum_{A_i} a - \sum_{K_\varepsilon} a \right| \leqslant \sum_{\alpha \in A^{(N)} \setminus K_\varepsilon} |a(\alpha)| \leqslant \varepsilon$$

Genauso gilt

$$\left| \sum_A a - \sum_{K_\varepsilon} a \right| \leqslant \sum_{\alpha \in A \setminus K_\varepsilon} |a(\alpha)| \leqslant \varepsilon$$

3.4.8 Satz (Doppelreihen)

Es sei $a : \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ gegeben mit $(**)$. Dann sind die Zeilen- und die Spaltensummen alle konvergent, und es gilt:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{ij} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} a_{ij}$$

Bemerkung Wir könnten den Sachverhalt ausdrücken durch

$$a(K) := \sum_{\alpha \in K} a(\alpha) \ {''} \underset{K \to A}{\longrightarrow} {''} \ \sum_A a$$

Präzisierung Die endlichen Mengen $K \in \mathcal{K}$ haben die Eigenschaft

$$K_1, K_2 \in \mathcal{K} \Rightarrow \exists K \in \mathcal{K} : \ K_1 \cup K_2 \subset K \iff K_j \subset K$$

Ich schreibe $K_1 \preccurlyeq K_2 \iff K_1 \subset K_2$.
Das ist eine Halbordnung auf $\mathcal{K}$, d.h.

$$(1)\ K \preccurlyeq K, \quad (2)\ K_1 \preccurlyeq K_2 \text{ und } K_2 \preccurlyeq K_1 \Rightarrow K_1 = K_2$$
$$(3)\ K_1 \preccurlyeq K_2,\ K_2 \preccurlyeq K_3 \Rightarrow K_1 \preccurlyeq K_3$$

Halbordung

(4) Zu $K_1, K_2\ \exists K:\ K_1 \preccurlyeq K,\ K_2 \preccurlyeq K$
gerichtetes System

$\mathbb{N}$ ist ein gerichtetes System.
Sei $\mathcal{K}$ ein gerichtetes System, $\tilde{a}:\ \mathcal{K} \to X$ eine Abb., X metrischer Raum.
$\Rightarrow (\tilde{a}(K))_{K\in\mathcal{K}}$ heißt ein Netz in X.
$(\tilde{a}(K))_{K\in\mathcal{K}}$ heißt konvergent gegen $x_0 \in X \iff$

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon \in \mathcal{K}:\ \forall K \succcurlyeq K_\varepsilon:\ d_X(\tilde{a}(K), x_0) < \varepsilon$$

3.4.9 Satz (Identitätssatz)

1) Ist $f(z) = \sum_{j\geqslant 0} a_j z^j$ eine Potzenzreihe mit $R > 0$ und gilt $f(z_n) = 0$ für eine Nullfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \dot{B}_R(0)$, so ist $a_j = 0\ \forall j \geqslant 0$.

2) Es gilt $a_j = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}$

Beweis 1) Durch Induktion über i

$$i = 0 \Rightarrow a_0 = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = 0$$

$$a_i = 0 \text{ für } 0 \leqslant i \leqslant i_0$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{i\geqslant i_0+1} a_i z^i = z^{i_0+1}(a_{i_0+1} + z a_{i_0+2} + \ldots)$$

$$\Rightarrow a_{i_0+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)}{z_n^{i_0+1}} = 0$$

2) Wir haben bewiesen, dass

$$f(z) = \sum_{j\geqslant 0} a_j z^j = \sum_{i\geqslant 0} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} z^i$$

$$\text{d.h. } 0 = \sum_{j\geqslant 0} \left(a_j - \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\right) z^j$$

$$\Rightarrow a_j = \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \text{ nach 1).}$$

□

Bemerkung Das bedeutet, dass wir Koeffizienten vergleichen können.
Sei $\sum_{j\geqslant 0} a_j z_0^j$ konvergent für ein z_0 mit $|z_0| = R$.
Betrachte

$$f(t) = \sum_{j\geqslant 0} a_j (t z_0)^j = \sum_{j\geqslant 0} \overbrace{(a_j z_0^j)}^{\alpha_j} \underbrace{t^j}_{\beta_j}$$

Ist f stetig in $t = 1$? Schärfer: Ist die Reihe gleichmäßig konvergent in [0,1]?

Betrachte $\sum_{j=n}^{n+m} \alpha_j\beta_j$ und setze $A_{n-1} = 0$; $A_i - A_{i-1} = \alpha_i$ für $i \geqslant n$, d.h.

$$\begin{aligned} A_{n+m} = {} & \underbrace{A_{n+m} - A_{n+m-1}}_{\alpha_{n+m}} + A_{n+m-1} - A_{n+m-2} + \dots \\ & + \underbrace{A_n - A_{n-1}}_{\alpha_n} + \underbrace{A_{n-1}}_{=0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow A_{n+m} = \sum_{j=n}^{n+m} \alpha_j$

$$\begin{aligned} \sum_{j=n}^{n+m} \alpha_j\beta_j &= \sum_{j=n}^{n+m} (A_j - A_{j-1})\beta_j \\ &= \sum_{j=n}^{n+m} A_j\beta_j - \sum_{j=n}^{n+m} A_{j-1}\beta_j \\ &= \sum_{j=n}^{n+m} A_j\beta_j - \sum_{j=n}^{n+m-1} A_j\beta_{j+1} \\ &= \sum_{j=n}^{n+m-1} A_j(\beta_j - \beta_{j+1}) + A_{n+m}\beta_{n+m} \\ &= \sum_{j=n}^{n+m-1} \left(\sum_{i=n}^{j} \alpha_i\right) t^j(1-t) + \left(\sum_{i=n}^{n+m} \alpha_i\right) t^{n+m} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{j=n}^{n+m} \alpha_j\beta_j\right| \leqslant \varepsilon \left((1-t)\sum_{j=n}^{n+m} t^j + 1\right) = \varepsilon\left(1 + \frac{1-t}{1-t} t^n(1-t^{m+1})\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{j\geqslant 0} (-1)^j x^{2j} \quad (|x| < 1) \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{j\geqslant 0} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \arctan x = \sum_{j\geqslant 0} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \sum_{j\geqslant 0} (-1)^j \frac{1}{2j+1}$$

$$\boxed{\pi = 4 \sum_{j\geqslant 0} \frac{(-1)^j}{2j+1}}$$

VL: Do, 2003-05-22

$$PR: \sum_{j\geqslant 0} a_j z^j = f(z),\ R = \frac{1}{\varrho} > 0,\ \varrho = \overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|a_j|}$$

1.

$$\alpha_1 \sum_{j\geqslant 0} a_j^1 z^j + \alpha_2 \sum_{j\geqslant 0} a_j^2 z^j = \sum_{j\geqslant 0} (\alpha_1 a_j^1 + \alpha_2 a_j^2) z^j, \quad |z| < \min\{R_1, R_2\}$$

2.

$$\sum_{j\geqslant 0} a_j^1 z^j \sum_{j\geqslant 0} a_j^2 z^j = \sum_{l\geqslant 0}\left(\sum_{j+k=l} a_j^1 a_k^2\right) z^j$$

3.

$$f^{(j)}(z) = \sum_{k\geqslant 0} k(k-1)\dots(k-j+1)a_k z^{k-j}, \text{ hat KR } R\ \forall j\geqslant 0,\ |z|<R$$

4. Taylorformel

$$f(z+h) = \sum_{j\geqslant 0}\frac{f^{(j)}(z)}{j!}h^j \Rightarrow a_j = \frac{f^{(j)}(0)}{j!}$$

5. Verknüpfung von PRs

$$f_i(z) = \sum_{j\geqslant 0} a_j^i z^j \text{ mit KR } R_i > 0,\ i = 1{,}2$$

Wann ist $f_1 \circ f_2(z)$ eine PR? Was ist ihr KR?

Formal

$$f_1\circ f_2(z) = f_1(f_2(z)) = \sum_{i\geqslant 0} a_i^1 (f_2(z))^i$$

$$f_2(z)^2 = \sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{j+l=k} a_j^2 a_l^2\right) z^k,\ \text{KR} \geqslant R$$

$$f_2(z)^j \overset{!}{=} \sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^j\\ |\alpha|=k}} a_{\alpha_1}^2\dots a_{\alpha_j}^2\right) z^k,\ \text{KR}\geqslant R$$

$$|f_2(z)^j| \leqslant \sum_{k\geqslant 0}\left(\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^j\\ |\alpha|=k}} |a_{\alpha_1}^2|\dots|a_{\alpha_j}^2|\right)|z|^k$$
$$= \left(\sum_{k\geqslant 0}|a_k^2||z|^k\right)^j$$

Also brauchen wir $|z| < R_2$ *und* $\sum_{k\geqslant 0}|a_k^2||z^k| < R_1$, denn dann ist $f_1(f_2(z)) = \sum_{j\geqslant 0} a_j^1 (f_2(z))^j$ konvergent *und*

$$f_1(f_2(z)) = \sum_{j\geqslant 0} a_j^1 \sum_{k\geqslant 0} z^k \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^j\\ |\alpha|=k}} \overbrace{a_{\alpha_1}^2\dots a_{\alpha_j}^2}^{a_\alpha^2} \overset{?}{=} \sum_{k\geqslant 0} z^k \left[\sum_{\substack{j\geqslant 0\\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^j, |\alpha|=k}} a_j^1 a_\alpha^2\right]$$

3.4.10 Satz

Es seien $f_i(z) = \sum_{j\geqslant 0} a_j^i z^j$ PR mit KR $R_i,\ i = 1{,}2$ und es gelte

$$|a_0^2| < R_1$$

Ist dann $0 < R < R_2$ so, daß

$$\sum_{k\geqslant 0} |a_k^2||z|^k =: F_2(|z|) < R_1 \text{ für } |z| \leqslant R$$

so gilt für $|z| \leqslant R$

$$f_1 \circ f_2(z) = \sum_{k\geqslant 0} \left(\sum_{\substack{j\geqslant 0 \\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^j, |\alpha|=k}} a_j^1 a_\alpha^2 \right) z^k$$

Beweis: Es ist nur z.z., daß die Voraussetzungen des großen Umordnungssatzes erfüllt sind! Dazu sei $K \subset \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ endlich; betrachte

$$\sum_{(k,j)\in K} R^k \left| \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^j \\ |\alpha|=k}} a_j^1 a_\alpha^2 \right| \leqslant \sum_{(k,j)\in K} R^k \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^j \\ |\alpha|=k}} |a_j^1||a^2|_\alpha$$

$$\leqslant \sum_{j\geqslant 0} |a_j^1| \underbrace{F_2(R)}_{\leqslant (R_1-\varepsilon)}{}^j = \sum_{j\geqslant 0} |a_j^1|(R_1-\varepsilon)^j \left(\frac{F_2(R)}{R_1-\varepsilon}\right)^j$$

$$\leqslant \sum_{j\geqslant 0} |a_j^1|(R_1-\varepsilon)^j =: C < \infty$$

□

Anmerkung zu (2):

$$e^z e^w = \sum_{\substack{j\geqslant 0 \\ k\geqslant 0}} \frac{z^j}{j!}\frac{w^k}{k!} = \sum_{l\geqslant 0} \frac{1}{l!} \sum_{j=0}^{l} \frac{l!}{j!(l-j)!} z^j w^{l-j} = \sum_{j\geqslant 0} \frac{(z+w)^l}{l!} = e^{z+w}$$

6. Sei $f(z)$ wieder eine PR
Frage: Wann ist $\frac{1}{f(z)}$ eine PR?

Formal

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\sum_{j\geqslant 0} a_j z^j} \qquad \boxed{a_0 \neq 0}$$

$$=: \frac{1}{a_0 + z f_1(z)} = \frac{1}{a_0\left(1+\frac{z}{a_0}f_1(z)\right)} = \frac{1}{a_0}\sum_{j\geqslant 0}\left(-\frac{z}{a_0}f_1(z)\right)^j$$

Hier wird f in die Funktion $\frac{1}{w} = \varrho(w)$ eingesetzt in einer Umgebung von a_0! Also müssen wir betrachten

$$\frac{1}{a_0+h} = \frac{1}{a_0\left(1+\frac{h}{a_0}\right)} = \frac{1}{a_0}\sum_{j\geqslant 0}\left(-\frac{h}{a_0}\right)^j = \sum_{j\geqslant 0}\frac{(-1)^j}{a_0^{j+1}}h^j =: f_1(h)$$

$$f_2(z) = f(z)$$

Also brauchen wir $a_0 \neq 0$ und

$$\left|-\frac{z}{a_0}f_1(z)\right| < 1$$

d.h. wir brauchen $|z||f_1(z)| < |a_0|$

$$f_1(z) = \sum_{j\geqslant 0} a_{j+1}z^j \qquad \text{hat KR } R = R_1$$

und für $R' < R$ ist

$$F_1(R') := \sum_{j\geqslant 0}|a_{j+1}|R'^j < \infty$$

Wir müssen also R' so klein wählen, daß $R'F_1(R') < |a_0|$.

3.4.11 Satz

Es sei $f(z) = \sum_{j\geqslant 0} a_j z^j$ eine PR mit dem KR $R > 0$ und $a_0 \neq 0$. Dann ist

$$\frac{1}{f(z)} =: \sum_{k\geqslant 0} b_k z^k$$

eine PR mit KR $\geqslant R'$, wenn $R'F(R') < |a_0|,\ F(R) = \sum_{j\geqslant 0}|a_j|R^j$. Die $(b_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ berechnen sich durch

$$a_0 b_0 = 1 \Leftrightarrow b_0 = \frac{1}{a_0},$$

$$\sum_{j+k=l} a_j b_k = 0 \Leftrightarrow a_0 b_l = -\sum_{j=0}^{l-1} a_{l-j}b_j,\ l \in \mathbb{N}$$

Beispiel: Betrachte $\frac{1}{f(z)}$ in $B_\varepsilon(0)$

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}, \quad e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$f(z) = \frac{1}{\sum_{j\geqslant 1} \frac{z^{j-1}}{j!}}$$

f ist wohldefiniert in $|z| < 2\pi$ und

$$\frac{e^z - 1}{z} = \sum_{j\geqslant 0} \frac{z^j}{(j+1)!}$$

Nach 3.4.11 gibt es also ein $0 < R < 2\pi$ so, daß

$$f(z) =: \sum_{k\geqslant 0} \frac{B_k}{k!} z^k \quad (B_k)_{k\geqslant 0} \text{ die Bernoulli-Zahlen}$$

1) Rekursionsformel

$$B_0 = 1$$

$$\frac{1}{l!} B_l = -\sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{(l-j+1)!} \cdot \frac{B_j}{j!}$$

$$\Rightarrow B_l = -\sum_{j=0}^{l-1} \frac{l!}{(l-j+1)!j!} B_j = -\frac{1}{l+1} \sum_{j=0}^{l-1} \binom{l+1}{j} B_j$$

$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_7 = 0$

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = z\left(\frac{2 + e^z - 1}{2(e^z - 1)}\right) = \frac{z}{2}\frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2}\frac{e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}}}$$

$$= \frac{z}{2}\frac{\cosh\frac{z}{2}}{\sinh\frac{z}{2}} = \sum_{\substack{j\geqslant 0 \\ j \text{ gerade}}} \frac{B_j}{j!} z^j$$

oder

$$z \coth z = \sum_{z\geqslant 0} \frac{B_{2j}}{(2j)!} 2^{2j} z^{2j}$$

Ersetze z durch iz:

$$iz \cdot \frac{\cos z}{i \sin z} = z \cot z = \sum_{j\geqslant 0} (-1)^j 4^j \frac{B_{2j}}{(2j)!} z^{2j}$$

Damit ergibt sich auch die PR für $\tan z$ - Ü! (KR=2π ??)

Anwendung Wir berechnen

$$\sum_{j=0}^{n} e^{jz} = \sum_{j=0}^{n} (e^z)^j = \frac{e^{(n+1)z}-1}{e^z-1} = \frac{e^{(n+1)z}-1}{z} \cdot \frac{z}{e^z-1},\ 0<|z|<R \leqslant 2\pi, e^z \neq 1$$

Wir berechnen die PR der linken und der rechten Seite

$$\sum_{j=0}^{n} e^{jz} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k\geqslant 0} \frac{(jz)^k}{k!} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{z^k}{k!} \sum_{j=0}^{n} j^k =: \sum_{k\geqslant 0} \frac{z^k}{k!} S_k(n)$$

$$\Rightarrow S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2},\ S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Andererseits ist

$$\frac{e^{(n+1)z}-1}{z}\,\frac{z}{e^z-1} = \sum_{j\geqslant 0} \frac{(n+1)^{j+1}z^j}{(j+1)!} \sum_{k\geqslant 0} \frac{B_k}{k!} z^k = \sum_{l\geqslant 0} z^l \sum_{j+k=l} \frac{(n+1)^{j+1}}{(j+1)!}\,\frac{B_k}{k!}$$

$$\Rightarrow S_l(n) = l! \sum_{j=0}^{l} \frac{B_{l-j}}{(l-j)!(j+1)!}(n+1)^{j+1} = \frac{1}{l+1}\sum_{j=0}^{l} \binom{l+1}{j+1} B_{l-j}(n+1)^{j+1}$$

Bemerkung Nach der Rekursionsformel sind alle $B_j \in \mathbb{Q}$.
Satz von Staudt:

$$B_{2j} - (-1)^j \left(\frac{1}{2} + \sum_{\substack{p>2 \text{ prim} \\ (p-1)|2j}} \frac{1}{p} \right) \in \mathbb{Z}$$

Satz von Kummer Eine Primzahl $p > 2$ heißt *regulär*, wenn sie nicht die Zähler der Bernoulli-Kette

$$B_0,\ B_2\ ,\ \ldots,\ B_{p-3} \text{ teilt.}$$

Dann ist das Fermat-Problem

$$\boxed{x^p + y^p = z^p \text{ mit } x,y,z \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}}$$

für p nicht lösbar.

VL: Mo, 2003-05-26

Erweiterung

$$F(z,w) := \frac{ze^{wz}}{e^z-1} = \sum_{j\geqslant 0} \frac{B_j(w)}{j!} z^j$$

$$F(z,0) = \frac{z}{e^z-1}$$

$$B_j(w) \in \mathbb{C}[w] \quad \boxed{\text{Bernoulli-Polynome}} \text{ mit Grad j.}$$

3.5 Integration

$[a,b] \subset \mathbb{R}, \ -\infty < a < b < \infty,$
f mit $(*)$ $\iff$ $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ und differenzierbar in (a,b)
Gesamtheit dieser Funktionen $\mathcal{D}^1[a,b] = \{f: \ [a,b] \to \mathbb{R}; \ f \text{ erfüllt } (*)\}$

Betrachte die Abbildung $\partial_x: \ \mathcal{D}^1[a,b] \to \mathcal{D}^0[a,b] = \{g: \ (a,b) \to \mathbb{R}\}$;
∂_x ist *nicht injektiv*, aber linear mit Ker $\partial_x = \{f: \ [a,b] \to \mathbb{R}; \ f \text{ konstant}\}$

Als können wir ∂_x "umkehren"; $I := \partial_x^{-1}$ ist allerdings mehrdeutig, aber nur bis auf konstante Funktionen.

3.5.1 Vorläufige Definition

$f \in \mathcal{D}^0$. $F \in \mathcal{D}^1[a,b]$ heißt *Stammfunktion* oder *unbestimmtes Integral* von f, falls gilt:

$$F'(x) = f(x), \ x \in (a,b)$$

In diesem Fall heißt f regulär integrierbar über $[a,b]$.

3.5.2 Hilfssatz

Wenn f eine Stammfunktion besitzt, dann ist sie bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Schreibweise: $F = I(f) = \int f$

Beispiele

1. $f \equiv c \Rightarrow F(x) = cx$ ist eine Stammfunktion.

   Allgemeiner:

$$f(x) = x^j \Rightarrow F(x) = \frac{x^{j+1}}{j+1},$$

$$f(x) = x^\alpha, x > 0, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \text{wenn } \alpha \neq -1 \\ \log x, & \alpha = -1 \end{cases}$$

2.

$$f \in \mathbb{C}[x], \ f(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

$$\Rightarrow F(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{x^{j+1}}{j+1}, \ x \in \mathbb{R}$$

3. f Potenzreihe mit KR $R > 0$, $f(x) = \sum_{j \geqslant 0} a_j x^j$

$$\Rightarrow F(x) = \sum_{j \geqslant 0} \frac{a_j}{j+1} x^{j+1} \quad \text{in } |x| < R$$

   Denn: In $|x| \leqslant R' < R$ sind die Partialsummen von f gleichmäßig konvergent, die Partialsummen von F konvergieren ebenfalls gleichmäßig. $\Rightarrow$ Beh.

Damit folgt z.B. für $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{j\geqslant 0} x^j,\ |x| < 1$:

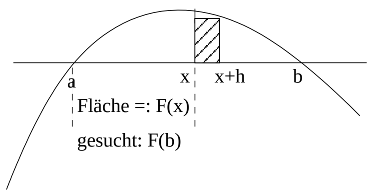
$$F(x) = \log(1-x) = \sum_{j\geqslant 0} \frac{x^{j+1}}{j+1}$$

Oder:

$$\partial_x \arctan x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{j\geqslant 0} (-1)^j x^{2j} \Rightarrow \arctan x = \sum_{j\geqslant 0} \frac{(-1)^j}{2j+1} x^{2j+1}$$

$$\int \exp = \exp$$

Flächenberechnung



$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= hf(x) + o(h) \\ \text{z.B. für } f \text{ monoton fallend auf } (x, x+h) &\geqslant hf(x+h); \\ &\leqslant hf(x) \end{aligned}$$

$$h(f(x+h) - f(x)) \leqslant F(x+h) - F(x) - hf(x) \leqslant 0$$

$$\Rightarrow F \text{ differenzierbar in } x \text{ und } F'(x) = f(x)$$

3.5.3 Definition

Es sei f regulär integrierbar über $[a, b]$ mit Stammfunktion F. Dann nennen wir

$$(\bigstar) \int_a^b f(x)dx := F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx$$

das *bestimmte Integral* von f über $[a, b]$.

($\bigstar$) heißt der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.* Die Aussage wird natürlich erst dann ein Satz, wenn das Integral anders definiert wird!

3.5.4 Hilfssatz

1. Es seien f_1, f_2 regulär integrierbar über (a, b) mit Stammfunktionen F_1, F_2. Dann ist für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} : \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$ Stammfunktion von $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$.

2. Unter den Voraussetzungen von 1) ist $F_1 F_2$ Stammfunktion von $f_1 F_2 + F_1 f_2$.

3. Es sei $f \in \mathcal{D}^0(a,b)$ regulär integrierbar mit Stammfunktion F und $G \in \mathcal{D}^1[c,d]$ mit $G[c,d] = [a,b]$. Dann ist $F \circ G$ Stammfunktion mit $(F \circ G)' = (f \circ G) \cdot G'$.

4. $f \in \mathcal{D}^1(a,b)$ mit $f'(x) \neq 0$ sei regulär integrierbar über (a,b) mit Stammfunktion F. Ferner sei $f: \; [a,b] \to [c,d]$ eine stetige Bijektion mit Umkehrung f^{-1}. Dann ist $G(x) = xf^{-1}(x) - F \circ f^{-1}(x), \; x \in [c,d]$ eine Stammfunktion von f^{-1}.

Beweis 4) Nach Voraussetzung ist $f^{-1} \in \mathcal{D}^1(c,d)$; damit gilt, dass $G \in \mathcal{D}^1[c,d]$ mit

$$G'(x) = f^{-1}(x) + x(f^{-1})'(x) - f(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = f^{-1}(x)$$

□

Bemerkung Was ist $\int \log$ in $(a,b), \; a > 0$?

$$f^{-1}(x) = \log x, \; f(x) = e^x, \; F(x) = e^x \Rightarrow \int \log \; (x) = x \log x - e^{\log x} = x \log x - x$$

3.5.5 Satz (Eigenschaften des bestimmten Integrals)

f, f_1, f_2 seien regulär integrierbar über $[a,b]$

1. $$\int_a^b (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x)dx = \alpha_1 \int_a^b f_1(x)dx + \alpha_2 \int_a^b f_2(x)dx$$

   Linearität

2. Für $c \in (a,b)$ ist

   $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

   Additivität

3. Wenn $f(x) \geqslant 0$, so ist auch

   $$\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$$

   Monotonie

4. Es gilt für f und $|f|$ regulär integrierbar

   $$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx \leqslant (b-a) \sup_{x \in (a,b)} |f(x)|$$

   Fundamentale Ungleichung

Beweis

1. Folgt aus 3.5.4,1).
2. Sei F eine Stammfunktion von f, dann ist
$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(b)-F(c)+F(c)-F(a) = \int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$
3. $f(x) \geqslant 0$ in (a,b), F Stammfunktion von f. Dann ist $F'(x) = f(x) \geqslant 0$ für $x \in (a,b) \Rightarrow F(x) \geqslant F(a)$ für $x \in [a,b] \Rightarrow F(b) - F(a) \geqslant 0$
4. Wegen $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ folgt
$$-\int_a^b |f(x)|dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$
Es bleibt z.z., dass für $f(x) \geqslant 0$ und regulär integrierbar über $[a,b]$ gilt:
$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\leqslant (b-a)\sup f(x)\\ F(b)-F(a) &\leqslant (b-a)\sup F'(x)\end{aligned}$$

□

Wir brauchen interessante=manipulierbare Funktionenklassen, die integrierbar sind!
$$f(x) = |x| \Rightarrow F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x > 0 \\ -\frac{x^2}{2}, & x < 0 \end{cases}$$
$$F''(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ \text{nicht definiert für} & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} =: H(x), \text{ die } \textit{Heavyside}\text{-Funktion}$$

3.5.6 Integrationsregeln

1. *Partielle Integration*
Es seien $f_1, f_2 \in \mathcal{D}^1[a,b]$ und regulär über $[a,b]$ integrierbar mit Stammfunktionen F_1, F_2. Dann gilt
$$\int_a^b (F_1 f_2)(x)dx = F_1F_2(b) - F_1F_2(a) - \int_a^b f_1F_2(x)dx$$
2. *Substitutionsregel* $(g(y) := G'(y))$
$$\int_{G(c)}^{G(d)} f(x)dx = \int_c^d f \circ G(y)g(y)dy$$

Beweis

1. F_1, F_2 ist Stammfunktion von $f_1F_2 + F_1f_2$.
2. $$\int_{G(c)}^{G(d)} f(x)dx = F(G(d)) - F(G(c)) = \int_c^d ((f \circ G)g)(y)dy$$

Beispiele

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 e^{\overbrace{-x^2}^{=:G(x)}} \underbrace{(-2x)}_{=G'(x)}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dx}e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{e}-1\right] = \frac{1-\frac{1}{e}}{2}$$

Beispiele zur Partiellen Integration:

VL: Mo, 2003-06-02

Für $n \in \mathbb{Z}_+$ betrachte

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \qquad I_0 = \frac{\pi}{1}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos\frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = 1$$

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x dx = \underbrace{[\sin^{n-1}(-\cos)]_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 x(n-1)\sin^{n-2} x dx \\
&= \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 x)(n-1)(\sin^{n-2} x)dx \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

Also gilt:

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k}\frac{2k-3}{2k-2}\cdots\frac{1}{2}I_0 = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2k(2k-2)(2k-4)\cdots 2}\frac{\pi}{2}$$

$$I_{2k-1} = \frac{2k-2}{2k-1}\frac{2k-4}{2k-3}\cdots\frac{2}{3}I_1 = \frac{(2k-2)(2k-4)\cdots 2}{(2k-1)(2k-3)\cdots 3}$$

Wegen $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$ für $x \in [0, \pi/2]$ ist

$$\sin^{n+1} x \leqslant \sin^n x \leqslant \sin^{n-1} x \qquad \forall x \in [0, \pi/2]$$

Also folgt wegen der Monotonie:

$$I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1} \qquad I_{2n+1} \leqslant I_{2n} \leqslant I_{2n-1}$$

Umgeformt:

$$\frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)\cdots 3}\cdot\frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)\cdots 1} \leqslant \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 3}\cdot\frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)\cdots 1}$$

Außerdem gilt:

$$\left(1-\frac{1}{2n-1}\right) = \frac{2n-2}{2n-1} \qquad \text{und} \qquad \left(1+\frac{1}{2n-1}\right) = \frac{2n}{2n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2n}{2n-1}\frac{2n-2}{2n-1} = \left(1 - \frac{1}{(2n-1)^2}\right)$$

Es ergibt sich:

$$\frac{2n}{2n+1}\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{(2k-1)^2}\right) \leqslant \frac{\pi}{4} \leqslant \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{(2k-1)^2}\right)$$

Behauptung:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) := \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) \quad \text{existiert.}$$

Da der log bijektiv ist, g.z.z:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\log\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{1}{(2k+1)^2} + o\left(\frac{1}{(2k+1)^4}\right)\right]\end{aligned}$$

existiert, weil $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^\alpha} < \infty$ für $\alpha > 1$.

Genauer ist

$$\begin{aligned}\left|\log\left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right)\right| &= \left|\log\left(1 - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) - \log 1\right|\\ &= \frac{1}{(2k+1)^2}\frac{1}{1 - \frac{\vartheta}{(2k+1)^2}}\\ &\leqslant \frac{9}{8}\frac{1}{(2k+1)^2}\end{aligned}$$

3.5.7 Satz (Das Wallissche Produkt)

$$\boxed{\tfrac{\pi}{4} = \prod_{k\geqslant 1}\left(1 - \tfrac{1}{(2k+1)^2}\right)}$$

Bemerkung: Eine Überlegung von Euler: Polynom

$$f(z) = \prod_{\lambda\in f^{-1}(0)}(z-\lambda) = \prod\lambda\prod\left(\frac{z}{\lambda} - 1\right)$$

falls höchster Koeffizient = 1.

Ich weiß: $\sin z = 0 \iff z = k\pi$.

$$\begin{aligned}\frac{4}{\pi} &= \prod_{k\geqslant 1} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2k+1}\right)\left(1+\frac{1}{2k+1}\right)}\\ &= \prod_{k\geqslant 1} \frac{2k+1}{2k}\frac{2k+1}{2k+2} = \prod_{k\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{2k}\right)\left(1-\frac{1}{2k+2}\right)\\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\prod_{k\geqslant 1}\left(1+\frac{1}{2k}\right)\left(1-\frac{1}{2k}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \prod_{k\geqslant 1}\left(1-\frac{1}{4k^2}\right) = \frac{2}{\pi} = \frac{\sin z\pi}{z\pi}\Big|_{z=\frac{1}{2}}$$

$$f(z) = z^m \prod_{\substack{\lambda\in f^{-1}(0)\\ \lambda\neq 0}} (z-\lambda) = z^m \underbrace{\prod_{\lambda\neq 0}\lambda}\prod\left(\frac{z}{\lambda}-1\right)$$

Das ist auszudrücken für ein bel. Polynom! Dann kann man eine Produktdarstellung für $\sin z\pi$ erraten!

Hauptsatz der D&I

Voraussetzung: f in (a,b) $n+1$-mal diffb, $x, x+h \in (a,b)$.

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

Oder:

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x) &= \int_x^{x+h} 1\cdot f'(t)dt\\ &= [-(x+h-t)f'(t)]_x^{x+h} + \int_x^{x+h}(x+h-t)f''(t)dt\\ &= hf'(x) + \int_x^{x+h}(x+h-t)f''(t)dt\\ &= hf'(x) + \left[-\frac{(x+h-t)^2}{2}f''(t)\right]_x^{x+h} + \int_x^{x+h}\frac{1}{2}(x+h-t)^2 f'''(t)dt\\ &= hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + R_2f(x,h)\end{aligned}$$

3.5.8 Satz (Die Taylorformel mit Integralrestglied)

Es sei f in (a,b) $(n+1)$-mal diffb. und $x, x+h \in (a,b)$. Dann gilt:

$$f(x+h) - \sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j = \frac{1}{n!}\int_x^{x+h}(x+h-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)dt$$

Beweis: Induktion über $n \in \mathbb{Z}_+$:

$n = 0$**:** Hauptsatz

$n \geqslant 0$ **bewiesen,** f $(n+2)$-mal diffb.

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n!}\int_x^{x+h}(x+h-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$
$$= \left[\frac{-1}{(n+1)!}(x+h-t)^{n+1}f^{(n+1)}(t)\right]_x^{x+h} + \frac{1}{(n+1)!}\int_x^{x+h}(x+h-t)^{n+1}f^{(n+2)}(t)dt$$

Substitutionsregel

$$\int_{G(a)}^{G(b)} F(x)dx = \int_a^b F\circ G(t)G'(t)dt$$

Formale Regel:

$$\int\limits_{G(a)}^{G(b)} F(x)dx \;\left|\; \begin{array}{l} x = G(t), \\[1ex] t\in[a,b] \Rightarrow x\in[G(a),G(b)] \\[1ex] dx = G'(t)dt \end{array}\right.$$

(Achtung: $x \in [G(a), G(b)]$ i.A. nur wenn $G'(t) > 0$!)

Beispiele:

1. Das Restglied:

$$\int_x^{x+h}\frac{1}{n!}(x+h-t)^n f^{(n+1)}(t)dt \qquad (t = x+uh,\ u\in[0,1],\ dt = h\cdot du)$$
$$= \frac{h}{n!}\int_0^1 (h-uh)^n f^{(n+1)}(x+uh)du$$
$$= \frac{h^{n+1}}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(x+uh)du$$

2.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2}dt \qquad (t = \sin x, x\in[-\pi/2,\pi/2], dt = \cos x dx)$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 x}\cos x dx$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 x dx =: I$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\cos x dx = [\sin x\cos x]_{-\pi/2}^{\pi/2} + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 x dx$$
$$= \pi - \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 x dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

3.5.9 Definition

Ist F eine Stammfunktion von f in $[a, \infty)$ und existiert $F(\infty) := \lim_{x\to\infty} F(x)$, so setzen wir:

$$\int_a^\infty f(x)dx := F(\infty) - F(a) \qquad \text{(etc.)}$$

3.5.10 Satz (Das Integralkriterium)

Es sei $F : \mathbb{R}_+ \to (0, \infty)$ monoton fallend.

Behauptung:

$$\sum_{n\geqslant 0} f(n) \geqslant \int_0^\infty f(x)dx \geqslant \sum_{n\geqslant 1} f(n)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & f(n) \geqslant \int_n^{n+1} f(x)dx \geqslant f(n+1) \int_n^{n+1} dx = f(n+1) \\ \Rightarrow \quad & \sum_{n\geqslant 0} f(n) \geqslant \sum_{n\geqslant 0} \int_n^{n+1} f(x)dx \geqslant \sum_{n\geqslant 0} f(n+1) \\ \Rightarrow \quad & \sum_{n\geqslant 0} f(n) \geqslant \int_0^\infty f(x)dx \geqslant \sum_{n\geqslant 1} f(n) \end{aligned}$$

Anwendung:

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^\alpha} \qquad \alpha > 0$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^\alpha} = \begin{cases} \left[\frac{1}{1-\alpha}(1+x)^{1-\alpha}\right]_0^\infty & \alpha \neq 1 \\ [\log(1+x)]_0^\infty & \alpha = 1 \end{cases}$$

ergibt Konvergenz genau für $\alpha > 1$, d.h. $\sum_{n\geqslant 1} h^{-\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$, divergiert für $\alpha \leqslant 1$.

VL: Do, 2003-06-05

Nachtrag Wir haben gezeigt:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{j=1}^\infty \left(1 - \frac{1}{4j^2}\right) \qquad j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

älteste analytische Darstellung von π (Robert Wallis 1640)

$$f(z) \in \mathbb{C}[z]$$

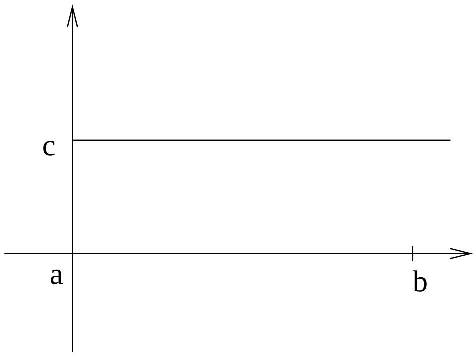
$$
\begin{aligned}
f(z) &= \alpha \prod_{\lambda \in f^{-1}(0)} (z-\lambda) \\
&= \alpha z^{\beta} \prod_{\lambda \in f^{-1}(0)\setminus\{0\}} (z-\lambda) \\
&= \alpha \prod_{\lambda \in f^{-1}(0)\setminus\{0\}} (-\lambda) z^{\beta} \prod_{\lambda \in f^{-1}(0)\setminus\{0\}} \left(1-\frac{z}{\lambda}\right) \\
&=: \tilde{\alpha} z \prod_{\lambda \in f^{-1}(0)\setminus\{0\}} \left(1-\frac{z}{\lambda}\right) \quad \Rightarrow \tilde{\alpha} = f'(0) \\
&= z f'(0) \prod_{\lambda \in f^{-1}(0)\setminus\{0\}} \left(1-\frac{z}{\lambda}\right)
\end{aligned}
$$

Setze $f(z) = \sin \pi z \quad \Rightarrow f^{-1}(0) = \mathbb{Z},\ f(0) = 0,\ f'(0) = \pi.$

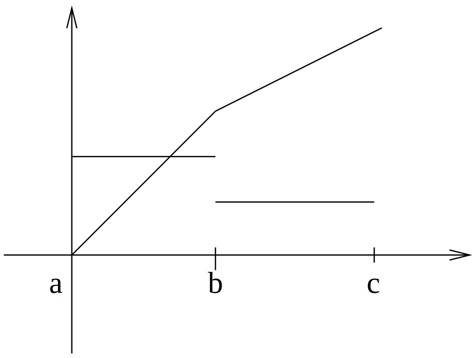
$$\overset{Euler}{\Rightarrow} \sin \pi z = z\pi \prod_{j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1-\frac{z}{j}\right) = \pi \cdot z \prod_{j=1}^{\infty} \left(1-\frac{z^2}{j^2}\right)$$

$$z = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 = \frac{\pi}{2} \prod_{j=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{4j^2}\right)!$$

Problem: Wir wissen jetzt, was eine Stammfunktion ist, aber wir wissen nicht, welche Funktionen Stammfunktionen besitzen.
Besitzt z.B. jede stetige Funktion eine Stammfunktion?



$f(x) \equiv c$ hat Stfkt. $F(x) = c{\cdot}x{+}d_0$

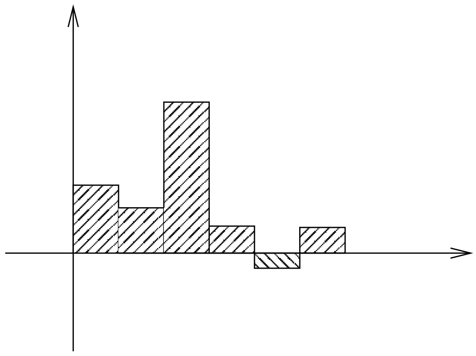


$$f(x) \equiv c_1,\ \forall x \in [a,b)$$
$$f(x) \equiv c_2,\ \forall x \in [b,c]$$

$$F(x) = \begin{cases} c_1 x + d_1, & x \in [a, b) \\ c_2 x + d_2, & x \in [b, c] \end{cases}$$

mit $F(b-) = c_1 b + d_1 = c_2 b + d_2 = F(b+)$

$$\Rightarrow d_2 - d_1 = (c_1 - c_2)b, \text{ zusätzlich } d_1 = 0$$



3.5.11 Definition

1. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset \mathcal{D}(f) \to \mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn $\mathcal{R}(f)$ nur endlich viele Werte hat.
   Wir verlangen weiter, daß
   $$f^{-1}(c) = [a, b) \cap \mathcal{D}(f) \; \forall c \in \mathcal{R}(f).$$

2. F heißt Stammfunktion von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, wenn gilt
   (a) F ist stetig in $[a, b]$;
   (b) es gibt eine abzählbare Menge $D \subset (a, b)$ so, daß F in $(a, b) \setminus D$ differenzierbar mit $F = f$

Um alles Bisherige zu übertragen auf diese allgemeine Definition, benötigen wir nur die Erweiterung des Mittelwertsatzes in folgender Form.

3.5.12 Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Für eine Stammfunktion F nach 3.5.11 2) gilt

$$|F(b) - F(a)| \leqslant |b - a| \sup_{x \in (a,b) \setminus D} |F'(x)|$$

Folgerung Sind F_1, F_2 Stammfunktionen von f, so ist $F_1 - F_2$ konstant
$\Rightarrow F_1 - F_2$ ist Stammfunktion von $f = 0$

$$\Rightarrow |(F_1 - F_2)(a) - (F_1 - F_2)(b)| \leqslant (b-a) \cdot 0$$

Beweis von 3.5.12

Wähle eine Darstellung $D = \{\varrho(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ für eine Abbildung $\varrho : \mathbb{N} \to (a, b)$.
Wähle weiter $\varepsilon > 0$ und setze

$$M := \sup_{x \in (a,b) \setminus D} |F'(x)|$$

o.B.d.A. $M < \infty$
Wir definieren jetzt

$$A_\varepsilon := \left\{ x \in [a, b];\ \text{für } a \leqslant y \leqslant x \text{ gilt } |F(y) - F(a)| \leqslant (y-a)(M+\varepsilon) + \varepsilon \sum_{\varrho(n) < y} 2^{-n} \right\}$$

$\boxed{\text{Beh.:}}$ $A_\varepsilon = [a, b]$
Dann folgt

$$|F(b) - F(a)| \leqslant (b-a)(M+\varepsilon) + \varepsilon \to (b-a)M \text{ für } \varepsilon \to 0$$

$\Rightarrow$ Beh. 3.5.12

Beweis von $A_\varepsilon = [a, b]$ Für $y \in A_\varepsilon$ ist $[a, y] \subset A_\varepsilon$ nach Konstruktion. Weiter ist $a \in A_\varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$, d.h. $\sup A_\varepsilon \in [a, b]$ existiert. Dann gibt es eine Folge $y_n \nearrow \sup A_\varepsilon =: \bar{y}$

$$\begin{aligned} |F(y_m) - F(a)| &\leqslant (y_m - a)(M+\varepsilon) + \varepsilon \sum_{\varrho(n) < y_m} 2^{-n} \\ &\leqslant (y_m - a)(M+\varepsilon) + \varepsilon \sum_{\varrho(n) < \bar{y}} 2^{-n} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ wegen Stetigkeit ist $\bar{y} \in A_\varepsilon$, d.h. es genügt zu zeigen, dass $\bar{y} = b$.

Annahme: $\bar{y} < b$

1.Fall $\bar{y} \notin D \Rightarrow F$ ist differenzierbar in $\bar{y}$
Wähle $h > 0,\ \bar{y} + h < b$ und bilde

$$\begin{aligned}
|F(\bar{y}+h) - F(a)| &= |F(\bar{y}+h) - F(\bar{y}) + F(\bar{y}) - F(a)| \\
&\leqslant |h \cdot F'(\bar{y}) + o(h)| + (\bar{y}-a)(M+\varepsilon) + \varepsilon \sum_{\varrho(n)<\bar{y}} 2^{-n} \\
[\ |o(h)| \leqslant \varepsilon h \text{ für } h \leqslant h(\varepsilon)\ ] \quad & \\
&\leqslant h(|F'(\bar{y})| + \varepsilon) + (\bar{y}-a)(M+\varepsilon) + \varepsilon \sum_{\varrho(n)<\bar{y}+h} 2^{-n} \\
&\leqslant (\bar{y}+h-a)(M+\varepsilon) + \varepsilon \sum_{\varrho(n)<\bar{y}+h} 2^{-n} \quad \text{für } 0 < h \leqslant h(\varepsilon)
\end{aligned}$$

-Wid.!

2.Fall $\bar{y} \in D,\ \bar{y} = \varrho(N)$

$$|F(\bar{y}+h) - F(a)| \leqslant |F(\bar{y}+h) - F(\bar{y})| + (\bar{y}-a)(M+\varepsilon) + \varepsilon \sum_{\varrho(n)<\bar{y}} 2^{-n}$$

Wir wählen jetzt $h(\varepsilon) > 0$ so, dass

$$|F(\bar{y}+h) - F(\bar{y})| < \varepsilon 2^{-N} \quad \text{für } 0 < h \leqslant h(\varepsilon)$$

Das ist möglich wegen der Stetigkeit von F!
Dann folgt

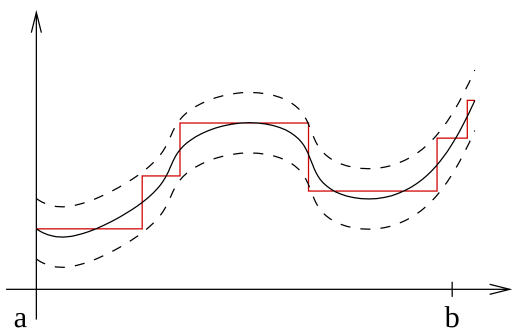
$$|F(\bar{y}+h) - F(a)| \leqslant (\bar{y}-a)(M+\varepsilon) + \varepsilon \sum_{\varrho(n)<\bar{y}+h} 2^{-n}$$

$$\leqslant (\bar{y}+h-a)(M+\varepsilon) + \varepsilon \sum_{\varrho(n)<\bar{y}+h} 2^{-n} \quad \text{Wid.}$$

□

3.5.13 Hilfssatz

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}, \ -\infty < a < b < \infty$ stetig, so gibt es eine Folge von Treppenfunktionen, die auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert.



Beweis: $\varepsilon > 0$; dann gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so, dass $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| \leqslant \delta$.
Setze $x_1 := a,\ x_2 := a + \delta, \ldots, x_k := a + (k-1)\delta$
$n = \left\lfloor \frac{b-a}{\delta} \right\rfloor,\ x_{n+1} = b$, und

$$f_n|_{[x_i, x_{i+1})} := f(x_i) \quad \Rightarrow \|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

□

3.5.14 Satz

Es seien Funktionen $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben mit

1. jedes f_n besitzt eine Stammfunktion,
2. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig in (a, b) gegen f.

Dann besitzt auch f eine Stammfunktion in $[a, b]$.

Beweis Sei F_n die Stammfunktion von f_n mit $F_n(a) = 0$. Wir wollen zeigen, dass die Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[a, b]$ gleichmäßig gegen F konvergiert und dass F eine Stammfunktion von f ist.
D_n = Ausnahmemenge von $F_n,\ D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ abzählbar.
Wir bilden jetzt für $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$

$$|(F_m - F_n)(y) - (F_m - F_n)(x)| \overset{3.5.12}{\leqslant} |y - x| \sup_{(a,b) \setminus D} |(f_m - f_n)(x)| \leqslant \varepsilon |y - x| \quad \text{für } n, m \geqslant n(\varepsilon)$$

Daraus folgt für $x = a$

$$|F_m(y) - F_n(y)| \leqslant \varepsilon |y - a|$$

$\Rightarrow (F_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ist gleichmäßig konvergent in $[a, b]$
$\Rightarrow F$ ist stetig in $[a, b]$.
Es bleibt zu zeigen, dass für $x \in (a, b) \setminus D$ und kleines $|h| \leqslant h(\varepsilon)$,

$$|F(x + h) - F(x) - hf(x)| \leqslant \varepsilon |h|$$

Dazu brauchen wir die approximierenden Folgen($h \in (0, h(\varepsilon))$):

$$(F_m - F_n)(x + h) - (F_m - F_n)(x) - h(f_m - f_n)(x) =: G_{mn}(h)$$

dann ist G_{mn} stetig und diffb. in allen Punkten h mit $x + h \notin D$, mit Ableitung

$$(f_m - f_n)(x + h) - (f_m - f_n)(x) = G'_{mn}(h)$$

wobei

$$|G'_{mn}(h)| \leqslant 2\varepsilon \quad \text{für } m, n \geqslant n(\varepsilon)$$

Also gilt nach 3.5.12

$$|G_{mn}(h)| \leqslant |G_{mn}(h) - G_{mn}(0)| \leqslant |h| \cdot 2\varepsilon$$

d.h.: für $m \to \infty$

$$|(F-F_n)(x+h)-(F-F_n)(x)-h(f-f_n)(x)| \leqslant 2\varepsilon|h| \quad \text{für } n \geqslant n(\varepsilon)$$

Weiter ist für $n = n(\varepsilon)$ wegen $x \in (a,b) \setminus D$

$$F_n(x+h)-F_n(x)-hf_n(x)| \leqslant \varepsilon|h| \quad \text{für } |h| \leqslant h(\varepsilon)$$

also für solche

$$|F(x+h)-F(x)-hf(x)| \leqslant 3\varepsilon|h|.$$

VL: Do, 2003-06-12 □

($\tilde{*}$) $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, F in $(a,b) \setminus D$ diffb. mit $\#D \leqslant \aleph_0$
f besitzt in $[a,b]$ eine Stammfkt. $\iff$

$$\exists F \text{ mit } (\tilde{*}) \text{ und } F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b) \setminus D$$

3.5.15 Definition

Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ und $f: (a,b) \to \mathbb{R}$. f besitze eine Stammfunktion F in (a,b) (d.h. F ist Stammfkt. von f im Sinne der Def. in jedem Intervall $[\alpha,\beta]$ mit $a < \alpha < \beta < b$). Wir setzen dann

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{b \to b-0} F(\beta) - \lim_{\alpha \to a+0} F(\alpha),$$

falls $\lim_{\beta \to b-0} F(\beta)$ und $\lim_{\alpha \to a+0} F(\alpha)$ beide existieren.

Beispiele 1) $(a,b) = (0,\infty)$, $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$; berechne $\int_0^\infty x^\alpha dx$!

1. Fall $\alpha \neq -1$ Dann ist $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ und

$$\lim_{\beta \to \infty} F(\beta) = \lim_{\beta \to \infty} \frac{\beta^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \lim_{\beta \to \infty} \frac{e^{(\alpha+1)\log\beta}}{\alpha+1} = \begin{cases} \infty, & \alpha+1>0 \\ 0, & \alpha+1<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ es muss gelten $\alpha + 1 < 0 \iff \alpha < -1$

$$\lim_{\beta \to 0+} F(\beta) = \lim_{\beta \to 0+} \frac{e^{(\alpha+1)\log\beta}}{\alpha+1} = \begin{cases} 0, & \alpha+1>0 \\ \infty, & \alpha+1<0 \end{cases}$$

Widerspruch, d.h. f ist nicht über $(0,\infty)$ integrierbar

2. Fall $\alpha = -1$ $\Rightarrow F(x) = \log x$ und

$$\lim_{\beta \to \infty} \log\beta = \infty, \quad \lim_{\beta \to 0} \log\beta = -\infty$$

$\Rightarrow x^{-1}$ ist nicht integrierbar!

2) x^α ist über (0,1) integrierbar $\iff \alpha > -1$
x^α ist über $(1,\infty)$ integrierbar $\iff \alpha < -1$

3) Ist $f(x) = \log x$ integrierbar über (0,1)?

$$F(x) = x \log x - x \Rightarrow \lim_{\alpha \to 0+} F(\alpha) = 0 \Rightarrow \int_0^1 \log x dx = F(1) = -1$$

Erinnerung Wir haben die fundamentale Abschätzung (fA):

$$a < b \in \mathbb{R}, F \text{ mit } (\tilde{*}) \Rightarrow |F(b) - F(a)| \leqslant (b-a) \sup_{x \in (a,b) \setminus D} |F'(x)|$$

Außerdem (f_n) in $[a,b]$ integrierbar, (f_n) in $[a,b]$ gleichmäßig konvergent gegen f, F_n Stammfkt. von f_n mit $F_n(a) = 0 \Rightarrow$

- (F_n) glm. konv. gegen F
- F ist Stammfkt. von f

Konsequenz

1. Jede Treppenfunktion besitzt eine Stammfkt.
2. $a < b \in \mathbb{R}$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow f$ ist gleichmäßiger Limes in $[a,b]$ von Treppenfunktionen.

3.5.16 Satz

Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}([a,b])$. Dann besitzt f in $[a,b]$ eine Stammfkt. F, und es gilt $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$

Beweis Es ist klar, dass f eine Stammfkt. besitzt. Wähle dann $x, x+h \in (a,b)$ und bilde $F(x+h) - F(x) - hf(x) =: g_x(h)$

$$\text{z.z.} \lim_{h \to 0} \frac{g_x(h)}{h} = 0 \iff g_x(h) = o(h)$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists h(\varepsilon)\ \forall |h| \leqslant h(\varepsilon): \ |g_x(h)| \leqslant \varepsilon |h|$$

Wir wissen, dass $g_x \in \mathcal{C}([a-x, b-x])$ und diffb. ist für $x+h \notin D$; also ergibt die (fA)

$$\begin{aligned} |g_x(h)| = |g_x(h) - g_x(0)| &\leqslant |h| \sup_{\substack{0 \leqslant |h'| \leqslant |h| \\ x+h' \notin D}} |f(x+h') - f(x)| \\ &\leqslant \varepsilon |h| \text{ für } |h| \leqslant h(\varepsilon) \text{ wegen Stetigkeit} \end{aligned}$$

Beispiel (und Ü) Sei $(a_n) \subset (0,1)$, $a_n \neq a_m$ für $n \neq m$. Dann ist $F(x) := \sum_{n \geqslant 1} 2^{-n} |x - a_n|$ diffb. in $(0,1) \setminus (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3.5.17 Definition

Es sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ glm. Limes von Treppenfunktionen. Dann heißt f eine *Regelfunktion* in $[a,b]$, Gesamtheit $\mathcal{R}([a,b])$

z.B. $f(x) = \sum_{n \geqslant 1} 2^{-n} \operatorname{sgn}(x - a_n)$ ist eine Regelfunktion.

3.5.18 Hilfssatz

Für $f \in \mathcal{R}([a,b])$ existieren in jedem Punkt die rechts- und linksseitigen Grenzwerte, d.h.

$$f_\pm := \lim_{h\to 0 \substack{h<0 \\ h>0}} f(x+h) = f(x\pm 0)$$

Beweis Die Beh. ist klar für f Treppenfkt. Sei f der glm. Limes von Treppenfunktionen f_n. Für $x \in (a,b)$ und $h, h' > 0,\ x + h^{(')} \in (a,b)$:

$$\begin{aligned}
&|f(x+h) - f(x+h')| \\
&\leqslant |f(x+h) - f_n(x+h)| + |f(x+h') - f_n(x+h')| + |f_n(x+h) - f_n(x+h')| \\
&\leqslant 2\varepsilon + |f_{n(\varepsilon)}(x+h) - f_{n(\varepsilon)}(x+h')| \text{ für ein } n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \\
&\leqslant 3\varepsilon \text{ für } h, h' \leqslant h(\varepsilon, f_{n(\varepsilon)}) = h(\varepsilon)\square
\end{aligned}$$

Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \in (0{,}1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

besitzt keinen (rechtss.) Grenzwert in 0, ist also keine Regelfunktion.

Die Mittelwertsätze der Integralrechnung

Stets $[a,b] \subset \mathbb{R},\ f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar
Dann ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = (b-a)F'(c) = (b-a)f(c),$$

falls F überall diffb.

3.5.19 Satz (1. Mittelwertsatz)

Ist f stetig in $[a,b]$, so gibt es $c \in (a,b)$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Bemerkung Nach (fA) gilt i.allg. nur die Abschätzung

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant (b-a) \sup_{x\in(a,b)\setminus D} |f(x)|$$

Häufige Situation:

$$\int_a^b fg(x)dx \text{ mit } g \text{ nicht stetig}$$

Interessanter Fall $f(x) \geqslant 0$ und g beschränkt:

$$\infty < \underline{g} = \inf_{x \in [a,b]} g(x) \leqslant g(x) \leqslant \sup_{x \in [a,b]} g(x) = \overline{g} < \infty \text{ (!)}$$

Dann gilt $\underline{g} f(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant \overline{g} f(x)$, also wegen der Monotonie des Integrals

$$\underline{g} \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)f(x)dx \leqslant \overline{g} \int_a^b f(x)dx$$

$$\text{oder } \int_a^b g(x)f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \text{ mit } \alpha \in [\underline{g}, \overline{g}] \text{ (ZWS!)}$$

3.5.20 Satz (Erweiterter Mittelwertsatz)

Es seien $f, g \in \mathcal{R}([a,b]),\ f \geqslant 0$ und g stetig. Dann gilt

$$\int_a^b fg(x)dx = g(c) \int_a^b f(x)dx \text{ für ein } c \in [a,b]$$

Beweis Beachte, dass $\mathcal{R}([a,b])$ eine Algebra ist! □

Anwendung $f \in [a,b]$ mit $(*_{n+1})$. Dann gilt für $x, x+h \in (a,b)$:

$$f(x+h) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j + \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 \overbrace{(1-t)^n}^{f} \overbrace{f^{(n+1)}(x+th)}^{g \text{ stetig}} dt$$

Ist $f \in \mathcal{C}^{n+1}(a,b)$, so folgt aus 3.5.20:

$$\begin{aligned} \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x+th)dt &= \frac{h^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(x+\theta h) \int_0^1 (1-t)^n dt \\ &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x+\theta h) \end{aligned}$$

(das Lagrange-Restglied unter stärkeren Voraussetzungen)

Ein anderer Mittelwertsatz

$G(x) := \int_a^x g(t)dt,\ f$ diffb., g, f' integrierbar, $f' \geqslant 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_a^b fg(x)dx = [fG]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)dx &= f(b)\int_a^b g(t)dt - \int_a^b f'(x)G(x)dx \\ &\overset{\text{Erw.MWS}}{=} f(b)\int_a^b g(t)dt - G(c)\int_a^b f'(x)dx \\ &= f(b)\int_a^b g(t)dt - \int_a^c g(t)dt(f(b)-f(a)) \\ &= f(b)\int_c^b g(t)dt + f(a)\int_a^c g(t)dt \end{aligned}$$

3.5.21 Satz (2. Mittelwertsatz)

$f', g \in \mathcal{R}([a,b]),\ f' \geqslant 0$. Dann ist auch $f \in \mathcal{R}([a,b])$ und

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(t)dt + f(b)\int_c^b g(t)dt \text{ für ein } c \in [a,b]$$

VL: Do, 2003-06-16

Eigenschaften von Regelfunktionen:

1. Für eine Regelfunktion f existiert der rechts- und linkss. Grenzwert:

$$\lim_{h\to 0+} f(x+h) =: f_+(x) \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0-} f(x-h) =: f_-(x)$$

In allen Punkten x, in denen nicht $f_-(x) \neq f_+(x)$ gilt, ist f also stetig. Diese Punkte heißen *Sprungstellen* von f.
Übung: f hat höchstens abzb viele Sprungstellen, und diese sind genau die Punkte, an denen die Stammfunktion nicht diffb. ist.

2. Jede Regelfunktion besitzt eine Stammfunktion, ist also integrierbar.

3.5.22 Hilfssatz (Riemann)

Es sei f eine Regelfunktion in $[a,b]$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(t)\sin nt dt = 0$$

Beweis: Ist f konstant, so gilt:

$$\left|\int_a^b f(t)\sin nt dt\right| = \left|\left[\frac{-\cos nt}{t}\right]_a^b f(a)\right| = \left|\frac{f(a)}{n}(\cos na - \cos nb)\right|$$

$$\leqslant \frac{2\sup f}{n} = \frac{2\|f\|_\infty}{n}$$

Ist f Treppenfunktion, dann ist diese Aussage auch wahr (abzb. viele konstante Fkt.!).

Allgemein: $f = \lim_{n\to\infty} f_n, f_n \in \mathcal{T}[a,b]$
$\Rightarrow$ zu $\varepsilon > 0$ gibt es $n(\varepsilon)$ mit $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(t)\sin nt dt\right| \leqslant \left|\int_a^b (f - f_{n(\varepsilon)})(t)\sin nt dt\right| + \left|\int_a^b f_{n(\varepsilon)}(t)\sin nt dt\right|$$

$$\leqslant \varepsilon(b-a) + \varepsilon \qquad \text{für } n \geqslant n_1(\varepsilon)$$

3. Ist $(f_n) \subset \mathcal{R}[a,b]$ und glm. konv. gegen f, so konvergiert (F_n) gleichmäßig gegen F, wenn F_n, F die Stammfunktionen von f_n, f bedeuten mit $F_n(a) = F(a) = 0$.

Beispiel: Die arctan-Reihe aus

$$\frac{d}{dt}\arctan t = \frac{1}{1+t^2} = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j t^{2j} \in \mathcal{R}[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$$

$$\Rightarrow \arctan t = \sum_{j\geqslant 0}(-1)^j \frac{t^{2j+1}}{2j+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \sum_{j\geqslant 0} \frac{(-1)^j}{2j+1} \qquad \text{Leibniz: Impari deus numero gaudet!}$$

Die explizite Integration,

d.h. die explizite Berechnung von Stammfunktionen („integration in finite terms"):

Beispiele: 1. Polynome $\mathbb{C}[x]$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\operatorname{gr} f} a_j x^j \text{ hat Stfk. } F(x) = \sum_{j=0}^{\operatorname{gr} f} \frac{a_j}{j+1} x^{j+1}, F \in \mathbb{C}[x]$$

Steckbrief einer Funktion am Beispiel von cosh**:**

a) Definition:

$$\mathbb{R}_+ \to [1,\infty) \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

b) Funktionalgleichungen:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$\cosh(-x) = \cosh x$$

c) Umkehrfunktion:

$$\operatorname{Arcosh} : [1,\infty) \to \mathbb{R}_+$$

$$2y = e^x + \frac{1}{e^x} =: u + \frac{1}{u} \qquad (u-y)^2 = y^2 - 1 \qquad e^x = u = y + \sqrt{y^2-1}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Arcosh} y = \log(y + \sqrt{y^2-1})$$

d) Ableitung und Stammfunktion (von f und f^{-1}):

$$\cosh' x = \sinh x \qquad \sinh' x = \cosh x$$

$$\operatorname{Arcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Stfk. von Arcosh: $G(x) = xf^{-1}(x) - F \circ f^{-1}(x) = x \operatorname{Arcosh} x - \sinh(\operatorname{Arcosh} x)$

e) Spezielle Werte (Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, etc.) und Skizze

$$\textit{Beachte:}\ \operatorname{Arcosh} y = \int_1^y \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \log(y + \sqrt{y^2-1}) \quad \text{(direkt?)}$$

3.5.23 Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset \mathcal{D}(f) \to \mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$ heißt *elementar*, wenn sie aus den Funktionen

(1) const, $x, \sin x, e^x$ gewonnen werden kann mittels der folgenden Operationen:

(2a) Grundrechenarten $(+, \cdot$, deren Inverse$)$,

(2b) Bildung der Umkehrfunktion,

(2c) Zusammensetzung.

Andernfalls heißt die Funktion *transzendent*.

3.5.24 Definition

Eine elementare Funktion heißt *explizit integrierbar*, wenn sie eine elementare Stammfunktion besitzt.

3.5.25 Hilfssatz

Jede elementare Funktion ist im Inneren ihres Definitionsbereichs differenzierbar und ihre Ableitung ist elementar.

Problem: Besitzt jede elementare Funktion eine elementare Stammfunktion? Zu schwer für uns, also Fortsetzung der Beispiele.

2. Rationale Funktionen:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \qquad p, q \in \mathbb{R}[x] \qquad \text{o.B.d.A. gr } p < \text{gr } q$$

$$q(x) = a \prod_{\lambda \in q^{-1}(0)} (x-\lambda)^{m(\lambda)} \qquad m(\lambda) \in \mathbb{N} \text{ (Vielfachheit)}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{q(x)} = \frac{1}{a \prod_{\lambda \in q^{-1}(0)} (x-\lambda)^{m(\lambda)}} = \frac{1}{a} \sum_{\lambda \in q^{-1}(0)} \sum_{j=1}^{m(\lambda)} \frac{a_{\lambda j}}{(x-\lambda)^j}$$

Also genügt es, die Stfk. von $\frac{x^k}{(x-\lambda)^j}$ aufzufinden, für $j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+$.
oBdA: $k = 0$.

1. Fall: $j > 1$. Wir berechnen für $\lambda \in \mathbb{C}; x, x+h \neq \lambda; x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h-\lambda)^j} - \frac{1}{(x-\lambda)^j}\right)\\
= &\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{(x-\lambda)^j - \sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}h^l(x-\lambda)^{j-l}}{(x-\lambda)^j(x+h-\lambda)^j}\\
= &\lim_{h\to 0} \frac{-\sum_{l=1}^{j}\binom{j}{l}h^{l-1}(x-\lambda)^{j-l}}{(x-\lambda)^j(x+h-\lambda)^j}\\
= &\lim_{h\to 0} \frac{-j(x-\lambda)^{j-1}+O(h)}{(x-\lambda)^j(x+h-\lambda)^j} = -j(x-\lambda)^{j-1}
\end{aligned}$$

3.5.26 Hilfssatz

Für $\lambda \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda\}$ ist $x \mapsto (x-\lambda)^j$ diffb. für $j \in \mathbb{Z}$ und

$$\frac{d}{dx}(x-\lambda)^j = j(x-\lambda)^{j-1}$$

Also besitzt $(x-\lambda)^{-j}$ für $j \in \mathbb{N}, j > 1$ die Stfk. $\frac{(x-\lambda)^{1-j}}{1-j}$.

2. Fall: $j = 1$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{\lambda\in q^{-1}(0)} \sum_{j=1}^{m(\lambda)} \frac{b_{\lambda j}}{(x-\lambda)^j} \in \mathbb{R}$$

Betrachte einen Term $\frac{a_{\lambda 1}}{(x-\lambda)}$; wegen $f(x) = \overline{f(x)}$ gibt es dann auch den Term $\frac{\overline{a_{\lambda 1}}}{(x-\overline{\lambda})}$

2.1. Fall: $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$ Dann hat $\frac{a_{\lambda 1}}{(x-\lambda)}$ in $x \neq \lambda$ die Stfk.

$$f(x) = a_{\lambda 1} \cdot \log|x-\lambda| \qquad (!)$$

2.2. Fall: $\lambda \neq \overline{\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
Dann ist

$$\frac{\overline{a_{\lambda 1}}}{(x-\overline{\lambda})} \neq \frac{a_{\lambda 1}}{(x-\lambda)} \qquad \text{und}$$

$$\frac{a_{\lambda 1}}{(x-\lambda)} + \frac{\overline{a_{\lambda 1}}}{(x-\overline{\lambda})} = \frac{a_{\lambda 1}(x-\overline{\lambda}) + \overline{a_{\lambda 1}}(x-\lambda)}{(x-\lambda)(x-\overline{\lambda})} = \frac{2\operatorname{Re} a_{\lambda 1}\cdot x - 2\operatorname{Re} a_{\lambda 1}\cdot\overline{\lambda}}{\underbrace{x^2 - 2\operatorname{Re}\lambda\cdot x + |\lambda|^2}_{=(x-\operatorname{Re}\lambda)^2+(\operatorname{Im}\lambda)^2}}$$

Es bleibt zu berechnen

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_a^x \frac{\alpha t+\beta}{(t-\gamma)^2+\delta^2}dt \qquad \text{mit } \delta \neq 0\\
&= \frac{1}{\delta^2}\int_a^x \frac{\alpha t+\beta}{\left(\frac{t-\gamma}{\delta}\right)^2+1}dt \qquad u = \frac{t-\gamma}{\delta}, du = \frac{1}{\delta}dt\\
&= \frac{1}{\delta}\int_{a'}^{x'} \frac{\alpha(\delta u+\gamma)+\beta}{u^2+1}du \qquad a' = \frac{a-\gamma}{\delta} \leqslant u \leqslant \frac{x-\gamma}{\delta} = x'
\end{aligned}$$

2.2.1. Fall: $\alpha \neq 0$

$$F(x) = \alpha \int_{a'}^{x'} \frac{u + \overbrace{\frac{\gamma}{\delta} + \frac{\beta}{\alpha\delta}}^{\frac{\beta'}{2}}}{u^2+1} du = \frac{\alpha}{2} \int_{a'}^{x'} \frac{2u+\beta'}{u^2+1} du$$

zu lösen:

$$\int_{a'}^{x'} \frac{2udu}{u^2+1} = \int_{a'^2}^{x'^2} \frac{dv}{v+1} = \log \frac{x'^2+1}{a'^2+1}$$

mit $v = u^2, 2udu = dv, a'^2 \leqslant v \leqslant x'^2$
Weiter zu lösen ist:

$$\beta' \int_{a'}^{x'} \frac{du}{u^2+1} = \beta'(\arctan x' - \arctan a')$$

elementar!

2.2.2. Fall: $\alpha = 0$ schon erledigt.

Ergebnis: Die rationalen Funktionen sind elementar integrierbar.

VL: Do, 2003-06-19

3.5.27 Satz

Alle reellen rationalen Funktionen sind elementar integrierbar.

$$\int^t \frac{dx}{(x-\lambda)^{\nu+1}} = \frac{(t-1)^{-\nu}}{-\nu}, \quad \nu \geqslant 1$$

$$\int^t \frac{dx}{x^2+1} = \arctan t$$

3.5.28 Satz

Die folgenden elementaren Funktionen sind elementar integrierbar. Dabei sei R stets eine "rationale" Funktion, d.h. eine mittels der Grundrechenarten aus ihren Argumenten geformte Funktion.

a) $R(x, \sqrt[k]{ax+b}),\ k \in \mathbb{N},\ a,b \in \mathbb{R}$

b) $R(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}),\ k \in \mathbb{N},\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$

c) $R(e^{ax}),\ R(\sinh ax, \cosh ax),\ a \in \mathbb{R}$

d) $R(\sin ax, \cos ax),\ a \in \mathbb{R}$

e) $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}),\ a,b,c \in \mathbb{R}$

f) $R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}),\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$

Beweis Alle Integrationen werden durch passende Substitutionen auf die Integration rationaler Funktionen zurückgeführt.

a) $u := \sqrt[k]{ax+b}$

b) $u := \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

c) $u := e^{ax}$

e) Rückführung auf

$$\begin{array}{llll} R(x, \sqrt{1+x^2}) & x = \sinh t; & R(x, \sqrt{1-x^2}) & x = \sin t \\ R(x, \sqrt{x^2-1}) & x = \cosh t & & \end{array}$$

f) $t = \sqrt{ax+b} \Rightarrow \sqrt{cx+d} = \sqrt{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}$

d) o.B.d.A. $a = 1$. Substituiere

$$t = \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 + \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\Longleftrightarrow \; t^2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1 \; \Longleftrightarrow \; \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$dt = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx \; \Longleftrightarrow \; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin 2\frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \cos 2\frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 \\ &= \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{2-1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}$$

Abel (et al.): Nicht alle elementaren Funktionen sind elementar integrierbar! z.B. nicht die folgenden:

3.5.29 Definition

1. Die Funktion
$$\Phi(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$
heißt das *Gaußsche Fehlerintegral*.

2. Die Funktion
$$Li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}, \quad x \geqslant 2$$
heißt der *Integral-Logarithmus*.

3. Die Funktion

$$\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto \int_0^x \sin(t^2)dt \text{ bzw. } \int_0^x \cos(t^2)dt$$

heißen *Fresnelsche Integrale.*

Bemerkung zu 2) Li hängt zusammen mit der Primzahlverteilungsfunktion

$$\pi(x) := \#\{n \in \mathbb{N}; n \leqslant x, n \text{ prim}\} = P \cap \mathbb{N}_x$$

Wenn wir π und Li plotten auf DIN A4 für $x \leqslant 100\,000$, dann sind die Graphen nicht zu unterscheiden! Auf einer Skala von 1 bis 100 Mio. gilt immer

$$\pi(x) \leqslant Li(x) \leqslant \pi(x) + 320$$

Skewes: Es gibt ein $x_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$Li(x_0) < \pi(x_0) \text{ und } x_0 \leqslant 10^{10^{10^{34}}}$$

$$\begin{aligned}\int_2^x 1\frac{dt}{\log t} &= \left.\frac{t}{\log t}\right|_2^x + \int_2^x t(\log t)^{-2}\frac{dt}{t} \\ &= \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} \\ &= \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + o\left(\frac{x}{\log x}\right), \quad x \to \infty(!)\end{aligned}$$

3.5.30 Satz (Hadamard, de la Vallé-Poussin)

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x}(1 + o(x)) \text{ für } x \to \infty$$

Richardson Das Problem der elementaren Integrierbarkeit ist unentscheidbar, d.h. es gibt keinen Algorithmus, der die Antwort liefert.

3.6 Konstruktion spezieller Funktionen mit Integralen

Die zweiteinfachste Klasse elementarer Funktionen sind die *trigonometrischen Polynome*, d.h. die Funktionen der Form

$$T(x) = \sum_{j=-n}^{n} a_j (e^{ix})^j = \sum_{j=-n}^{n} a_j e^{ijx}; \quad a_j \in \mathbb{C}$$

n heißt der *Grad* von T.

Bemerkungen

1. Zum Namen:
$$e^{ijx} = (\cos x + i \sin x)^j$$

2. T ist unendlich oft differenzierbar, $T \in C^\infty(\mathbb{R})$, insbesondere auch stetig.

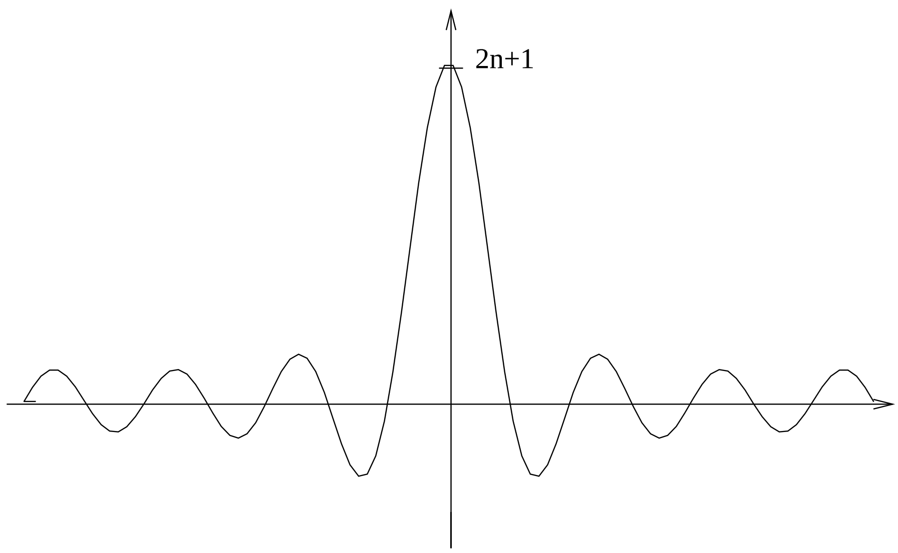
3. Die Gesamtheit aller trigonometrischen Polynome, $\mathcal{TP}(\mathbb{R})$ ist eine Algebra. Sie ist abgeschlossen unter Differentiation und Integration.

4. Alle trigonometrischen Polynome sind periodisch mit der Periode 2π. Es genügt also, sie (z.B.) auf $[-\pi, \pi)$ (oder $(-\pi, \pi]$) zu betrachten.
Wir können die mit 2π periodischen stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ identifizieren mit den stetigen Funktionen
$$S^1 = \mathbb{R}/_{2\pi\mathbb{Z}} \ni \theta \mapsto \tilde{f}(\theta) := f(x)$$
$$C_{[2\pi]}(\mathbb{R}) \to C(S^1) : f \overset{\varrho}{\mapsto} \tilde{f}$$
Dann können wir den Stone-Weierstraß Approximationssatz auf die Algebra $\mathcal{TP}(\mathbb{R})$ anwenden und finden:

3.6.1 Satz

Jedes $f \in C_{[2\pi]}(\mathbb{R})$ lässt sich gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximiernen.

5. Spezielle trigonometrische Polynome
Setze $e_k(x) := e^{ikx},\ k \in \mathbb{Z}$;
sodann
$$\begin{aligned}
D_n(x) &:= \sum_{j=-n}^{n} e_j(x) \\
&= (e^{ix})^{-n} + (e^{ix})^{-n+1} + \ldots + (e^{ix})^n \\
&= (e^{ix})^{-n} \sum_{j=0}^{2n} (e^{ix})^j \\
&= e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} \\
&= \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})} \\
&= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}
\end{aligned}$$
$\Rightarrow D_n \in C(\mathbb{R})$



$$D_n(0) = 2n+1, \quad D_n(-x) = D_n(x)$$

$$F_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} D_j(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\sin(j+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\cos jx - \cos(j+1)x = \cos\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)x - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)x + \frac{x}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\left(j+\frac{1}{2}\right)x\right)\sin\frac{x}{2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow n\cdot\sin^2\frac{x}{2}F_n(x) &= \sum_{j=0}^{n-1}\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)x\sin\frac{x}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}[\cos jx - \cos(j+1)x] \\
&= \frac{1}{2}[\cos 0\cdot x - \cos nx] \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{n}{2}-\frac{n}{2}\right)x - \cos\left(\frac{n}{2}+\frac{n}{2}\right)x\right] \\
&= \sin^2\frac{nx}{2}
\end{aligned}$$

d.h.

$$F_n(x) = \frac{1}{n}\cdot\frac{\sin^2\frac{nx}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} \geqslant 0!$$

6. Es sei $T = \sum_{j=-n}^{n} a_j e^{ijx}$; dann ist a_j durch T eindeutig bestimmt! Denn:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ijx}dx = \begin{cases} 2\pi & ; j = 0 \\ \frac{1}{ij}(e^{ij\pi} - e^{-ij\pi}) = 0 & ; j \neq 0 \end{cases}$$

Also gilt

$$\boxed{a_{j_0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x) e^{-ij_0 x} dx}$$

3.6.2 Definition

Es sei f eine 2π-periodische Regelfunktion (d.h. $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi],\ f(\pi) = f(-\pi)$ und $f(x + 2k\pi) = f(x)$). Dann nennen wir

$$\hat{f}_j := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ijx} dx \in \mathbb{C}$$

den j-ten *Fourier-Koeffizienten* von $f,\ j \in \mathbb{Z}$, und

$$S_n f(x) := \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}_j e_j(x)$$

das n-te *Fourierpolynom* von f.

Problem: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ ?}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ijt+ijx} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{j=-n}^{n} e^{ij(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) f(t) dt \end{aligned}$$

Also wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} S_j f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} D_j(x-t) f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t) f(t) dt \end{aligned}$$

3.6.3 Definition

- D_n heißt der n-te *Dirichlet-Kern*,
- F_n der n-te *Fejer-Kern*.

VL: Mo, 2003-06-23

Erinnerung Die uneigentliche Integrierbarkeit, d.h. f ist eine Regelfunktion in jedem komp. Teilintervall von (a, b), $x_0 \in (a, b)$. Dann besitzt f eine Stammfkt. F in (a, b) mit $F(x_0) = 0$. f heißt dann (uneigentlich) integrierbar über (a, b), falls $\lim_{x \to a+} F(x) =: F(a+)$ und $\lim_{x \to b-} F(x) =: F(b-)$ existieren; dann

$$\int_a^b f(x)dx := F(b-) - F(a+)$$

Dazu benutzt man sinnvollerweise das Cauchykriterium:

$$\lim_{x \to b-} F(x) \text{ existiert}$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists b(\varepsilon) \in (a, b)\ \forall b_1, b_2 \in (b(\varepsilon), b) : \ |F(b_1) - F(b_2)| \leqslant \varepsilon$$

$$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists b(\varepsilon) \in (a, b)\ \forall b_1, b_2 \in (b(\varepsilon), b) : \left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)dx \right| \leqslant \varepsilon$$

$$\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}) \supset \mathcal{TP}(\mathbb{R}) \ni T \iff T(x) = \sum_{j=-n}^{n} a_j e_j(x),\ e_j(x) = e^{ijx}$$

$$\Rightarrow a_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T(x)\overline{e_j(x)}dx$$

Weierstraß Jedes $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ ist glm. durch $T \in \mathcal{TP}(\mathbb{R})$ approximierbar

$$D_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} e_j(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}} \quad \textit{Dirichlet-Kern}$$

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} D_j(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \quad \textit{Fejer-Kern}$$

3.6.4 Definition

Es sei $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Wir setzen

$$S_n(f)(x) := \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j) e_j(x) \text{ für } n \in \mathbb{Z}_+$$

und nennen diese Folge die *Fourier-Reihe* von f; diese Def. gilt unabhängig davon, ob die Folge konvergiert oder nicht.

Bemerkung Ist $f \in \mathcal{TP}(\mathbb{R})$, so ist $S_n(f) = f$ für n genügend groß.

Exkurs: Eigenschaften der Funktionenfolge (F_n)

1. $F_n(x) \geqslant 0 \; \forall n, x$

2. $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_n(x)dx = 1, \quad F_n(x) = 0 \text{ für } |x| > \pi$$

3. Zu jedem $\varepsilon > 0$ und $r \in (0, \pi)$ gibt es ein $n = n(\varepsilon)$ so, dass für $n \geqslant n(\varepsilon)$:
$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus[-r,r]} F_n(x)dx \leqslant \varepsilon$$
Beweis:
$$\pi \geqslant |x| \geqslant r > 0 \iff F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 \leqslant \frac{1}{n\sin^2\frac{r}{2}} \to 0$$

4. F_n ist gerade für alle $n \geqslant 1$.

3.6.5 Definition

Eine Folge $(\delta_n) \subset \mathcal{R}(\mathbb{R})$ mit den Eigenschaften 1,2,3 heißt eine *Dirac-Folge* in $\mathbb{R}$. Gilt zusätzlich 4, so heißt (δ_n) eine *gerade Dirac-Folge* in $\mathbb{R}$.

Zusammenhang mit $S_n(f)$

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}(j)e_j(x) = \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ijt}dte^{ijx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{j=-n}^{n} e^{ij(x-t)}dt \end{aligned}$$

$$\boxed{\Rightarrow S_n(f)(x) = \tfrac{1}{2\pi}\textstyle\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t)f(t)dt}$$

also auch $\boxed{\sigma_n(f)(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} S_j(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t)f(t)dt}$

3.6.6 Satz (Approximationssatz für Dirac-Folgen)

Es sei $(\delta_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ eine Dirac-Folge und f eine Regelfunktion in $\mathbb{R}$ mit kompaktem Träger. Dann gilt

1) Ist f stetig im Punkt x_0, so konvergiert

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x_0 - t)f(t)dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$$

Beweis:

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(x_0-t)f(t)dt - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(x_0-t)[f(t)-f(x_0)]dt\right|$$

$[u := x_0 - t,\ du = -dt]$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(u)\underbrace{[f(x_0-u)-f(x_0)]}_{\leqslant\varepsilon \text{ für } |u|\leqslant r(\varepsilon)}du\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\left[\int_{|u|\leqslant r(\varepsilon)} + \int_{|u|>r(\varepsilon)}\right]\delta_n(u)(f(x_0-u)-f(x_0))du\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty}\delta_n(u)du + \frac{2}{2\pi}\|f\|_\infty\int_{\mathbb{R}\setminus[-r(\varepsilon),r(\varepsilon)]}\delta_n(u)du$$

$$\leqslant \varepsilon + 2\varepsilon\|f\|_\infty \text{ für } n \geqslant n(\varepsilon, r(\varepsilon))$$

2) Ist f gleichmäßig stetig auf einer Menge $A \subset \mathbb{R}$, so ist auch die Konvergenz glm. in A.

3) Hat statt f δ_n festen kompakten Träger und ist f beschränkt, so gelten dieselben Aussagen.

Dieses Ergebnis lässt sich nun auf (F_n) übertragen, weil F_n kompakten Träger (in $[-\pi,\pi]$) hat.

3.6.7 Definition

Es sei $f:\ X \to E$, X metrischer Raum, E Vektorraum. Dann definieren wir den *Träger* (support) von f durch

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X;\ f(x) \neq 0\}}$$

f hat kompakten Träger $\iff$ $\operatorname{supp} f$ kompakt in X

3.6.8 Satz

1. Ist $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$, so gilt $\lim_{n\to\infty}\sigma_n(f)(x) = f(x)$ glm. in $x \in \mathbb{R}$
2. Ist $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ und stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$ und ist weiter die Fourier-Reihe in x_0 konvergent, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f)(x_0) = f(x_0)$$

Beweis

1. Wir wenden 3.6.6 an auf (F_n), eine Dirac-Folge mit kompaktem Träger.
2.

$$S_n(f)(x_0) \underset{n\to\infty}{\to} S_\infty(f)(x_0) \Rightarrow \sigma_n(f)(x_0) \underset{n\to\infty}{\to} S_\infty(f)(x_0) \text{ weil arithmet. Mittel,}$$

$$\text{aber } \sigma_n(f)(x_0) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0) \text{ nach 1.}$$

3.6.9 Satz

Ist $f \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ und Lipschitz-stetig, so gilt $S_n(f)(x) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} f(x)\ \forall x$.
Das gilt auch, wenn $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ und Lipschitz-stetig in x.s

Beweis: Wir setzen $D_n(x) := 0$ für $|x| > \pi$ und betrachten

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} D_n(x-t)(f(t)-f(x))dt \quad (u := x-t)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} D_n(u)(f(x-u)-f(x))du\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\left((n+\frac{1}{2})u\right)\underbrace{\frac{f(x-u)-f(x)}{\sin\frac{u}{2}}}_{=:f_x(u)}du \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Für $|u| \geqslant \varepsilon$ ist $f_x(u)$ eine gleichmäßig beschränkte Regelfunktion.
Dann schätzen wir ab

$$(1)\ \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|u|\leqslant\varepsilon} \sin\left((n+\frac{1}{2})u\right) f_x(u)du\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}C_x \cdot 2\varepsilon$$

$$(2)\ \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \sin\left((n+\frac{1}{2})u\right) f_x(u)du \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

Es gibt stetige Funktionen, deren Fourier-Reihen in abzählbar vielen Punkten divergieren! (du Bois-Reymond Kolmogorov)
Aber: Für $f \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ ist die Fourier-Reihe fast überall konvergent (L. Carleson 1966).

3.6.10 Beispiele für Fourier-Reihen

VL: Do, 2003-06-26

Euler-Fouriersche Formel

$f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikx} &= \sum_{k=-\infty}^{-1} \hat{f}(k)e^{ikx} + \hat{f}(0)e^{i\cdot 0\cdot x} + \sum_{k=1}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ikx}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\hat{f}(-k)e^{-ikx} + \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ikx}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\hat{f}(-k)\cos kx - i\hat{f}(-k)\sin kx + \hat{f}(k)\cos kx + i\hat{f}(k)\sin kx\right) + \hat{f}(0)\\ &= \hat{f}(0) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\hat{f}(-k)+\hat{f}(k)\right)\cos kx + i\left(\hat{f}(k)-\hat{f}(-k)\right)\sin kx\right]\\ &= \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k \sin kx)}_{\text{Cosinus-Sinus-Darstellung}} \end{aligned}$$

mit $a_k = \hat{f}(-k) + \hat{f}(k),\ k = 0,1,\ldots \quad b_k = i(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)),\ k = 1,2,\ldots$

Euler-Fouriersche Formeln:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(e^{ikt}+e^{-ikt}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) 2\cos kt\ dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\ dt, \quad k = 0{,}1,\ldots \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ dt, \quad k = 1{,}2,\ldots \end{aligned}$$

$$f \text{ reell und gerade} \Rightarrow \begin{cases} f(t)\cos kt \text{ gerade} \\ f(t)\sin kt \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(t)\cos kt\ dt + \int_{0}^{\pi} f(t)\cos kt\ dt\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos kt\ dt,$$

$$b_k = 0$$

$$f \text{ reell und ungerade} \Rightarrow \begin{cases} a_k = 0 \\ b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin kt\ dt \end{cases}$$

Beispiel 1 Die Vorzeichen-Funktion

$$f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}) f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & x \in (-\pi,\pi) \\ 0, & |x| = \pi \end{cases}$$

f ist ungerade $\Rightarrow a_k = 0,$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot \sin kx\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0 \pi \frac{(-coskx)'}{k} dx \\ &= \frac{2}{\pi} - \left.\frac{\cos kx}{x}\right|_0^{\pi} - \frac{2}{k\pi}(\cos k\pi - \cos 0) \\ &= -\frac{2}{k\pi}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0, & k = 2{,}4,\ldots \\ \frac{4}{k\pi}, & k = 1{,}3,\ldots \end{cases} \end{aligned}$$

$$S_\infty f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$$

$$S_\infty f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$$

1. Methode

Wenn f Lipschitz-stetig in x ist

$$\Rightarrow S_\infty f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_k \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = f(x),\ x \in (-\pi,\pi)\setminus\{0\}$$

Wir haben auch $S_\infty f(k\pi) = 0 = f(k\pi)$.

2. Methode: Dirichlet-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz

$f_k: X \to \mathbb{C},\ g_k: X \to \mathbb{R}$

1. $F_k := f_1 + \ldots + f_k, \sum_{k\geqslant 1} f_k$ sind gleichmäßig beschränkt, d.h.

$$\exists M \geqslant 0: \sup_{x\in X} |F_k(x)| \leqslant M \ \forall k \in \mathbb{N}$$

2. $g_k \to 0$ gleichmäßig

3. Für jedes feste $x \in X$ ist $(g_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

$\Rightarrow \sum f_k g_k$ konvergiert gleichmäßig auf X.

Korollar

Die Reihe $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x$ konvergiert gleichmäßig auf $[\delta, \pi-\delta],\ \delta > 0$.

Beweis: $f_k(x) = \sin(2k+1)x,\ g_k = \frac{1}{2k+1}$

$$F_k(x) = f_1(x) + \ldots + f_k(x) = \frac{\sin^2 kx}{\sin x} \text{ (Induktion) } \Rightarrow |F_k(x)| \leqslant 1$$

Beispiel 2: Der Absolutbetrag

$$f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}),\ f(x) = |x|,\ |x| \leqslant \pi$$

f gerade $\Rightarrow b_k = 0$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos kt\ dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\frac{(\sin kx)'}{k}dt \\ &= \underbrace{\frac{2}{\pi}\, t\frac{\sin kt}{k}\Big|_0^\pi}_{0} - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin kt}{k}dt = \left(-\frac{\cos kt}{k^2}\right)\Big|_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi k^2}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0, & k = 2,4,\ldots \\ -\frac{4}{\pi k^2}, & k = 1,3,\ldots \end{cases} \end{aligned}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t dt = \pi$$

$$\Rightarrow S_\infty f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right) = f(x)$$

$$\left|\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(2k+1)^2} \Rightarrow \text{ Konvergenz}$$

Setzen $x = 0:\ \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) = f(0) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2k+1)^2} + \ldots$$

Beispiel 3 $g \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}),\ g(x) = \frac{(\pi-x)^2}{4}$ auf $[0{,}2\pi]$
g ist gerade $\Rightarrow b_k = 0,\ a_k = \frac{1}{k^2},\ a_0 = \frac{\pi^2}{6}$

$$\left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2} \cos kx,\ x \in \mathbb{R}$$

$$x = 0 \Rightarrow \frac{\pi^2}{6} = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}$$

Beispiel 4 $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}),\ f(x) = \cos(zx)$ auf $[-\pi, \pi]$, $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
f gerade $\Rightarrow g_k = 0$

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos zx \cos kx\ dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(z+k)x + \cos(z-k)x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{(\sin(z+k)x)'}{z+k} + \frac{(\sin(z-k)x)'}{z-k}\right] dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(z+k)x}{z+k}\Big|_0^\pi + \frac{\sin(z-k)x}{z-k}\Big|_0^\pi\right] \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin(z\pi + k\pi)}{z+k} + \frac{\sin(z\pi - k\pi)}{z-k}\right) \\
&= (-1)^k \frac{\sin \pi z}{\pi} \left[\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k}\right]
\end{aligned}$$

Mit $\sin(\alpha + k\pi) = (-1)^k \sin\alpha$ folgt

$$\cos zx = \frac{\sin \pi z}{\pi} \left[\frac{1}{z} + \sum_{k\geqslant 1} (-1)^k \left(\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k}\right) \cos kx\right]$$

$x = \pi$:

$$\underbrace{\pi \cot \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{k\geqslant 1} \left(\frac{1}{z+k} + \frac{1}{z-k}\right)}_{\text{Partialbruchzerlegung des Cotangens}}$$

Anwendungen: Riemannsche Zeta-Funktion

$\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ konvergiert für $s > 1$, $\zeta(2) = \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$\cot x = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} 4^n x^{2n}$$

$$\Rightarrow \cot \pi x = \frac{1}{\pi x} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} \underbrace{(4^n \pi^{2n})}_{(2\pi)^{2n}} x^{2n}$$

$$\Rightarrow \pi \cot \pi x - \frac{1}{x} = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{B_{2n}}{(2n)!} (2\pi)^{2n} x^{2n-1}$$

$$\begin{aligned}
\pi\cot\pi z-\frac{1}{z}&=\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{z+k}+\frac{1}{z-k}\right)=\sum_{k\geqslant 1}\left[\frac{1}{k(1+\frac{z}{k})}-\frac{1}{k(1-\frac{z}{k})}\right]\\
&=\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}\left(\sum_{j\geqslant 0}(-1)^j\left(\frac{z}{k}\right)^j-\sum_{j\geqslant 0}\left(\frac{z}{k}\right)^j\right)\\
&=\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k}\left(-\frac{2z}{k}-\frac{2z^3}{k^3}-\dots\right)\\
&\quad\text{[für } |z|<1 \text{ absolut konvergent]}\\
&=-2z\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}\left(1+\frac{z^2}{k^2}+\dots\right)=-2z\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}\sum_{j\geqslant 0}\frac{z^{2j}}{k^{2j}}\\
&=-2z\sum_{j\geqslant 0}\underbrace{\left(\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^{2j+2}}\right)}_{\zeta(2j+2)}z^{2j}
\end{aligned}$$

$$\pi\cot\pi z-\frac{1}{z}=-2z\sum_{j\geqslant 0}\zeta(2j+2)z^{2j}=-2\sum_{j\geqslant 0}\zeta(2j+2)z^{2j+1}$$

$$\boxed{\Rightarrow \zeta(2n)=(-1)^{n+1}\tfrac{B_{2n}}{2\cdot(2n)!}(2\pi)^{2n}}$$

durch Koeffizientenvergleich

Folgerung Die Cotangensreihe $\sum(-1)^n\frac{B_{2n}}{(2n)!}4^n x^{2n}$ hat KR=π

Beweis

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left(\left|\frac{B_{2n}}{(2n)!}\cdot 4^n\right|\right)^{\frac{1}{2n}}=\lim_{n\to\infty}\sup\left(\frac{2\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}\cdot 4^n\right)^{\frac{1}{2n}}=\frac{1}{\pi}$$

(Wegen $1<\zeta(2n)\leqslant\zeta(2)$ folgt $\lim(\zeta(2n))^{\frac{1}{2n}}=1$.)

2. Anwendung: Eulersches Sinus-Produkt

VL: Mo, 2003-06-30

$$\sin(\pi x)=\pi x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)$$

Beweis: Wir wissen schon, dass

$$\pi\cot(\pi x)-\frac{1}{x}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-k^2}$$

Die Reihe konvergiert normal in $[-a,a], |a|<1$, da:

$$|x|\leqslant a<1,\left|\frac{2x}{x^2-k^2}\right|=\frac{2|x|}{k^2-|x|^2}\leqslant\frac{2a}{k^2-a^2},\qquad \sum_{k\geqslant 1}\frac{2a}{k^2-a^2}\quad\text{konvergent.}$$

Wir suchen nun eine Stammfunktion beider Seiten, die in 0 verschwindet.

$$F(x) = \begin{cases} \log \frac{\sin \pi x}{\pi x}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

ist eine Stammfunktion von $\pi \cot(\pi x) - 1/x$ auf $(-a, a) \setminus \{0\}$ mit $F(0) = 0$.

$$\begin{aligned} G(X) = \int_0^x \left(\sum_{k \geqslant 1} \frac{2x}{t^2 - k^2} \right) dt &= \sum_{k \geqslant 1} \int_0^x \frac{2x}{t^2 - k^2} dt \\ &= \sum_{k \geqslant 1} \log(k^2 - t^2) \Bigg|_0^x \\ &= \sum_{k \geqslant 1} \big(\log(k^2 - x^2) - \log k^2 \big) \\ &= \sum_{k \geqslant 1} \log \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) \\ &= \log \prod_{k \geqslant 1} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) \end{aligned}$$

F und G sind 2 Stammfunktionen, $F(0) = G(0) \Rightarrow G = F$ auf $(-a, a)$ mit a beliebig.

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{k \geqslant 1} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) \qquad |x| < 1$$

Gültig auch für $-1, 1$, da dafür beide Seiten verschwinden. Noch zu zeigen:

$$\underbrace{\sin(\pi x)}_{\text{hat Pediode 2}} = \underbrace{\pi x \prod_{k \geqslant 1} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right)}_{\text{z.z.: hat Periode 2}}$$

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto \pi x \prod_{k \geqslant 1} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) \qquad \text{2-periodisch?}$$

Dann würde folgen: Gleichheit stimmt überall, denn wenn f, g T-periodisch, dann

$$f|_{[-T/2,T/2]} = g|_{[-T/2,T/2]} \qquad \Rightarrow \qquad f = g \text{ auf } \mathbb{R}.$$

Wir zeigen nun, dass $\pi x \prod_{k \geqslant 1} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right)$ 2-periodisch ist:

$$\pi x \prod_{k \geqslant 1} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right) =: \pi x \lim_{n \to \infty} p_n(x)$$

Untersuche nun:

$$\begin{aligned}
\pi x p_n(x) &= \pi x \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) \\
&= \pi x \prod_{k=1}^{n} \frac{(k-x)(k+x)}{k^2} \\
&= \frac{\pi(n-x)(n-1-x)\cdots(1-x)x(1+x)\cdots(n+x)}{(n!)^2}
\end{aligned}$$

$$\pi(x+2)\lim_{n\to\infty} p_n(x+2) = ? \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(x+2)p_n(x+2)}{xp_n(x)} = 1$$

$\square$Bemerkung: Setze $x = 1/2$ in

$$\sin(\pi x) = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

Es folgt das Wallissche Produkt $1 = \frac{\pi}{2} \prod \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$.

3.6.11 Besselsche Approximation der Regelfunktionen

$$f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}) \qquad \min_{T \in \mathcal{TP}_n} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - T(t)|^2 dt = ?$$

mit $\mathcal{TP}_n := \{T \in \mathcal{TP} : \text{gr } T \leqslant n\}$. Das Minimum ist für $T = S_n f$ erreicht!

Skalarprodukt auf $\mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$

$$f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}), \langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

$(\langle z, w\rangle = \sum z_j \overline{w_j})$

Eigenschaften:

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ $\mathbb{C}$-linear in der 1. Variablen
   $\langle \lambda f, g\rangle = \lambda \langle f, g\rangle$

2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ konjugiert linear in der 2. Variablen
   $\langle f, \lambda g\rangle = \overline{\lambda}\langle f, g\rangle$

3. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitesch, d.h.
   $\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}$

4. positiv-definit, d.h. $\langle f, f\rangle \geqslant 0 \quad \forall f$
   $\langle f, f\rangle = 0 \iff f = 0$ fast überall (in allen Stetigkeits-Stellen)

$$\langle f, e^{ikx}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{e^{ikt}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \hat{f}_k$$

$f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ heißen *orthogonal* zueinander, wenn $\langle f, g\rangle = 0$

Beispiel:

$$\langle e^{ikx}, e^{ilx} \rangle = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & l \neq k \\ 1 & l = k \end{array} \right\} = \delta_{lk}$$

Durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ erhalten wir die Norm

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \langle f, f \rangle^{1/2}$$

Dies ist die L^2-Norm von f.

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int |f|^2 dt \right)^{1/2}$$

(Im folgenden auch einfach nur $\|f\|$.)

Eigenschaften:

1. $\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}, f \in \mathcal{R}_{2\pi}$
2. $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$ (Dreiecksungl.)
3. $\|f\| \geqslant 0 \qquad \forall f \in \mathcal{R}_{2\pi}$. Wenn f nicht überall 0, folgt $\|f\| > 0$, sonst würde gelten:
4. $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$
5. $|\langle f, g \rangle| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|$ (Cauchy-Schwarzsche Ungl.)

Beweis von 5.: Sei $g \neq 0$ (da klar für $g = 0$).

$$\begin{aligned} \langle f + \lambda g, f + \lambda g \rangle &= \langle f, f \rangle + \langle f, \lambda g \rangle + \langle \lambda g, f \rangle + \langle \lambda g, \lambda g \rangle \\ &= \|f\|^2 + \overline{\lambda} \langle f, g \rangle + \lambda \langle g, f \rangle + \lambda \overline{\lambda} \|g\|^2 \end{aligned}$$

und mit $\lambda = -\langle f, g \rangle / \|g\|^2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} &= \|f\|^2 - \frac{\overline{\langle f, g \rangle}}{\|g\|^2} \langle f, g \rangle - \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\|g\|^4} \|g\|^2 \\ &= \|f\|^2 - \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\|g\|^2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

Beweis von 2.:

$$\|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \underbrace{\langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle}_{=2\,\mathrm{Re}\langle f, g \rangle} + \langle g, g \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \|f\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle f, g \rangle + \|g\|^2 \\ &\leqslant \|f\|^2 + 2|\langle f, g \rangle| + \|g\|^2 && (\text{da } \mathrm{Re}\, z \leqslant |z| \ \forall z \in \mathbb{C}) \\ &\overset{5.}{\leqslant} \|f\|^2 + 2\|f\| \cdot \|g\| + \|g\|^2 = \big(\|f\| + \|g\|\big)^2 \end{aligned}$$

Beispiel: Sei $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}\|S_n f\|^2 &= \left\langle \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}_j e^{ijx}, \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}_j e^{ikx} \right\rangle \\ &= \sum_{k,l=-n}^{n} \hat{f}_j \overline{\hat{f}_k} \underbrace{\langle e^{ijx}, e^{ikx} \rangle}_{\delta_{jk}} = \sum_{j=-n}^{n} \hat{f}_j \overline{\hat{f}_j} = \sum_{j=-n}^{n} |\hat{f}_j|^2\end{aligned}$$

3.6.12 Satz

Es sei $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\|f - S_n f\| = \min_{T \in \mathcal{TP}_n} \|f - T\|$$

$$\text{(eigentlich } \|f - S_n f\| < \|f - T\| \quad \forall T \in \mathcal{TP}_n, T \neq S_n f)$$

$$\|f - S_n f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}_k|^2$$

Folgerung (Besselsche Ungleichung):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \leqslant \|f\|^2$$

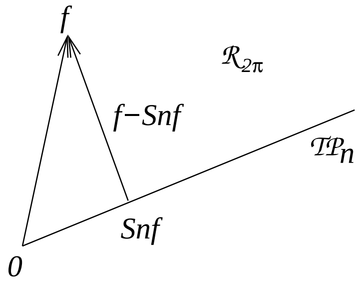
Beweis:

$$\text{Sei } T = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \in \mathcal{TP}_n.$$

$$\begin{aligned}\|f - T\|^2 &= \langle f - T, f - T \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \left\langle f, \sum_k c_k e^{ikx} \right\rangle - \left\langle \sum_k c_k e^{ikx}, f \right\rangle + \left\langle \sum_k c_k e^{ikx}, \sum_k c_k e^{ikx} \right\rangle \\ &= \|f\|^2 - \sum_k \overline{c_k} \langle f, e^{ikx} \rangle - \sum_k c_k \underbrace{\langle e^{ikx}, f \rangle}_{\overline{\langle f, e^{ikx} \rangle}} + \sum_k c_k \overline{c_k} \\ &= \|f\|^2 + \sum_k \overline{c_k} \hat{f}_k - \sum_k c_k \overline{\hat{f}_k} + \sum_k c_k \overline{c_k} \pm \sum_k \hat{f}_k \overline{\hat{f}_k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \|f\|^2 + \underbrace{\sum_k |\hat{f}_k - c_k|^2}_{\geqslant 0} - \underbrace{\sum_k |\hat{f}_k|^2}_{\|S_n f\|^2} \\ &\geqslant \|f\|^2 - \sum_k |\hat{f}_k|^2 = \|f - S_n f\|^2\end{aligned}$$

Das Minimum ist für $\sum |\hat{f}_k - c_k|^2 = 0$ erreicht, d.h. für $c_k = \hat{f}_k \iff T = S_n f$. (Da $T \neq S_n f \;\Rightarrow\; \sum |\hat{f}_k - c_k| > 0$).



$S_n f$ heißt die orthogonale Projektion von f auf $\mathcal{TP}_n$. $\quad S_n f \perp f - S_n f$

3.6.13 Konvergenz in L^2-Norm (im quadr. Mittel)

Seien $f, f_n \in \mathcal{R}[a,b]$. Wir sagen, dass $f_n \to f$ in L^2-Norm, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f - f_n|^2 dt = 0$$

Wenn $[a,b] = [-\pi,\pi]$ besagt die Def., dass $\|f - f_n\| \to 0$.

Bemerkungen:

a) Wenn $f_n \to f$ glm. auf $[-\pi,\pi] \Rightarrow \|f - f_n\|_2 \to 0$.

Abschätzung: $\|f - f_n\|_2^2 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f - f_n|^2 dt \leqslant \dfrac{1}{2\pi} \|f - f_n\|_\infty^2 \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1dt$

$\Rightarrow \ \|f - f_n\|_2 \leqslant \|f - f_n\|_\infty \iff f_n \overset{\text{glm.}}{\to} f$

b) Umkehrung gilt nicht! Es gibt $f_n \overset{n\to\infty}{\to} 0$ in L^2-Norm, aber nicht einmal *punktweise* gegen 0 ($f_n(x) \not\to 0 \ \forall x$)

VL: Do, 2003-07-03

Konvergenz in L^2-Norm

$$f, g \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R}), \ \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt$$

$$\|f\| := \|f\|_2 := \langle f, f\rangle^{\frac{1}{2}}$$

- $\|f - S_n f\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}_k|^2$
- $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 \leqslant \|f\|^2$ (Bessel-Ungleichung)

3.6.14 Satz

$f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$. Dann gelten:

1) $\|f - S_n f\| \to 0, \ n \to \infty$

2)

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_k|^2 = \|f\|^2$$

(Parsevalsche Gleichung)

Beweis: Zu zeigen:

i) (1) gilt für stetiges f.

ii) Jedes f in $\mathcal{R}_{2\pi}$ kann in der L^2-Norm durch stetige Funktionen approximiert werden.

iii) (1) gilt für beliebiges $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Also zum Beweis:

i) Satz 3.6.8 (Fejer) $\sigma_n f \overset{glm.}{\to} f, n \to \infty$ für f stetig.
Sei $\varepsilon > 0: \quad \Rightarrow \exists n_\varepsilon \ \forall n \geqslant n_\varepsilon: \ |f(x) - \sigma_n f(x)| < \varepsilon, \ x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \|f - \sigma_n f\| < \underbrace{\sup |f - \sigma_n f|}_{\|f - \sigma_n f\|_\infty} < \varepsilon$$

Aus der Minimaleigenschaft der Fourier-Polynome folgt:

$$\Rightarrow \|f - S_n f\| \leqslant \|f - \sigma_n f\| < \varepsilon$$

das heißt

$$\lim_{n \to \infty} \|f - S_n f\| = 0$$

□

ii) Der Beweis des folgenden Lemmas kommt später.

Lemma: $f \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $f_\varepsilon \in \mathcal{R}_{2\pi}(\mathbb{R})$ *stetig*, so dass

$$\|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

iii) Sei f beliebig, $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei f_ε gewählt wie im Lemma ii.

$$\|f - S_n f\| \leqslant \underbrace{\|f - f_\varepsilon\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|f_\varepsilon - S_n f_\varepsilon\|}_{<\varepsilon \text{ für } n \geqslant n_\varepsilon \text{ aus } 1} + \|S_n f_\varepsilon - S_n f\|$$

$$\|S_n f - S_n f_\varepsilon\| = \|S_n(f - f_\varepsilon)\| \leqslant \|f - f_\varepsilon\| < \varepsilon$$

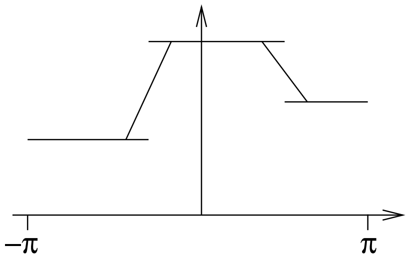
Da im allgemeinen gilt:

$$\|S_n g\|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\hat{g}_k|^2 \leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{g}_k|^2 \leqslant \|g\|^2 \quad \text{(Bessel)}$$

Beweis des Lemmas ii

a) Sei f eine Treppenfunktion.
Sei $-\pi = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \pi$ eine Zerlegung von $(-\pi, \pi)$.

$$f|_{(t_{k-1}, t_k)} = c_k, \quad k = 1, \ldots m$$



Sei $\begin{cases} c_0 = c_m \\ c_{m+1} = c_1 \end{cases}$, $l_0, \dots l_m$ lineare Funktionen, mit $\begin{cases} l_k(t_k - \delta) = c_k \\ l_k(t_k + \delta) = c_{k+1} \end{cases}$

Sei $f_\delta : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ folgende Funktion:

$$f_\delta(x) = \begin{cases} l_k(x), & x \in [t_k - \delta, t_k + \delta] \\ f(x), & x \in [t_{k-1} + \delta, t_k - \delta] \end{cases}$$

$$|f - f_\delta| = \begin{cases} 0, & x \in [t_{k-1} + \delta, t_k - \delta] \\ \leqslant |c_{k+1} - c_k|, & x \in [t_k - \delta, t_k + \delta] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \|f - f_\delta\|^2 &\leqslant \sum_{k=0}^{m} \int_{t_k - \delta}^{t_k + \delta} |f - f_\delta|^2 dt \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{m} \sup_{x \in [t_k - \delta, t_k + \delta]} |f - f_\delta|^2 2\delta \\ &= 2\delta \sum_{k=0}^{m} |c_{k+1} - c_k|^2 \end{aligned}$$

Da δ beliebig gewählt wurde, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ mit

$$\|f - f_\delta\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad f_\varepsilon := f_{\delta(\varepsilon)}$$

b) Sei $f \in \mathcal{R}_{2\pi}$ beliebig. Da f eine Regelfunktion ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion $g \in \mathcal{R}_{2\pi}$ mit

$$\|f - g\| \leqslant \|f - g\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nach a) existiert ein $g_\varepsilon \in \mathcal{R}_{2\pi}$ stetig mit

$$\|g - g_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \|f - g_\varepsilon\| \leqslant \|f - g\| + \|g - g_\varepsilon\| < \varepsilon$$

Folgerung: $\hat{f}_\nu = 0, \ \forall \nu \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow f = 0$ fast überall

Beweis:

$$\hat{f}_\nu = 0 \overset{Parseval}{\Longrightarrow} \|f\|^2 = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ f. ü.}$$

3.6.15 Eulersche Summenformel

Ziel: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\underbrace{f(1) + \ldots + f(n)}_{\int_1^n f(x)dx + \text{ explizites Restglied}} \backsim \int_1^n f(x)dx$$

Folgerung: Stirlingsche Formel

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, n \to \infty$$

Vorbereitung: Bernoulli-Polynome

- $B_0(x) = 1,\ B_1(x) = x - \frac{1}{2},\ B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},\ B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$
- $B_k(0) = B_k$ Bernoullische Zahlen

Eigenschaften:

B1) $B_k'(x) = kB_{k-1}(x),\ k \geqslant 1$

B2) $\int_0^1 B_k(t)dt = \frac{B_{k+1}(1)-B_{k+1}(0)}{k+1} = 0$

B3) $B_0(x) = 1$

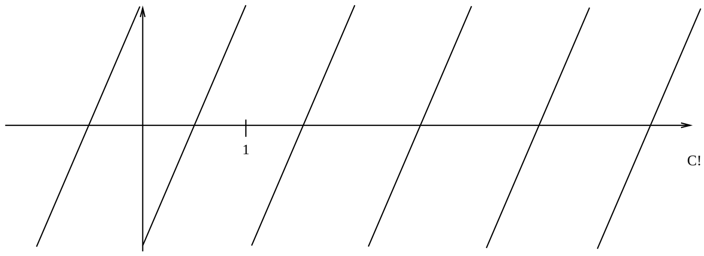
$$\Rightarrow \frac{1}{k!}B_k'(x) = \frac{1}{(k-1)!}B_{k-1}(x)$$

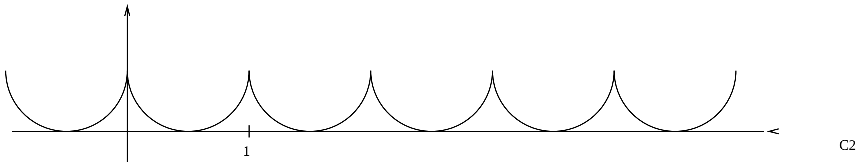
$$\int_0^x \frac{1}{k!}B_k(t)dt = \frac{1}{(k+1)!}(B_{k+1}(x) - B_{k+1})$$

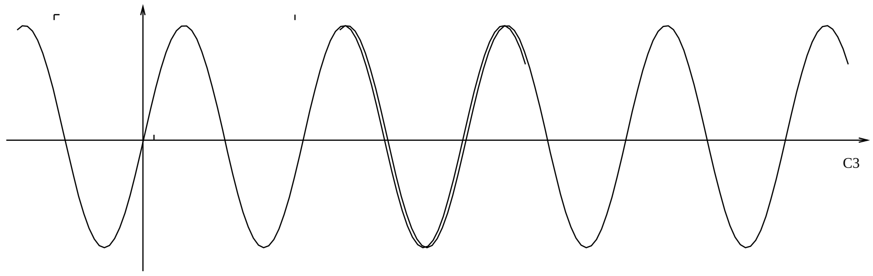
Betrachten wir die Bernoulli-Polynome auf [0,1) und setzen sie periodisch mit Periode 1 fest.

$$k \geqslant 1\ C_k \in \mathcal{R}_1(\mathbb{R})$$

$$C_k(x) := \frac{1}{k!}B_k(x - [x]),\ x \in \mathbb{R}$$







(C1) C_k ist eine Stammfunktion von $C_{k-1},\ k \geqslant 2$

(C2) $C_k(1) = C_k(0) = \frac{1}{k!}B_k(0) = \frac{1}{k!}B_k$

(C3) $C_k(n) = C_k(0) = \frac{1}{k!}B_k$

(C4) $C_k(n) = 0,\ \forall n,$ falls $k \geqslant 3$ ungerade

3.6.16 Satz (Eulersche Summenformel)

$f \in \mathcal{C}^{2p+1}([1,n]),\ p \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x)|_1^n + \int_1^n C_{2p+1}(x) f^{(2p+1)}(x)dx$$

wobei $\sum_{k=1}^{0} = 0$

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x)|_1^n = \begin{cases} \frac{B_2}{2!}[f'(n) - f'(1)] + \frac{B_4}{4!}[f^{(3)}(n) - f^{(3)}(1)] + \dots, & p > 0 \\ 0, & p = 0 \end{cases}$$

Beweis: Induktion $p = 0$ $\boxed{C_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2} = x - k - \frac{1}{2},\ x \in [k, k+1)}$

$$\int_k^{k+1} f(x)dx = \int_k^{k+1} f(x)(x - k - \frac{1}{2})'dx \quad \text{partielle Integration ergibt:}$$

$$= f(x)(x-k-\frac{1}{2})|_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f'(x)(\underbrace{x-k-\frac{1}{2}}_{C_1(x)})dx$$

$$= \underbrace{f(k+1)(\underbrace{k+1-k-\frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}}) - f(k)(\underbrace{k-k-\frac{1}{2}}_{=-\frac{1}{2}})}_{=\frac{1}{2}(f(k+1)+f(k))} - \int_k^{k+1} f'(x)C_1(x)dx$$

Man summiert über $k = 1, \ldots, n-1$

$$\int_1^n f(x)dx = \left(\frac{1}{2}f(1) + \frac{1}{2}f(2)\right) + \left(\frac{1}{2}f(2) + \frac{1}{2}f(3)\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{2}f(n-1) + \frac{1}{2}f(n)\right) - \int_1^n f'(x)C_1(x)dx$$

$$= \frac{1}{2}f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_1^n f'(x)C_1(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_1^n f(x)dx + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \int_1^n f'(x)C_1(x) = f(1) + \ldots + f(n),$$

falls $p = 0$.

$p \Rightarrow p+1$

$$\int_1^n C_{2p+1}(x)f^{(2p+1)}(x)dx$$

$$= \int_1^n C'_{2p+2}(x)f^{(2p+1)}(x)dx$$

$$= C_{2p+2}(x)f^{(2p+1)}(x)|_1^n - \int_1^n C_{2p+2}(x)f^{(2p+2)}(x)dx$$

$$= \underbrace{C_{2p+2}(n)}_{=\frac{1}{(2p+2)!}B_{2p+2}} f^{(2p+1)}(n) - \underbrace{C_{2p+2}(1)}_{=\frac{1}{(2p+2)!}B_{2p+2}} f^{(2p+1)}(1) - \int_1^n C_{2p+2}(x)f^{(2p+2)}(x)dx$$

$$= \frac{1}{(2p+2)!}B_{2p+2} \cdot (f^{(2p+1)}|_1^n) - C_{2p+3}(x)f^{(2p+2)}(x)|_1^n + \int_1^n C_{2p+3}(x)f^{(2p+3)}(x)dx$$

$$C_{2p+3}(x)f^{2p+2}(x)|_1^n = \underbrace{C_{2p+3}(n)}_{=\frac{1}{(2p+3)!}B_{2p+3}=0} f^{(2p+2)}(n) - \underbrace{C_{2p+3}(1)}_{=\frac{1}{(2p+3)!}B_{2p+3}=0} f^{(2p+2)}(1) = 0$$

$$\Rightarrow \int_1^n C_{2p+1}(x)f^{(2p+1)}(x)dx = \frac{1}{(2p+2)!}B_{2p+2}(f^{(2p+1)}|_1^n) + \int_1^n C_{2p+3}(x)f^{(2p+3)}(x)dx$$

Durch Ersetzen der linken Seite mit der Induktionsvorausetzung erhält man die Behauptung. □

3.6.17 Gammafunktion

Gesucht $\Gamma : \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,\dots\} \to \mathbb{R}, \Gamma(x) = (x-1)!,\ x \in \mathbb{N}$ (Γ interpoliert $n!$)
Sei $n \in \mathbb{N}$; wir schreiben $n!$ um, so dass die Schreibweise die Eigenschaft $n \in \mathbb{N}$ nicht nutzt.

$$
\begin{aligned}
(n-1)! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \\
&= \frac{(1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)n(n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k)}{n(n+1)\ldots(n+k)} \\
&= \frac{(n+k)!}{n(n+1)\ldots(n+k)} \\
&= \frac{k!(k+1) \cdot \ldots \cdot (k+n)}{n(n+1)\ldots(n+k)} \cdot \frac{k^n}{k^n} \\
&= \frac{k!k^n}{n(n+1)\ldots(n+k)} \cdot \frac{k+1}{k} \cdot \ldots \cdot \frac{k+n}{k} \\
&= \frac{k!k^n}{n(n+1)\ldots(n+k)} \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{n}{k}\right) \\
\Rightarrow (n-1)! &= \lim_{k\to\infty} (n-1)! \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{k!k^n}{n(n+1)\ldots(n+k)} \underbrace{\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{n}{k}\right)}_{=1} \\
\Rightarrow (n-1)! &= \lim_{k\to\infty} \frac{k!k^n}{n(n+1)\ldots(n+k)}
\end{aligned}
$$

Mit $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,\dots\}$ folgt:

$$\boxed{\Gamma(x) := \lim_{k\to\infty} \tfrac{k!k^x}{x(x+1)\ldots(x+k)}}$$

VL: Mo, 2003-07-07

3.6.18 Satz

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt;\ \operatorname{Re} s > 0$$

erfüllt

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Insbesondere ist

$$\Gamma(n+1) = n! \text{ für } n \in \mathbb{Z}_+.$$

Es gilt außerdem $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Zurück zu $\mathbb{R}$ G. Cantor: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

3.6.19 Definition

Eine Zahl $y \in \mathbb{R}$ heißt *algebraisch*, wenn es ein Polynom $p \in \mathbb{Z}[x]$ gibt mit $p(y) = 0 = \sum_{j=0}^{\operatorname{gr} p} a_j y^j,\ a_j \in \mathbb{Z}$.

3.6.20 Definition

Sei $\mathfrak{A} \subset \mathbb{R}$ die Menge der algebraischen Zahlen, $\mathcal{T} := \mathbb{R} \setminus \mathfrak{A}$ heißt die Menge der *transzendenten Zahlen.*

Beispiele $p \in \mathbb{N}$, $y = \sqrt{p} \Rightarrow y^2 - p = 0 \Rightarrow \sqrt{p}$ ist algebraisch.

3.6.21 Satz (Cantor)

$\mathfrak{A}$ ist abzählbar.

Beweis: Es sei $p \in \mathbb{Z}[x]$, dann definieren wir die *Höhe* von p durch $h(p) = \operatorname{gr} p + \sum_{j=0}^{\operatorname{gr} p} |a_j| \in \mathbb{N}$ und setzen

$$\mathfrak{A}_n := \{y \in \mathfrak{A}, \text{ es gibt } p \in \mathbb{Z}[x] \text{ mit } p(y) = 0 \text{ und } h(p) \leqslant n\} .$$

Dann ist $\#\mathfrak{A}_n < \aleph_0$ und $\mathfrak{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_n \Rightarrow \mathfrak{A}$ ist abzählbar. □

3.6.22 Folgerung

$\mathcal{T}$ ist überabzählbar, insbesondere $\neq \emptyset$.

3.6.23 Satz (Ch. Hermite 1882, Beweis von David Hilbert 1897)

e ist transzendent.

Beweis Annahme: e ist algebraisch, d.h. es gibt eine nichttriviale Gleichung der Form

$$(\diamondsuit) \qquad 0 = a_0 + a_1 e + \cdots + a_n e^n =: \alpha$$

mit $a_i \in \mathbb{Z}$, oBdA $a_0 \in \mathbb{N}$.
Widerspruchsidee: Spalte auf $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ mit $\alpha_1 \in \mathbb{N}$ und $|\alpha_2| < 1 \Rightarrow \alpha = 0$ ist unmöglich.
Betrachte für $l \in \mathbb{N}$

$$I(l) := \int_0^\infty x^l \Big((x-1)(x-2)\cdots(x-n)\Big)^{l+1} e^{-x} dx$$

Diskussion des Integrals:

$$\begin{aligned} I(l) &= \int_0^\infty x^l \Big((-1)^n n! + \beta_1 x + \cdots + x^n\Big)^{l+1} e^{-x} dx \\ &= \int_0^\infty x^l \Big((-1)^{n(l+1)} (n!)^{l+1} + \tilde{\beta}_1 x + \cdots + x^{n(l+1)}\Big) e^{-x} dx \\ &= \pm (n!)^{l+1} l! + \gamma (l+1)! \end{aligned}$$

mit $\gamma \in \mathbb{Z}$ oder $I(l) \equiv \pm(n!)^{l+1}l! \mod (l+1)$.
Multipliziere ($\diamondsuit$) mit $I(l)$ und spalte auf

$$\begin{aligned}0 =&(a_0 + a_1 e + \cdots + a_n e^n) I(l)\\ =&\sum_{i=0}^{n} a_i e^i \int_0^i x^l \Big((x-1)(x-2)\cdots(x-n)\Big)^{l+1} e^{-x} dx\\ &+\sum_{i=0}^{n} a_i e^i \int_i^\infty x^l \Big((x-1)(x-2)\cdots(x-n)\Big)^{l+1} e^{-x} dx\\ =:&\alpha_2 + \alpha_1\end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass $\frac{\alpha_2}{l!} < 1$ und $\frac{\alpha_1}{l!} \in \mathbb{N}$ für ein großes l.
$f_n(x) := x(x-1)\cdots(x-n)$, $g_n(x) := (x-1)\cdots(x-n)e^{-x}$,
$\mu_n := \sup_{x\in[0,n]} |f_n(x)|$, $\lambda_n := \sup_{x\in[0,n]} |g_n(x)|$

$$\begin{aligned}\Rightarrow&\left|\int_0^i x^l \Big((x-1)(x-2)\cdots(x-n)\Big)^{l+1} e^{-x} dx\right|\\ &\leqslant \int_0^i |f_n(x)|^l |g_n(x)| dx \leqslant i\mu_n^l \lambda_n\\ \Rightarrow&|\alpha_2| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i| e^i i \mu_n^l \lambda_n \leqslant \delta_n \mu_n^l \text{ für ein } \delta_n \in \mathbb{N}\\ \Rightarrow&\frac{|\alpha_2|}{l!} \leqslant \delta_n \frac{\mu_n^l}{l!} \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

wähle l_0 so, dass $\frac{|\alpha_2|}{l!} < 1$ für $l \geqslant l_0$.
Weiterhin wird

$$\alpha_1 = \sum_{j=0}^{n} a_j e^j \int_j^\infty x^l \Big((x-1)\cdots(x-n)\Big)^{l+1} e^{-x} dx$$

und wir hatten gesehen, dass

$$a_0 I(l) \equiv \pm a_0 (n!)^{l+1} l! \mod (l+1).$$

Betrachte für $j \geqslant 1$

$$\begin{aligned}&\int_j^\infty x^l \Big((x-1)(x-2)\cdots(x-n)\Big)^{l+1} e^{-(x-j)} dx \qquad (u := x-j)\\ =&\int_0^\infty (u+j)^l \Big((u+j-1)\cdots u \cdots (u+j-n)\Big)^{l+1} e^{-u} du\\ =&\int_0^\infty u^{l+1} q_{l_n}(u) e^{-u} du \equiv 0 \mod (l+1)\end{aligned}$$

d.h.: $\frac{\alpha_1}{l!} \equiv \pm a_0 (n!)^{l+1} \mod (l+1)$
Wir wollen zeigen, dass bei geeigneter Wahl von l gilt:
$a_0(n!)^{l+1} \not\equiv 0 \mod (l+1) \Rightarrow \frac{\alpha_1}{l!} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
Wähle also l hinreichend groß und so, dass $a_0 n! \big| l$. Wäre dann richtig, dass $l+1 \big| a_0(n!)^{l+1}$ dann auch $l+1 \big| (a_0 n!)^{l+1} \big| l^{l+1} \Rightarrow l+1 \big| l$. Wid. $\square$

Auch π ist transzendent!
π erregt die Gemüter:

Bibel:	$\pi = 3$
Archmedes:	$\pi \sim \frac{22}{7}$
Platon:	Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal möglich??
E. Galois:	Quadratur des Kreises $\Rightarrow$ π ist algebraisch
Ludolf von Keulen:	6 Dezimalstellen
heute:	2 Milliarden Dezimalstellen
ENIAC:	70 Stunden für 2035 Dezimalstellen
	es gibt mnemonische Gedichte über π

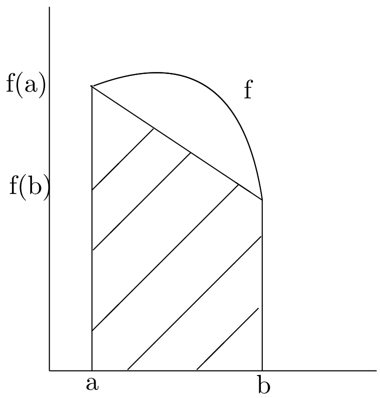
3.7 Approximative Integration

Wir brauchen praktisch nützliche Verfahren zur Berechnung von Integralen.

Einfache Ideen

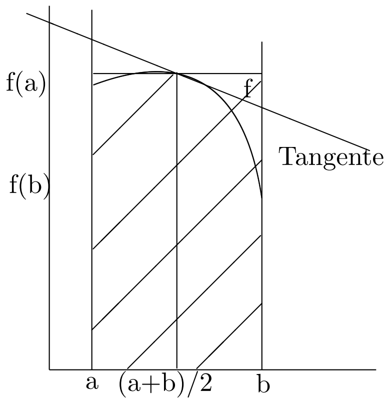
Sehnentrapezformel: (hat 2 Stützstellen)

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a)f(b) + \frac{(b-a)}{2}\Big(f(a) - f(b)\Big) = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$



Tangententrapezformel: (hat 1 Stützstelle)

$$\int_a^b f(x)dx \cong (b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$$



Problem Diese Formeln sind nicht einmal für einfache Polynome exakt!

Bessere Herangehensweise: Höhere Zahl an Stützstellen $(x_n) \subset [a,b]$ und optimierte Gewichte, d.h. $\alpha_n \subset \mathbb{R}_+$ unabhängig von f.
Ansatz: $\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$
Ziel: Polynome 3-ten Grades. 3 Stützstellen a, b, $\frac{a+b}{2}$ und 3 Gewichte $0 \leqslant \alpha_i$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = b - a$.
Es ergibt sich $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{b-a}{6}$ und $\alpha_2 = \frac{4}{6}(b-a)$. Das ergibt die *Simpson-Formel* oder *Keplersche Fassregel*:

$$\int_a^b f(x)dx \cong Si(f) := \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big)$$

3.7.1 Satz

Es sei $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$. Dann gibt es in $\xi \in \big(0, \frac{a+b}{2}\big)$ so, dass

$$\int_a^b f(x)dx - Si(f) = -\frac{(b-a)^4}{1152}\Big(f^{(3)}\Big(\frac{a+b}{2} + \xi\Big) - \Big(f^{(3)}\Big(\frac{a+b}{2} - \xi\Big)\Big)$$

Insbesondere ist $\int_a^b f(x)dx - Si(f) = 0$, wenn $f \in \mathbb{R}[x]$ mit gr $(f) \leqslant 3$.

Beweis: O.B.d.A. $[a,b] = [-c,c]$, sonst transformiert man $\frac{a+b}{2}$ auf 0 durch eine lineare Substitution. Wir führen ein
$I(x) := \int_{-x}^x f(x)dx$, $Si(f)(x) := \frac{x}{3}\Big(f(-x) + 4f(0) + f(x)\Big)$.
Dann betrachten wir $I(c) - Si(f)(c)$; dazu benutzen wir die Taylorformel mit Integralrestglied der Ordnung 3.

$$\begin{aligned} I'(x) &= f(x) + f(-x) \\ I''(x) &= f'(x) - f'(-x) \\ I'''(x) &= f''(x) + f''(-x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Si(f)'(x) &= \frac{1}{3}\Big(f(-x)+4f(0)+f(x)\Big)+\frac{x}{3}\Big(f'(x)-f'(-x)\Big)\\
Si(f)''(x) &= \frac{2}{3}\Big(f'(x)-f'(-x)\Big)+\frac{x}{3}\Big(f''(x)+f''(-x)\Big)\\
Si(f)'''(x) &= \Big(f''(x)+f''(-x)\Big)+\frac{x}{3}\Big(f'''(x)-f'''(-x)\Big)
\end{aligned}$$

$I(0)=0$, $I'(0)=2f(0)$, $I''(0)=0$, $Si(f)(0)=0$, $Si(f)'(0)=2f(0)$, $Si(f)''(0)=0$. Wende Taylor mit $n=3$ an $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
&I(x)-Si(f)(x)\\
=&\sum_{j=0}^{2}\frac{x^j}{j!}\Big(I^{(j)}(0)-Si(f)^{(j)}(0)\Big)+\frac{x^3}{2!}\int_0^1(1-t)^2\Big(I^{(3)}(tx)-Si(f)^{(3)}(tx)\Big)dt\\
=&\frac{x^3}{2\cdot 3}\int_0^1(1-t)^2(-tx)\Big(f^{(3)}(tx)-f^{(3)}(-tx)\Big)dt\\
=&\frac{-x^4}{6}\int_0^1 t(1-t)^2\Big(f^{(3)}(tx)-f^{(3)}(-tx)\Big)dt\\
=&\frac{-x^4}{6}\Big(f^{(3)}(\theta x)-f^{(3)}(-\theta x)\Big)\int_0^1 t(1-t)^2dt
\end{aligned}$$

etc. $\square$ *VL: Do, 2003-07-10*

$\int_a^b f(x)dx \sim Si(f)=\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$ exakt für Polynome vom Grad $\leqslant 3$.
Verbesserungen?

3.7.2 Definition

$\mathfrak{z} := \{x_i\}_{i=0}^n$, $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ heißt eine *Zerlegung* des Intervalls $[a,b]$. $\delta(\mathfrak{z}) := \max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})$ heißt die *Feinheit der Zerlegung* $\mathfrak{z}$. Die Zerlegung heißt *äquidistant*, falls $(x_i-x_{i-1})=(x_1-x_0)\forall 1\leqslant i\leqslant n$. Schließlich ist die Menge $Z_{[a,b]} := \{\mathfrak{z}, \mathfrak{z}$ Zerlegung von $[a,b]\}$ halbgeordnet durch Mengeninklusion, d.h. wir schreiben $\mathfrak{z}\leqslant\mathfrak{z}' \iff \mathfrak{z}\subset\mathfrak{z}'$; dann nennen wir $\mathfrak{z}'$ eine *Verfeinerung* von $\mathfrak{z}$.

Bemerkungen

1) $\mathfrak{z}$ ist äquidistant $\iff (b-a)=x_n-x_0=\sum_{i=1}^n(x_i-x_{i-1})=n\cdot(x_1-x_0)$
$\iff x_i=x_0+\sum_{j=1}^i(x_j-x_{j-1})=x_0+i\frac{b-a}{n}$.

2) Ist $\mathfrak{z},\mathfrak{z}'\in Z_{[a,b]}$, so auch $\mathfrak{z}\cup\mathfrak{z}' =: \mathfrak{z}''$ und es gilt $\mathfrak{z}\leqslant\mathfrak{z}''$, $\mathfrak{z}'\leqslant\mathfrak{z}''$. Also ist $Z_{[a,b]}$ ein gerichtetes System.

Anwendung iterierte Simpson-Regel
Wir wählen eine äquidistante Zerlegung mit $n+1$ Teilpunkten, $n\in\mathbb{N}$ und setzen

$$Si_n(f)[a,b] = \sum_{i=1}^{n} Si(f)[x_{i-1},x_i]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{6n}\left[f\left(a+\frac{i-1}{n}(b-a)\right)+4f\left(a+\frac{i-1+i}{2n}(b-a)\right)+f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right]$$
$$= \frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(a+\frac{i-1}{n}(b-a)\right)+4f\left(a+\frac{i-1+\frac{1}{2}}{n}(b-a)\right)+f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right]$$
$$= \frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(a+(2i-2)\frac{b-a}{2n}\right)+4f\left(a+(2i-1)\frac{b-a}{2n}\right)+f\left(a+2i\frac{b-a}{2n}\right)\right]$$
$$= \frac{b-a}{6n}\sum_{j=1}^{2n-1}\alpha_j f\left(a+j\frac{b-a}{2n}\right)+\frac{b-a}{6n}\left(f(a)+f(b)\right)$$

wobei $\alpha_j = \begin{cases} 2, & j \equiv 0 \pmod 2 \\ 4, & j \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$

Bilden wir $Si_2\left(\frac{1}{1+x^2}\right)[0{,}1]$, so erhalten wir eine Approximation für π mit einem Fehler $< 3 \cdot 10^{-5}$.

Andere Möglichkeit Wähle n äquidistante Stützstellen und berechne die Gewichte $\alpha_i > 0$ so, dass eine exakte Formel für Polynome vom Grad $\leqslant n$ entsteht (Formel vom Gauß-Typ).

Die Idee des Riemann-Integrals Gegeben: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und eine Zerlegung $\mathfrak{z}$ von $[a,b]$. Wir bilden

$$\overline{S}_{\mathfrak{z}}(f) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \cdot \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$
$$\underline{S}_{\mathfrak{z}}(f) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \cdot \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

3.7.3 Definition

Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt über $[a,b]$ *Riemann-integrierbar*, falls $\overline{S}_{\mathfrak{z}}(f)$ und $\underline{S}_{\mathfrak{z}}(f)$ über $Z_{[a,b]}$ den selben Grenzwert haben. Dieser Grenzwert heißt das *Riemann-Integral* von f. Schreibweise: $\int_a^b f(x)dx$.

Diskussion

1) Ist $\mathfrak{z} \leqslant \mathfrak{z}'$, so gilt $\overline{S}_{\mathfrak{z}}(f) \geqslant \overline{S}_{\mathfrak{z}'}(f) \geqslant \underline{S}_{\mathfrak{z}'}(f) \geqslant \underline{S}_{\mathfrak{z}}(f)$
   Also existiert $\inf_{\mathfrak{z}} \overline{S}_{\mathfrak{z}}(f) \geqslant \sup_{\mathfrak{z}} \underline{S}_{\mathfrak{z}}(f)$. Das gilt für alle beschränkten Funktionen!
   Aber $\inf_{\mathfrak{z}} \overline{S}_{\mathfrak{z}}(f) \neq \sup_{\mathfrak{z}} \underline{S}_{\mathfrak{z}}(f)$ im allgemeinen, z.B.
   $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ hat $\overline{S}_{\mathfrak{z}}(f)[0{,}1] = 1$ und $\underline{S}_{\mathfrak{z}}(f)[0{,}1] = 0$.
   Insbesondere ist $f = \chi_{[a,b]\cap\mathbb{Q}}$ nicht Riemann-integrierbar.

2) Wir betrachten also die Situation, dass

$$(*) \lim_{\mathfrak{z}\in\vec{Z}} \left(\overline{S}_{\mathfrak{z}}(f) - \underline{S}_{\mathfrak{z}}(f)\right) = 0$$

Das lässt sich einfacher formulieren mittels der Feinheit: $(*)$ ist äquivalent zu
$(**)$ Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so, dass $0 \leqslant \overline{S}_{\mathfrak{z}}(f) - \underline{S}_{\mathfrak{z}}(f) \leqslant \varepsilon$ für alle $\mathfrak{z} \in Z$ mit $\delta(\mathfrak{z}) \leqslant \delta$.

3.7.4 Satz

Das Riemann-Integral hat ebenfalls die Eigenschaften

(1) *Linearität*

$\int(\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$

(2) *Additivität*

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(3) *Monotonie*

$f \geqslant 0 \Rightarrow \int f \geqslant 0$

(4) *Fundamentale Ungleichung*

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|\,(b-a)$

3.7.5 Satz

Jedes $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ist über $[a,b]$ Riemann-integrierbar.

Beweis Es sei f gegeben und ein $\varepsilon > 0$. Für eine approximierende Treppenfunktion f_n gilt dann

$$0 \leqslant \overline{S}_{\mathfrak{z}}(f) - \underline{S}_{\mathfrak{z}}(f) \leqslant \underbrace{\overline{S}_{\mathfrak{z}}(f-f_n) - \underline{S}_{\mathfrak{z}}(f-f_n)}_{\leqslant 2\varepsilon \text{ wegen fund. Ungl., falls } \|f-f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon} + \overline{S}_{\mathfrak{z}}(f_n) - \underline{S}_{\mathfrak{z}}(f_n)$$

Es genügt also zu zeigen, dass jede Treppenfunktion Riemann-integrierbar ist. Sei $\mathfrak{z}$ gegeben mit $\delta(\mathfrak{z}) \leqslant \frac{1}{2}\min(x_i - x_{i-1})$ und $(y_j)_1^k$ die Sprungstellen von f

$$\begin{aligned}
\Rightarrow &\overline{S}_{\mathfrak{z}}(f) - \underline{S}_{\mathfrak{z}}(f)\\
&= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} - \inf_{[x_{i-1},x_i]}\Big)(f)\\
&= \sum_{y_j\in[x_{i-1},x_i)} (x_i - x_{i-1})\Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} - \inf_{[x_{i-1},x_i]}\Big)(f)\\
&\leqslant k \cdot \delta(\mathfrak{z}) \cdot 2\|f\|_\infty \overset{\delta(\mathfrak{z})\to 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

□

Frage Welche Funktionen $\notin \mathcal{R}[a,b]$ sind Riemann-integrierbar?

Beispiele

1) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in [-1,1]$
   $f \notin \mathcal{R}[a,b]$, weil $f_{\pm}(0)$ nicht existiert. Aber $f \in \mathcal{R}[-1,-\varepsilon] \cup [\varepsilon,1]$ $\forall \varepsilon > 0$, d.h.
   $0 \leqslant \overline{S}_{\mathfrak{z}}(f) - \underline{S}_{\mathfrak{z}}(f) = \overline{S}_{\mathfrak{z}}(f)[-1,-\varepsilon] \cup [\varepsilon,1] - \underline{S}_{\mathfrak{z}}(f)[-1,-\varepsilon] \cup [\varepsilon,1] + r$, mit $r \leqslant 2\varepsilon \|f\|_\infty$.

2) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x \in \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ (p,q) = 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
   Dies ist keine Regelfunktion, aber Riemann-integrierbar.

Kapitel 4

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^m$

4.1 Grundlagen

$\mathbb{R}^m = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{\text{m mal}} \ni (x_1, \ldots, x_m) = x$

$\mathbb{R}^m$ ist ein metrischer Raum mit der Metrik $d(x,y)^2 = \sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2$.
Weiter ist $\mathbb{R}^m$ ein m-dimensionaler VR über $\mathbb{R}$, d.h. mit x, y ist $\lambda x + \mu y \in \mathbb{R}^m$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Weiterhin gibt es Vektoren $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & \{f_i\}_{i=1}^m \text{ ist linear unabhängig} \\ (2) & \{f_i\}_{i=1}^m \text{ ist Erzeugendensystem} \end{array}\right\} \iff \{f_i\}_{i=1}^m \text{ ist Basis}$$

d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}^m$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $f_i^*(x)$ mit $x = \sum_{i=1}^m f_i^*(x) f_i$, wobei $\{f_i^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}\}_{i=1}^m$ Basis des Dualraums ist.

Standardbasis $\quad e_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, 0, \ldots, 0)$

Allgemein heißen die Zahlen $f_i^*(x)$ die (linearen) Koordinaten von x bezüglich der Basis $\{f_i\}$. Jeder Basiswechsel bringt einen zugehörigen Koordinatenwechsel.

Es gibt keine "kanonische Basis". *VL: Mo, 2003-07-14*

Multiplikation: Bilineare Abbildung: $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^m$?
nullteilerfrei: $\mu(x,y) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$
$\exists$ für $m = 1,2,4,8$, *aber sonst nie.* Schwieriges Problem

Metrik

$$d(x,y)^2 = \underbrace{|x-y|^2}_{\text{koordinatenfrei (geometrisch)}} = \underbrace{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}_{\text{koordinatenabh. (analytisch)}}$$

$= \langle x - y, x - y \rangle$ Skalarprodukt

$\Rightarrow \mathbb{R}^m$ ist ein vollständiger metrischer Raum und ein Hilbert-Raum (Norm (Banach)+Skalarprodukt)

Lineare Abbildungen spielen eine besondere Rolle
$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) = \text{Hom}\,\mathbb{R}^m$
$\iff A:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ und $A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathbb{R}^m$

$$x = \sum x_i f_i \Rightarrow Ax = \sum_i x_i A f_i = \sum_{i,j} x_i \alpha_{ji} f_j = \sum_j \left(\sum_i \alpha_{ji} x_i \right) f_j$$

mit $Af_i = \sum_j \alpha_{ji} f_j,\ A \simeq (\alpha_{ji})_{1 \leqslant j,i \leqslant m}$

Lineare Abbildungen sind automatisch stetig, denn bzgl. der Standardbasis gilt

$$|Ax|^2 = \sum_j \left(\sum_i \alpha_{ji} x_i \right)^2 \leqslant \sum_j \sum_i \alpha_{ji}^2 \sum_i x_i^2 = \sum_{i,j} \alpha_{ji}^2 |x|^2 =: C(A)|x|^2$$

4.1.1 Definition

Das Infimum der Zahlen $C > 0$ mit $|Ax| \leqslant C|x|,\ x \in \mathbb{R}^m\ A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ heißt die *Norm von* A, $|A|$.

Bemerkungen

1) Es gilt immer $|Ax| \leqslant |A||x|$
2) Es ist $|A| = \sup_{|x| \leqslant 1} |Ax| = \max_{|x| \leqslant 1} |Ax|$. I.a. ist $|A| < C(A)$.
3) Es gilt $|AB| \leqslant |A||B|$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m) = \text{Hom}(\mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{m^2}$, aber $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ ist eine $\mathbb{R}$-*Algebra* unter der Verknüpfung linearer Abbildungen $\sim$ Matrixmultiplikation.

$A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ ist invertierbar $\iff \det A \neq 0$

Ist $A \sim (\alpha_{ji}) \Rightarrow \det A = \sum_{\pi \in S_m} (-1)^{\text{sgn}\,\pi} \alpha_{1\pi(1)} \cdots \alpha_{m\pi(m)}$

Ein Basiswechsel transformiert $A_e \mapsto TA_eT^{-1},\ T$ Matrix des Basiswechsels $\Rightarrow$ Multiplikationssatz $\det(TA_eT^{-1}) = \det T \det A_e \det T^{-1} = \det A_e$, denn $1 = \det I_{\mathbb{R}^m} = \det TT^{-1} = \det T \det T^{-1}$

4.1.2 Definition

1) Zu $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ existiert ein eindeutig bestimmtes $A^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ mit $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle,\ x, y \in \mathbb{R}^m$; A^* heißt die zu A adjungierte Abbildung (Darstellungssatz)
2) A heißt *normal*, falls der Kommutator $[A, A^*] := AA^* - A^*A$ verschwindet.
3) A heißt selbstadjungiert (sa.), falls $A = A^*$.

4.1.3 Satz

Ist A selbstadjungiert, so gibt es eine orthonormale Basis $(f_i)_{i=1}^m,\ \langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$, von $\mathbb{R}^m$ mit $Af_i = \lambda_i f_i$ für gewisse $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Die f_i heißen Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_i. Das System $(f_i, \lambda_i)_{i=1}^m$ heißt die *Spektralzerlegung von* A.

Erinnerung: $\lambda_{\max} = \max \lambda_i$ ist gegeben durch $\max_{|x|=1} < Ax, x >$
Für A sa. ist $\det A = \prod_{i=1}^m \lambda_i$.
Interessant ist das Polynom

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_{\mathbb{R}^m}) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \lambda_j c_j(A),$$

das charakteristische Polynom. (trace=Spur)
Dabei gilt $c_0(A) = \det A,\ c_m(A) = 1, c_{m-1}(A) = \sum \alpha_{ii} = \operatorname{tr} A = \text{Spur von } A$

4.1.4 Definition

Die polynomialen Abbildungen $c_j : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ heißen die *Chern-Formen* von A. Sie erfüllen die Identität $c_j(A) = c_j(TAT^{-1})$ für jedes invertierbare $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$

Bemerkung Ist A sa., so ist $\operatorname{tr} A = \sum \lambda_i$.

4.1.5 Satz und Definition

Wir setzen $GL(m, \mathbb{R}) := \{T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m);\ \det T \neq 0\}$. Dann ist $GL(m, \mathbb{R})$ eine Gruppe und offen in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \simeq \mathbb{R}^{m^2}$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $\det : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ stetig ist: das folgt aus der expliziten Formel!

Bemerkung GL= General Linear (Group)

Isometrien sind Abbildungen $\Phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ mit $d(\Phi(x), \Phi(y)) = d(x, y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}^m$.

4.1.6 Satz

Die Isometrien von $\mathbb{R}^m$ sind genau die Abbildungen der Form $\Phi(x) = O(x) + \Phi(0)$ mit $O \in \operatorname{Iso}(\mathbb{R}^m) \cap \mathcal{L}(\mathbb{R})$ eine lineare Isometrie.

Beweis

“$\Leftarrow$” $d(O(x), O(y))^2 = |O(x) - O(y)|^2 = |O(x - y)|^2 = |x - y|^2$

“$\Rightarrow$” Φ Isometrie, setze $O(x) := \Phi(x) - \Phi(0)$

$$\Rightarrow |O(x) - O(y)|^2 = |\Phi(x) - \Phi(y)|^2 = |x - y|^2 \Rightarrow |O(x)| = |x|$$

$$\begin{aligned} \iff |O(x)|^2 + |O(y)|^2 - 2\langle O(x), O(y)\rangle &= |x|^2 + |y|^2 - 2\langle O(x), O(y)\rangle \\ &= |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle O(x), O(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

Bilde dann

$$\begin{aligned}
&|O(\lambda x+\mu y)-(\lambda O(x)+\mu O(y))|^2\\
&\quad=|O(\lambda x+\mu y)|^2+2\lambda\mu\langle O(x),O(y)\rangle-2\langle O(\lambda x+\mu y),\lambda O(x)+\mu O(y)\rangle\\
&\quad=|\lambda x+\mu y|^2+\lambda^2|x|^2+\mu^2|y|^2+2\lambda\mu\langle x,y\rangle-2\lambda\langle\lambda x+\mu y,x\rangle-2\mu\langle\lambda x+\mu y,y\rangle\\
&\quad=2\lambda^2|x|^2+2\mu^2|y|^2+4\lambda\mu\langle x,y\rangle-2\lambda^2|x|^2-2\mu^2|y|^2-4\lambda\mu\langle x,y\rangle=0 \qquad \square
\end{aligned}$$

(Lipschitz-)Stetigkeit ist klar für Abbildung $f:\ \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$.
Wie steht mit Differenzierbarkeit?

1. Fall $\mathbb{R}^m \underset{\text{offen}}{\supset} \mathcal{D}(f) \xrightarrow{f} \mathbb{R},\ x_0\in\mathcal{D}(f)$

$f(x_0+h)=f(x_{01}+h_1,x_{02}+h_2,\ldots,x_{0m}+h_m)$ (Standardbasis)

Der Ausdruck $\frac{1}{h}[f(x_0+h)-f(x_0)]$ ergibt keinen Sinn, weil wir keine nullteilerfreie Multiplikation haben!

Der Physiker beschränkt sich auf $\frac{f(x_0+he_i)-f(x_0)}{h}$ mit $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $e_i\in$ Standardbasis

4.1.7 Definition

f heißt in x_0 *partiell differenzierbar nach* x_i, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(x_0+he_i)-f(x_0)) =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)=f_{x_i}(x_0)$$

existiert.

Beispiele

1) $e^{-|x|^2},\ g(|x|^2)$ mit g diffb.

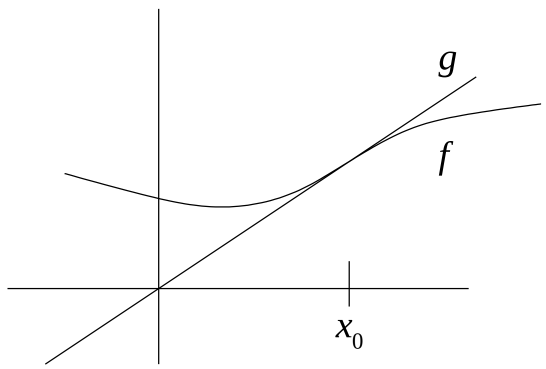
2) $f\in\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_m]$

sind in jedem Punkt nach jedem x_i part. diffb.

Der Mathematiker

Erinnerung: $m=n=1,\ x_0\in\mathbb{R}$, dann ist f differenzierbar in x_0 $\iff$

$$f(x_0+h)=\underbrace{f(x_0)+hf'(x_0)}_{g_{x_0}(h)\text{ linear in } h}+o(h)$$



(g_{x_0} beste lineare Approximation)

Versuch

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)[h] + r_f(x_0, h),$$

wobei $r_f(x_0, h) \leqslant \varepsilon|h|$ für $\varepsilon > 0$ und $|h| \leqslant h(\varepsilon) \iff \lim_{h\to 0} \frac{|r_f(x_0,h)|}{|h|} = 0$

4.1.8 Definition

f heißt *diffb.* in x_0, wenn es eine lineare Abbildung $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ gibt mit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)[h] + r_f(x_0, h)$$

Übung Wenn f in x_0 diffb. ist, so ist $Df(x_0)$ eindeutig bestimmt.

VL: Do, 2003-07-17

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^m$ = Vektoranalysis ($f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$)

Begriff der Differenzierbarkeit
physikalisch (koordinatenabhängig):
$x = (x_1, \ldots, x_m)$ zum Beispiel $x_i = \langle x, e_i\rangle (= e_i^*(x))$
$f : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^m$
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(x_0 - te_i) - f(x_0)\right)$, falls das existiert, und heißt *i-te partielle Ableitung.*
mathematisch (koordinatenfrei):
$f : U \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in U$ *differenzierbar*, wenn es $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{m*}$ mit

$$(*) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)[h] + o(h)$$

für $x_0 + h \in U$ gibt.

4.1.9 Hilfssatz

$f : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in U$ differenzierbar.

1) $Df(x_0)$ ist durch $(*)$ eindeutig bestimmt.
2) f ist in x_0 stetig.
3) f ist in x_0 in alle Richtungen partiell differenzierbar, und es gilt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = Df(x_0)(e_i)$.

Beweis

1) Es seien $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, die beide $(*)$ erfüllen. Dann folgt
$(T_1 - T_2)(h) = o_1(h) + o_2(h)$
also $\forall\varepsilon > 0 \exists h_\varepsilon > 0 : B_{h_\varepsilon}(x_0) \subset U$ und $|o_1(h) + o_2(h)| \leqslant \varepsilon|h|$ für $|h| \leqslant h_\varepsilon$
$\Rightarrow |(T_1 - T_2)(h)| \leqslant \varepsilon|h|$ für $0 < |h| \leqslant h_\varepsilon$
$\Rightarrow |(T_1 - T_2)\frac{h}{|h|}| \leqslant \varepsilon$
$\Rightarrow \sup_{x\in S^{m-1}} |(T_1 - T_2)(x)| = |(T_1 - T_2)| \leqslant \varepsilon \quad \forall\varepsilon > 0$
2) Sei $1 \geqslant \varepsilon > 0$ und $|h| \leqslant h_\varepsilon$. Dann ist
$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leqslant |Df(x_0)| \cdot |h| + \varepsilon|h|$
$\leqslant (|Df(x_0)| + 1)|h| = (|Df(x_0)| + 1)|y - x_0|$, also ist f in x_0 Lip-stetig.

3) $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + te_i) - f(x_0))$
$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(Df(x_0)[te_i] + o(te_i)) = Df(x_0)[e_i] + \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} o(te_i)$
Für $\varepsilon > 0$ und $t = |te_i| \leqslant h_\varepsilon$ gilt
$|\frac{1}{t} o(te_i)| \leqslant \frac{1}{t}\varepsilon t = \varepsilon \Rightarrow$
$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} o(te_i) = 0 \Rightarrow Df(x_0)[e_i] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$. □

Beispiel $f : \mathbb{R}^2 \ni x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{wenn } x = 0, \\ \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & x \neq 0. \end{cases}$
Dann ist $\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} f(0 + te_i) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} f(te_i) = 0$
Aber f ist nicht stetig im Nullpunkt: für $x = (\cos\theta, \sin\theta)$ ist
$\lim_{t\to 0} f(tx) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cos\theta \sin\theta}{t^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \frac{1}{2}\sin 2\theta \neq 0$ für $2\theta \neq k\pi$. Also kann f in 0 nicht differenzierbar sein!

Annahme Alle partiellen Ableitungen von f existieren in $x_0 \in U$. Betrachte
$f(x_0 + h) - f(x_0) \overset{m=2}{=} f(x_{01} + h_1, x_{02} + h_2) - f(x_{01}, x_{02})$
$= f(x_{01} + h_1, x_{02} + h_2) - f(x_{01}, x_{02} + h_2) + f(x_{01}, x_{02} + h_2) - f(x_{01}, x_{02})$

1. erweiterte Voraussetzung Alle partiellen Ableitungen existieren in einer Umgebung $|h| \leqslant h_0$ von x_0.
$\Rightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01} + \theta_1 h_1, x_{02} + h_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02} + \theta_2 h_2)$
mit $\theta_j = \theta_j(x, h) \in (0,1)$!

$$= \underbrace{h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02})}_{=Df(x_0)[h] \text{ falls } f \text{ differenzierbar}} + h_1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01} + \theta_1 h_1, x_{02} + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{01}, x_{02}) \right) +$$
$$h_2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}((x_{01}, x_{02} + \theta_2 h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{01}, x_{02}) \right)$$

2. erweiterte Voraussetzung Alle partiellen Ableitungen sind stetig in x_0.
$\Rightarrow f(x_0 + h) - f(x_0) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) + o(h)$.
Also gilt

4.1.10 Satz

Es sei $f : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung von x_0 in alle Richtungen partiell differenzierbar und alle partiellen Ableitungen seien stetig in x_0. Dann ist f differenzierbar in x_0. Insbesondere gilt dann $\frac{d}{dt} f(x_0 + th) = \sum_{i=1}^m h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = Df(x_0)[h]$.

4.1.11 Definition

In diesem Fall heißt $Df(x_0) \in \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^{m*}$ der *Gradient von f*.

Bemerkung Ist x_0 ein lokales Maximum oder Minimum von f, so gilt $Df(x_0) = 0$.

Bemerkung Wenn in U alle partiellen Ableitungen existieren und stetig sind, so ist f differenzierbar in U.

4.1.12 Definition

$f : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ heißt *homogen* vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, wenn gilt $f(tx) = t^\alpha f(x)$, $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, $t > 0$.

Beispiel Homogene Polynome, z.B. $f(x) := x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^3$
Untersuche für $t \sim 1$
$f(tx) = f(x + (t-1)x) = t^\alpha f(x) = (1 + t - 1)^\alpha f(x)$ mit $t = 1 + s$:
$f(x + sx) = (1+s)^\alpha f(x)$
Also folgt für f differenzierbar in $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$
$\alpha(1+s)^{\alpha-1} f(x)\big|_{s=0} = \langle \text{grad } f(x), x\rangle = \alpha f(x)$.

4.1.13 Satz (Eulers Homogenitätsregel)

Ist f in $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ diffbar und homogen vom Grad α, so gilt $\alpha f(x) = \langle \text{grad } f(x), x\rangle$, $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Ist $\alpha \neq 0$, so liegen alle Max und Min von f in $f^{-1}(0)$.

4.1.14 Definition (Jacobi-Matrix)

VL: Mo, 2003-10-20

Die Matrix von $Df(x_0)$ bez. der Standardbasen heißt die *Jacobi-Matrix* von f im Punkt x_0,

$$(\langle Df(x_0)[e_i], e_j\rangle) \quad 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$$

Beispiel

1) $m = n = 1$ -s.Kap. 3!
   Übung Überprüfen Sie das Verhältnis von (1) und (2)

2) $m = 1$, n bel.

$$R \supset I = (a,b) \ni t \xrightarrow{c} (c_1(t), \dots, c_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

4.1.15 Definition (Weg)

Eine stetige Abbildung

$$c : \mathbb{R} \supset I = [a,b] \ni t \to c(t) \in X, \quad X \text{ metr. Raum}$$

heißt *Weg in X*. $c(a)$ heißt der *Anfangspunkt*, $c(b)$ heißt der *Endpunkt* von c, c dann auch Weg von $c(a)$ nach $c(b)$.
c heißt *geschlossen*, wenn $c(a) = c(b)$; c heißt *normiert*, wenn $a = 0$ und $b = 1$.

4.1.16 Definition

Auf X können wir eine Relation $\sim$ definieren durch $x \sim y \iff$ es gibt einen stetigen Weg von x nach y in X.

4.1.17 Hilfsatz & Definition

$\sim$ (siehe oben) ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen die *Wegzusammenhangskomponenten* von X. X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es nur eine Äquivalenzklasse gibt.

Beispiele

1) $\mathbb{R}^m$ ist wegzusammenhängend.
2) $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ ist wegzusammenhängend $\iff m > 1$.
3) $\mathcal{O}(m)$ hat zwei Wegzusammenhangskomponenten!

Es sei $c : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar $\iff$ jede Komponente c_i ist in (a, b) differenzierbar und $Df(t) = (c_1'(t), \dots, c_n'(t)) =: c'(t)$
z.B. $c(t) = (a \cos t, b \sin t) \in \mathbb{R}^2$ Ellipse: $c'(t) = (-a \sin t, b \cos t)$

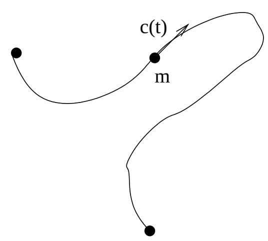
4.1.18 Definition (differenzierbare Wege)

Ist $c : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar, so heißt c ein *differenzierbarer Weg* mit Tangentialvektor $c'(t)$.

VL: Mi, 2003-10-22

Tangentialvektor

Annahme: c ist in einer Umgebung (a, b) von [0,1] differenzierbar $\Rightarrow Dc(t)[e] = c'(t)$ =Tangentialvektor.
Berühmter deutscher Rennfahrer:



$\frac{1}{2}m|c'(t)|^2$ = kinetische Energie, $c'(t)$ = Geschwindigkeit

4.1.19 Definition

Ein differenzierbarer Weg c heißt *mit Bogenlänge parametrisiert*, falls gilt:

$$|c'(t)| = 1.$$

Weitere Beispiele (s.o.)

(3) $m = 2, n = 1, f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$, $\mathcal{G}(f) = \{(x, y, f(x, y));\ (x, y) \in U\}$ ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$
$f(x, y) = x^2 + y^2 =: z$ ergibt zum Beispiel einen Paraboloid.
$f(x, y) = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ergibt eine Kugel. Wo ist diese Funktion differenzierbar?

(4) m bel., $n = 1$ skalare Funktionen, z.B. Potentiale
Hyperebene in $\mathbb{R}^{m+1} \sim \mathcal{G}(f), f : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}$ in U differenzierbar.
In diesem Fall wird

$$Df(x)[h] = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i =: \langle \nabla f(x), h \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

Nabla$= \nabla$: $\nabla f(x) = \text{Gradient von } f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{pmatrix}(x)$
Am Gradienten können wir lokale Extrema erkennen. Sie erfüllen $\nabla f(x) = 0$.
Vektorfeld X (im $\mathbb{R}^3$): $\mathbb{R}^3 \ni x \to f(x) \in \mathbb{R}^3$
allgemeiner:

(5) $m = n$

$$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

Rechenregeln für die Ableitung

Die Abbildungen $F : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n$ bilden einen Vektorraum via

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) \in \mathbb{R}^n$$

Wenn f_i differenzierbar ist in x_0, so gilt

$$\begin{aligned}
(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x_0 + h) &= \alpha_1 f_1(x_0 + h) + \alpha_2 f_2(x_0 + h) \in \mathbb{R}^n \\
&= \alpha_1 [f_1(x_0) + Df_1(x_0)[h] + o_{x_0,f_1}(h)] + \alpha_2 [f_2(x_0) + Df_2(x_0)[h] + o_{x_0,f_2}(h)] \\
&= (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x_0) + (\alpha_1 Df_1(x_0) + \alpha_2 Df_2(x_0))\,[h] + (o_{x_0,f_1}(h) + o_{x_0,f_2}(h))
\end{aligned}$$

$$|o_{x_0,f_1}(h) + o_{x_0,f_2}(h)| = |o_{x_0,\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2}(h)| \leqslant \varepsilon|h| + \varepsilon|h| \text{ für } |h| \leqslant \min\left(\delta_{x_0,f_1}(\varepsilon), \delta_{x_0,f_2}(\varepsilon)\right)$$

4.1.20 Hilfssatz

Sind f_1, f_2 in x_0 differenzierbar, $f_i : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n$ so auch $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ mit

$$D(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x_0) = \alpha_1 Df_1(x_0) + \alpha_2 Df_2(x_0) \text{ in } \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

Wie steht es mit der Kettenregel?

Sei f differenzierbar in x_0, und g differenzierbar in $f(x_0)$. Ist dann $g \circ f$ differenzierbar in x_0?

$$\begin{aligned}
g \circ f(x_0 + h) - g \circ f(x_0) &= g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) \\
&= g(f(x_0) + \underbrace{Df(x_0)[h] + r_f(x_0, h)}_{=k=k(x_0,h,f)\in\mathbb{R}\ \ |k|\leqslant c_{x_0,f}|h|}) - g(f(x_0)) \\
&= g(f(x_0)) + Dg(f(x_0))[k] + r_g(f(x_0), k) - g(f(x_0)) \\
&= Dg(f(x_0))\,[Df(x_0)[h]] + Dg(f(x_0))[r_f(x_0, h)] + r_g(f(x_0), k) \\
\text{Dabei gilt,} & \\
|Dg(f(x_0))[r_f(x_0, h)]| &\leqslant c_{g,f,x_0}|r_f(x_0, h)| \leqslant \varepsilon C|h| \text{ für } |h| \leqslant \delta_{f,x_0}(\varepsilon) \\
\text{und} & \\
|r_g(f(x_0), k)| &\leqslant \varepsilon|k| \leqslant \varepsilon C_{f,x_0}|h| \text{ für } C_{f,x_0}|h| \leqslant \delta_{g,f,x_0}(\varepsilon) \text{ für } |k| \leqslant \delta_{g,f,x_0}(\varepsilon)
\end{aligned}$$

d.h. $g \circ f(x_0 + h) =: g \circ f(x_0) + Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)[h] + r_{g\circ f}(x_0, h)$

mit

$$|r_{g\circ f}(x_0, h)| \leqslant \varepsilon C_{g,f,x_0}|h| + \varepsilon C_{f,x_0}|h| \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ und } |h| \leqslant \min\left\{\delta_{f,x_0}(\varepsilon), C_{f,x_0}^{-1}\delta_{g,f,x_0}(\varepsilon)\right\}$$

d.h. $r_{g\circ f}(x_0, h) = o(h)$

4.1.21 Hilfsatz (Kettenregel)

Unter den obigen Vorausetzungen ist $g \circ f$ differenzierbar mit

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$$

d.h. D vertauscht mit $\circ$.

Was für Produkte können wir bilden?

z.B.: Für $\phi : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}, f : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n$ erhalten wir $\phi f : U \to \mathbb{R}^n$.
Für $f_1, f_2 : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n$ erhalten wir $\langle f_1, f_2 \rangle : U \to \mathbb{R}$.

Hier liegt jedesmal eine *Bilinearform* B vor, so dass das Produkt gegeben ist durch

$$B_1(\phi, f)(x) = \phi(x) \cdot f(x) \text{ d.h. } B_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$$

$$\text{bzw. } B_2(f_1, f_2)(x) = \langle f_1(x), f_2(x) \rangle \text{ d.h. } B_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$$

Bilineare Abbildung: Gegeben seien $\mathbb{K}$-Vektorräume V_1, V_2, W; dann heißt eine Abbildung $B : V_1 \times V_2 \to W$ bilinear, falls $B(\cdot, v_2)$ und $B(v_1, \cdot) \in \mathcal{L}(V_1, W)$ bzw. $\mathcal{L}(V_2, W)$ für alle $v_i \in V_i$.

Entsprechend definiert man eine multilineare Abbildung $B : V_1 \times \cdots \times V_k \to W$, Schreibweise: $B(v_1, \ldots, v_k) \in W$

4.1.22 Definition

Eine multilineare Abbildung $B : V^k \to W$ heißt

symmetrisch $:\Longleftrightarrow$ $B(v_1, \ldots, v_k) = B(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)})$ $\forall v_i \in V$ und $\pi \in S_k$.
(z.B. ist B_2 symmetrisch)

alternierend $:\Longleftrightarrow$ $B(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn} \pi B(v_1, \ldots, v_k)$
(z.B. $\det(v_1, \ldots, v_n)$ in V^n ist alternierend)

$$\mathbb{R}^m \supset U \xrightarrow{f_1 \times f_2} \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \xrightarrow{B} \mathbb{R}^n$$

$$B \circ (f_1 \times f_2)(x) = B(f_1(x), f_2(x))$$

Es seien jetzt f_1, f_2 in $x_0 \in U$ differenzierbar. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&B(f_1(x_0 + h), f_2(x_0 + h)) - B(f_1(x_0), f_2(x_0)) \\
&\quad = B(f_1(x_0) + Df_1(x_0)[h] + o(h), f_2(x_0) + Df_2(x_0)[h] + o(h)) - B(f_1(x_0), f_2(x_0)) \\
&\quad = B(f_1(x_0), Df_2(x_0)[h]) + B(Df_1(x_0)[h], f_2(x_0)) + o(h)
\end{aligned}$$

4.1.23 Hilfssatz (Leibnizregel)

Unter den obigen Voraussetzungen ist $B \circ (f_1 \times f_2)$ in x_0 differenzierbar mit

$$DB \circ (f_1 \times f_2)(x_0)[h] = B(Df_1(x_0)[h], f_2(x_0)) + B(f_1(x_0), Df_2(x_0)[h])$$

VL: Mo, 2003-10-27

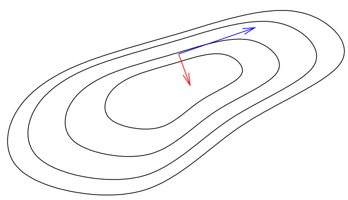
Zusammenfassung Differentiationsregeln

1) Linearität $f \mapsto Df$ (4.1.20)
2) Leibniz-Regel: Ableitung von Bilinearformen in differenzierbaren Funktionen. $DB(f_1, f_2)$ (4.1.23)
3) Kettenregel $D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \circ Dg(x)$ (4.1.21)

Anwendungen

Sei $\star$ ab hier immer: $\mathbb{R}^m \supset \underset{\text{offen}}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ differenzierbar

1) Konstante Abbildung $F:\ x \to f(x) = y \in \mathbb{R}^n$, y unabbhängig von x
Dann gilt
$$f(x+h) = f(x_0) = f(x) + 0[h] + 0 \quad \Rightarrow Df(x) = 0$$
2) $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\quad U = \mathbb{R}^m$
$$f(x+h) = f(x) + f(h) \quad \Rightarrow Df(x) = f$$
3) $\mathbb{R}^m \supset \underset{\text{offen}}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ differenzierbar, $n = 1,\ c : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ differenzierbarer Weg: $[a,b] \xrightarrow{c} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}(f \circ c)(t) = \langle \operatorname{grad} f(c(t)), c'(t) \rangle$
Wir nehmen jetzt an, dass c eine *Höhenlinie* von f ist, das heißt $f \circ c(t) =$ const, d.h. $\langle \operatorname{grad} f(c(t)), c'(t) \rangle = 0$ und $f(c(b)) - f(c(a)) = \int_a^b \langle \operatorname{grad} f(c(t)), c'(t) \rangle \, dt$.



4) Wir betrachten jetzt Vektorfelder und ihre *Richtungsableitung*, d.h. Richtungsableitung von f in Richtung X ist
$$\nabla_X f(x) := Df(x)[X]$$
Dann gelten folgende Regeln:

Vorbemerkung f mit $\star$, ϕ mit $\star$ und $n = 1 \iff \phi$ skalar, dann erfüllt $\phi f(x) = \phi(x) f(x)$ auch $\mathbb{R}^m \supset \underset{\text{offen}}{U} \xrightarrow{\phi f} \mathbb{R}^n$ mit n wie n von f. Dann gilt nach der Leibnizregel:
$$D(\phi \cdot f)(x)[h] = D\phi(x)[h] \cdot f(x) + \phi(x) \cdot Df(x)[h]$$
(i) Für ϕ_j skalar, $X_j \in \mathbb{R}^m, j = 1{,}2$ ist
$$\nabla_{\phi_1(x)X_1 + \phi_2(x)X_2} f(x) = \phi_1(x) \nabla_{X_1} f(x) + \phi_2(x) \nabla_{X_2} f(x)$$
(ii) ϕ skalar, $X \in \mathbb{R}^m$
$$\Rightarrow \nabla_X \phi f(x) = \phi(x) \nabla_X f(x) + D\phi(x)[X] f(x)$$

Bemerkung

(i) und (ii) charakterisieren einen *Zusammenhang*, die allgemeinste Form der Differentiation.
Die Einschränkung auf Vektorfelder ist nicht nötig.

Erinnerung: Mittelwertsatz (MWS): Unter den üblichen Voraussetzungen gilt

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

für ein $c \in (a,b)$, d.h. zwischen a und b.

4.1.24 Satz (Mittelwertsatz)

f mit $\mathbb{R}^m \supset \underset{\text{offen}}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ sei differenzierbar in U. Dann gilt für $x, y \in U$ so, dass die Verbindungsstrecke $\left\{c_{xy}(t) := x + t(y-x) \;\middle|\; t \in [0,1]\right\}$ in U enthalten ist:

$$|f(y) - f(x)| \leqslant |y-x| \sup_{t \in (0,1)} |Df(x + t(y-x))|$$

Beweis

Nach Voraussetzung ist $[0,1] \ni t \to f \circ c(t)$ stetig und in $(0,1)$ differenzierbar. Also gilt:

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(c(1)) - f(c(0))| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} f \circ c(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^1 Df(x + t(y-x))[y-x] dt \right| \\ &\leqslant |y-x| \int_0^1 |Df(x+t(y-x))| dt \\ &\leqslant |y-x| \sup_{t \in [0,1]} |Df(x + t(y-x))| \end{aligned}$$

Um die verschärfte Behauptung zu beweisen, muss man 3.5.12 (Verallg. MWS) auf diesen Fall übertragen. (!) □

4.1.25 Folgerung

1) Ist f mit $\mathbb{R}^m \supset \underset{\text{offen}}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ differenzierbar in U und $Df(x) = 0 \; \forall x \in U$, so ist f in jeder Wegzusammenhangskomponenten von U konstant.

2) Es sei f wie in (1) (nicht konstant!). Dann gilt für $x_0, x, y \in U$ mit $c_{xy}([0,1]) \subset U$:

$$|f(y) - f(x) - Df(x_0)[y-x]| \leqslant |y-x| \sup_{0<t<1} |Df(x+t(y-x)) - Df(x_0)|.$$

Beweis

1) Alle Wegzusammenhangskomponenten einer offenen Menge sind offen, also o.B.d.A. U wegzusammenhängend. Zu $x, y \in U$ gibt es also einen differenzierbaren Weg (!) von x nach y, $c : [0,1] \to U$ also

$$f(y) - f(x) = f(c(1)) - f(c(0)) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f \circ c(t) dt = \int_0^1 Df(c(t))[c'(t)] dt = 0$$

Bemerkung: Es genügt, dass c stückweise differenzierbar ist (!).

2) Wir wenden den Mittelwertsatz 4.1.24 an auf die Funktion

$$f(x+h) - f(x) - Df(x_0)[h] =: g(h)$$

Dann ist

$$\begin{aligned} g(y-x) &= f(y) - f(x) - Df(x_0)[y-x] \\ g(0) &= 0 \end{aligned}$$

also nach Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x) - Df(x_0)[y-x]| &= |g(y-x) - g(0)| \\ &\leqslant |y-x| \sup_{0<t<1} |Dg(t(y-x))| \\ &= |y-x| \sup_{0<t<1} |Df(x + t(y-x)) - Df(x_0)| \end{aligned}$$

□

4.1.26 Satz

Es sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von in U (U wegzusammenhängend) differenzierbaren Funktionen mit den Eigenschaften

(i) Es gibt ein $x_0 \in U$ so, dass $(f_k(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(ii) Die Folge $(Df_k(x))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{m\cdot n}$ ist in U gleichmäßig konvergent.

Ist dann $G(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n), x \in U$, der Grenzwert von $(Df_k(x))$, so gilt: (f_k) konvergiert gleichmäßig in U gegen ein f mit $\mathbb{R}^m \supset \underset{\text{offen}}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$, und f ist differenzierbar in U mit $Df(x) = G(x)$.

Beweis

Im wesentlichen wie früher. (3.2.18) □

4.1.27 Satz (Umkehrbarkeit der Ableitung)

Es sei f in $x_0 \in U$ differenzierbar und in U bijektiv. Dann ist $f^{-1} : f(U) \to U$ in $f(x_0)$ differenzierbar genau dann, wenn gilt:

(1) f^{-1} ist stetig in $f(x_0)$;

(2) $Df(x_0)$ ist invertierbar ($\Rightarrow n = m$)
In diesem Fall ist $Df^{-1}(f(x_0)) = Df(x_0)^{-1}$

Beweis

Wie früher (!) in 3.2.9. Beachte, dass $D(f^{-1} \circ f)(x) = I$ wegen Linearität, $= Df^{-1}(f(x)) \circ Df(x) = I$ wegen Kettenregel. $\square$

VL: Mi, 2003-10-29

4.1.28 Satz (über inverse Funktionen)

Es sei $f: \ \mathbb{R}^m \supset \underset{\text{offen}}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$ in U *stetig differenzierbar* (leicht zu überprüfen).
Ferner gebe es einen Punkt $x_0 \in U$ mit $Df(x_0)$ invertierbar.
Dann gibt es offene Umgebungen $U_{x_0}, V_{f(x_0)}$ so, dass $f : U_{x_0} \to V_{f(x_0)}$ bijektiv und $f^{-1} : V_{f(x_0)} \to U_{x_0}$ stetig differenzierbar ist.

Beweis: benutzt den Banachschen Fixpunktsatz.
Wir bestimmen ein $\varepsilon > 0$ so, dass

$$|Df(x) - Df(y)| \leqslant \frac{1}{2} \quad \forall x, y \in B_\varepsilon(x_0)$$

$$\left[\text{ex. wegen } Df : U \ni x \mapsto Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m^2}\right]$$

Dann betrachten wir die Abbildung

$$\Phi_y(x) := y - f(x) + x \qquad \text{auf } X := \overline{B_\varepsilon(x_0)}$$

$$[\Phi_y(x) = x \iff f(x) = y(!)]$$

Wir wählen $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$.
Zu zeigen:

1) $\Phi_y : \overline{B_\varepsilon(x_0)} \to \overline{B_\varepsilon(x_0)}$;

2) Φ_y ist eine Kontraktion.

Vorbereitung: O.B.d.A. nehmen wir an, dass $x_0 = 0 = f(x_0)$ und $Df(x_0) = I$.
Um das zu erreichen, betrachten wir

$$\tilde{f}(x) := Df(x_0)^{-1} \tau_{-f(x_0)} \circ f \circ \tau_{x_0}(x) \quad (!) \quad (\text{mit } \tau_a(x) = x + a)$$

Zeige nun (1) und (2)

1) $|y| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, |x| \leqslant \varepsilon$

$$\begin{aligned}
|\Phi_y(x)| &= |y - f(x) + x| \leqslant |y| + |f(x) - x| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |f(x) - f(0) - Df(0)[x]| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + |x| \sup_{0<t<1} |Df(tx) - Df(0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

2) Für $x_1, x_2 \in \overline{B_\varepsilon(0)}$ und $|y| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ ist

$$\begin{aligned}
|\Phi_y(x_1) - \Phi_y(x_2)| &= |f(x_1) - f(x_2) - Df(0)[x_1 - x_2]| \\
&\leqslant |x_1 - x_2| \sup_{0<t<1} |Df(\underbrace{x_1 + t(x_2 - x_1)}_{\in \overline{B_\varepsilon(0)}}) - Df(0)| \\
&\leqslant \frac{1}{2}|x_1 - x_2|, \text{ d.h. } \Phi_y \text{ ist eine Kontraktion}
\end{aligned}$$

Also folgt aus dem Fixpunktsatz (2.2.3): Zu jedem $y \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$ gibt es genau ein $x \in \overline{B_\varepsilon(0)}$ so, dass $f(x) = y$, d.h.

$$f: \underbrace{f^{-1}(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)) \cap B_\varepsilon(0)}_{U_0} \to \underbrace{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)}_{V_0}$$

ist bijektiv.
Es bleibt zu zeigen, dass f^{-1} in V_0 stetig differenzierbar ist. Wenn wir zeigen, dass f^{-1} *stetig* ist in $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$, dann ist für $x \in U_0 \subset \overline{B_\varepsilon(0)}$:

$$Df(x) = Df(0) + Df(x) - Df(0) = (I + \underbrace{Df(x) - Df(0)}_{=:-R})$$

und deshalb

$$Df(x)^{-1} = (I - R)^{-1} = \sum_{j \geqslant 0} R^j \text{ ist konvergent in } \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$$

$$R^j \in \mathbb{R}^{m^2}, \quad |R^j| \leqslant |R|^j \quad |R|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m)} \leqslant |R|_{\mathbb{R}^{m^2}}$$

d.h.: $Df(x)$ ist invertierbar.
Mit der Stetigkeit folgt, dass f^{-1} in V_0 differenzierbar ist mit

$$(Df^{-1})(f(x)) = Df(x)^{-1},$$

und das ist stetig.
Also ist der Satz bewiesen, wenn wir zeigen: f^{-1} ist stetig in $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$.
Seien also $y_1, y_2 \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(0)$. Dann ist

$$f^{-1}(y) = \text{ Fixpunkt von } \Phi_y = \lim_{n\to\infty} (\Phi_y)^n(0).$$

Tatsächlich gilt:

$$\left|f^{-1}(y) - (\Phi_y)^n(0)\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{|\Phi_y(0)|}{1 - \frac{1}{2}} = 2^{2-n}|y| \leqslant \varepsilon \cdot 2^{-n+1},$$

d.h. die Konvergenz ist gleichmäßig. Also können wir abschätzen:

$$\begin{aligned}
\left|f^{-1}(y)-(\Phi_y)^n(0)\right| &\leqslant 2\eta+\left|\Phi_{y_1}^n(0)-\Phi_{y_2}^n(0)\right| \text{ für } \forall\eta>0, n\geqslant n(\eta)\\
&\leqslant 2\eta+\left|\Phi_{y_1}(\Phi_{y_1}^{n-1}(0))-\Phi_{y_2}(\Phi_{y_1}^{n-1}(0))\right|\\
&\quad+\left|\Phi_{y_2}(\Phi_{y_1}^{n-1}(0))-\Phi_{y_2}(\Phi_{y_2}^{n-1}(0))\right|\\
&\leqslant 2\eta+|y_1-y_2|+\frac{1}{2}\left|\Phi_{y_1}^{n-1}(0)-\Phi_{y_2}^{n-1}(0)\right|\\
&\underset{\text{induktiv}}{\leqslant} 2\eta+|y_1-y_2|\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)\\
&\leqslant 2\eta+2|y_1-y_2|\leqslant 4|y_1-y_2|\text{ , wenn wir } \eta=|y_1-y_2| \text{ wählen.}
\end{aligned}$$

□

4.1.29 Hilfssatz

Es sei $A\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ mit

$$|A|:=\sup_{|x|\leqslant 1}|Ax|<1.$$

Dann ist $I-A$ invertierbar mit

$$(I-A)^{-1}=\sum_{j\geqslant 1}A^j \text{ (Übung!)}$$

Achtung! Diese Norm ist nicht die Norm in $\mathbb{R}^n$!

Kommentar Es sei V ein m-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Nach Wahl einer Basis ist V isomorph zu $\mathbb{R}^m$, doch der Isomorphismus ist abhängig von der Wahl. Wir können aber über Differenzierbarkeit einer Abbildung $f:V\to W$ sprechen, *ohne* Basen einzuführen.
f in $x\in V$ differenzierbar $\iff$ $\exists Df(x)\in\mathcal{L}(V,W)$ mit

$f(x+h)=f(x)+Df(x)[h]+r_f(x,h)$ **basisunabhängig** mit $|r_f(x,h)|\leqslant\varepsilon|h|$ für $|h|\leqslant\delta(\varepsilon)$

Also ist die Definition übertragbar auf vollständige normierte Räume = Banachräume $\supset$ Hilberträume.
$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; $V=V_1\times V_2\xrightarrow{f}W\Rightarrow$ es gibt partielle (totale!) Ableitungen $D_1f, D_2f\in\mathcal{L}(V_i,W), i=1{,}2$.

Dann gilt wie in 4.1.10:

Satz

Für f mit $V=V_1\times V_2\xrightarrow{f}W$ gilt:
Existieren D_1f und D_2f in einer Umgebung von $x_0\in V_1\times V_2$ und sind in x_0 stetig, so ist f differenzierbar in x_0.
Die Invertierbarkeit von f ist gleichbedeutend mit der eindeutigen Lösbarkeit von $f(x)=y$.
Für lineare Gleichungen ($A\in\mathcal{L}(V,W)$) gilt das nicht immer!

$$Ax=y \text{ ist lösbar}$$

$$V = \ker A \oplus V', \quad W = \mathcal{R}(A) \oplus W'$$

Sei A *surjektiv* $\iff$ Die Gleichung ist immer lösbar und $A' := A|V' : V' \to W$ ist invertierbar.

Bemerkung

$A' = D_2 A$ (!) ist Erweiterung auf differenzierbare Funktion.
$V = V_1 \times V_2 \xrightarrow{f} W$ sei differenzierbar und es gebe $v = (x_0, y_0)$ mit $\boxed{f(v) = 0}$ und $\boxed{D_2 f(v) \text{ ist invertierbar.}}$

$$\Rightarrow f^{-1}(0) = \{(x, g(x)); x \in B_\varepsilon(x_0)\}$$

d.h. $\boxed{f(x,y) = 0}$ ist auflösbar nach y in einer Umgebung von (x_0, y_0).

VL: Mo, 2003-11-03

Bemerkungen

(1) f in U stetig differenzierbar $\iff$ alle Funktionen $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ existieren in U und sind dort stetig.

(2) Sind X, Y metrische Räume und ist $f : X \to Y$ bijektiv und stetig, und $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig, so heißt f ein *Homöomorphismus* von X nach Y.

4.1.30 Satz (über implizite Funktionen)

Es sei $U_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $U_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ offen, $f : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^{m_2}$ stetig differenzierbar, $f(x_0, y_0) = 0$ für ein $(x_0, y_0) \in U_1 \times U_2$ und $D_2 f(x_0, y_0)$ invertierbar.

Dann gibt es offene Mengen $x_0 \in U_1' \subset U_1$, $y_0 \in U_2' \subset U_2$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U_1' \to U_2'$ mit der Eigenschaft

$$(x, y) \in U_1' \times U_2' \text{ mit } f(x,y) = 0 \iff y = g(x)$$

oder

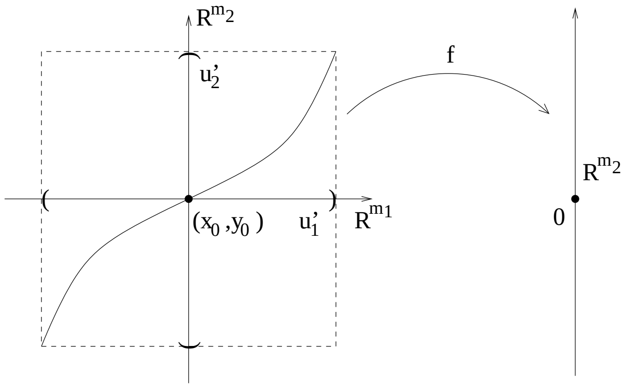
$$f^{-1}(0) \cap U_1' \times U_2' = \mathcal{G}(g) \quad \Leftarrow [\text{ Graph von } g]$$

In diesem Fall ist

$$Dg(x) = -D_2 f(x, g(x))^{-1} \circ D_1 f(x, g(x))$$

Erläuterung

(1) $D_2 f(x_0, y_0)$ invertierbar.



(2) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy =: f_x(y); \quad a > 0$

$f(x,y) = 0$ beschreibt das kartesische Blatt

$$f_x(y) = y^3 + \underbrace{0y^2}_{=\alpha} \underbrace{-(3ax)}_{\beta} y + \underbrace{1x^3}_{\gamma}$$

Über Lösungsformel erhält man

$$3p = -3ax \quad \Rightarrow p^3 = (-ax)^3$$

$$q^2 = \frac{x^6}{4}, \quad 2q = x^3$$

$\Rightarrow$ Diskriminante:

$$D = \frac{x^6}{4} - a^3x^3 = \frac{x^3}{4}(x^3 - 4a^3)$$

Wo gilt $(1) f(x,y) = 0, \quad (2) \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$?

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^3 - 2y^3 = 0 \\ 3y^2 - 3ax = 0 \quad &\Rightarrow \quad 3y^3 - 3axy = 0 \end{aligned}$$

$y = +\sqrt{ax}, \quad x > 0$, keine Lösung für $x < 0$

$x = y = 0$ Lösung:

$$x^3 + (\pm\sqrt{ax})^3 - 3(ax \pm \sqrt{ax}) = x^3 \pm (ax)^{\frac{3}{2}} \mp 3(ax)^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow x^3 \mp 2(ax)^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$x^6 = 4a^3x^3, \quad x^3 = 4a^3, \quad x = \sqrt[3]{4}a$$

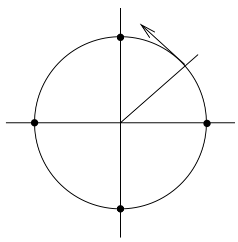
Aber keine explizite Formel.

(3) Beispiel:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad > 0$$

$$f_r(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 (\iff y = \pm\sqrt{r^2 - x^2})$$

$$\frac{\partial f_r}{\partial y}(x,y) = 2y = 0 \quad \iff x = \pm r$$



$$x(t) = r\cos t, \quad y(t) = r \sin t \quad \Rightarrow c'(t) = r \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Beweis des Satzes über implizite Funktionen

(mittels Satz über inverse Funktionen 4.1.28)
Betrachte: $\tilde{f} : \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \supset U_1 \times U_2 \ni (x,y) \mapsto (x, f(x,y)) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$
Behauptung: $\tilde{f}$ ist in $U_1 \times U_2$ stetig differenzierbar und $D\tilde{f}(x_0,y_0)$ ist invertierbar:

$$D\tilde{f}(x_0,y_0) \cong \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial x_{m_1}} & \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_{m_2}} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_{m_1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x_{m_1}}{\partial x_{m_1}} & \frac{\partial x_{m_1}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_{m_1}}{\partial y_{m_2}} \\ & & & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_{m_2}} \\ & \star & & \vdots & & \vdots \\ & & & \frac{\partial f_{m_2}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_{m_2}}{\partial y_{m_2}} \end{pmatrix} (x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ & \star & & D_2 f(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

also $\det D\tilde{f}(x_0,y_0) = \det D_2 f(x_0,y_0) \neq 0$.
Also gibt es eine offene Umgebung $U_1' \times U_2'$ (o.B.d.A.!) von (x_0,y_0) so, dass

$\tilde{f}|U_1' \times U_2'$ invertierbar mit stetig differenzierbarer Umkehrfunktion ist. Ist dann $(x,y) \in U_1' \times U_2'$ mit $f(x,y) = 0$, so gilt

$$\begin{aligned}
(x,y) &= \tilde{f}^{-1} \circ \tilde{f}(x,y) = \tilde{f}^{-1}(x, f(x,y)) \\
&= \tilde{f}^{-1}(x,0) \\
\text{d.h. } y &= p_2 \circ \tilde{f}^{-1}(x,0), \quad p_2 : \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \to \mathbb{R}^{m_2} \\
&=: g(x) \qquad (p_2 \text{ Projektion })
\end{aligned}$$

Um die Ableitung zu berechnen, benutzen wir die Kettenregel mit:

$$i : \mathbb{R}^{m_1} \ni x \mapsto (x,0) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$$

$$g = p_2 \circ \tilde{f}^{-1} \circ i : \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_1} \quad (p_2, i \text{ sind linear. })$$

also

$$Dg = Dp_2 \circ D\tilde{f}^{-1} \circ Di \Rightarrow Dg(x) = p_2 \circ (D\tilde{f})^{-1}(x,0) \qquad \text{oder}$$

$$f(x, g(x)) = 0 \overset{\text{Kettenregel}}{\Rightarrow} 0 = Df_1(x, g(x)) + D_2 f(x, g(x)) \circ Dg(x)$$

□

4.1.31 Hilfssatz

f mit $\mathbb{R}^m \supset \underset{\text{offen}}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ ist genau dann differenzierbar in x_0, wenn alle Koordinatenfunktionen $f_j(x) = \langle f(x), e_j \rangle = e_j^\star(f(x))$ in x_0 differenzierbar sind.

Beweis

$$f(x) = \sum_{j=1}^{m} \langle f(x), e_j \rangle \, e_j = \sum_{j=1}^{m} f_j(x) e_j$$

(1) f differenzierbar $\Rightarrow f_j$ differenzierbar.

(2) f_j differenzierbar $\Rightarrow f_j e_j$ differenzierbar nach Leibniz

$\Rightarrow f$ differenzierbar nach Linearität. □

Zurück zu Descartes!

Ändere die Koordinaten vermöge

$$u = \frac{x+y}{2}, \quad v = \frac{x-y}{2}$$

$$\text{Übergangsmatrix ist } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ \det = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow u + v = x \quad u - v = y$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 0 &= (u+v)^3 + (u-v)^3 - 3a(u^2 - v^2) \\
&= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + a^3 - 3a^2v + 3av^2 - v^3 \\
\Rightarrow 0 &= 2u^3 + 6uv^2 - 3au^2 + 3av^2 \\
&= v^2(6u + 3a) + u^2(2u - 3a)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow v^2 = u^2 \frac{3a - 2u}{3a + 6u} \qquad \text{wenn } 3a + 6u \neq 0$$

lösbar für $\begin{matrix} 0 < 3a + 6u \\ 0 < 3a - 2u \end{matrix} \iff -\frac{a}{2} < u < \frac{3a}{2}$
d.h. die Kurve wird ein Graph

$$(u, v_\pm(u)) \text{ über } (-\frac{a}{2}, \frac{3a}{2})$$

4.2 Höhere Ableitungen und die Taylorformel

Sei f mit $\mathbb{R}^m \supset \underset{\text{offen}}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ in U stetig differenzierbar

$$\Rightarrow U \ni x \to Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{m \cdot n} \text{ stetig.}$$

Es könnte sein, dass Df in x_0 noch einmal differenzierbar ist, mit Ableitung

$$D(Df)(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$$

In Termen der partiellen Ableitungen heißt das, dass $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\right)$ in x_0 differenzierbar ist. D.h., dass $\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i \partial x_k}(x_0)\right)_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i,k \leqslant m}}$ existiert.

4.2.1 Definition

f mit $\mathbb{R}^m \supset \underset{\text{offen}}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ sei in U differenzierbar. f heißt *zweimal differenzierbar*, wenn Df in x_0 differenzierbar ist.

4.2.2 Hilfssatz

f ist in $x_0 \in U$ zweimal differenzierbar genau dann, wenn $U \ni x \mapsto Df(x)[h] \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist in x_0 für jedes $h \in \mathbb{R}^m$.

Beweis

Df in x_0 differenzierbar
$\overset{4.1.31}{\iff}$ Alle Komponentenfunktionen $\left\langle Df(x)[e_i^{(m)}], e_j^{(n)} \right\rangle$ sind in x_0 differenzierbar.
$\iff$ $\sum_{i=1}^m h_i \left\langle Df(x)[e_i^{(m)}], e_j^{(n)} \right\rangle$ ist differenzierbar $\forall j, h \in \mathbb{R}^m$
$\iff$ $Df(x)[h]$ differenzierbar in x_0 $\forall h \in \mathbb{R}^m$ □

4.2.3 Definition

Wenn f in x_0 zweimal differenzierbar ist, so schreiben wir

$$D^2 f(x_0)[h, k] := D(Df(\cdot)[h])(x_0)[k].$$

Bemerkung

$D^2 f(x_0) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ist eine Bilinearform, genauer ist

$$\begin{aligned} D^2 f(x_0)[h,k] &= \sum_{j=1}^{n} \left\langle D^2 f(x_0)[h,k], e_j^{(n)} \right\rangle e_j^{(n)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l_1,l_2=1}^{m} \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_{l_1} \partial x_{l_2}} (x_0) h_{l_1} k_{l_2} \right) e_j^{(n)} \end{aligned}$$

VL: Mi, 2003-11-05 Problem: Ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen beliebig?
$f : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^n$, $Df : U \ni x \mapsto Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ differenzierbar in U
o.B.d.A.: Beschränkung auf $n = 1$

Bemerkung f zweimal differenzierbar in $x_0 \in U \iff Df$ differenzierbar in $x_0 \in U \iff U \ni x \mapsto Df(x)[h] \in \mathbb{R}$ differenzierbar in x_0

Erinnerung $Df(x)[h] = \nabla_h f(x) =$ Richtungsableitung von f in Richtung h in x
$\nabla_{e_i} f(x) = i$-te partielle Ableitung von f in x

Also Ist f zweimal differenzierbar in x_0, dann existiert die Richtungsableitung $\nabla_h f$ in U $\forall h \in \mathbb{R}^m$, und es existieren $\nabla_k(\nabla_h f)(x_0)$ $\forall k, h \in \mathbb{R}^m$ insbesondere auch $\nabla_h(\nabla_k f)(x_0)$.

4.2.4 Satz (H.A. Schwarz/Dieudonné)

$$f : \mathbb{R}^m = \underset{D_1 f}{\mathbb{R}^{m_1}} \times \underset{D_2 f}{\mathbb{R}^{m_2}} \supset U_1 \times U_2 \ni (x,y) \mapsto f(x,y) \in \mathbb{R}^n$$

(1) Es sei $U = U_1 \times U_2$ und ferner gelte

   (a) $D_1 f, D_2 f$ existieren in U;

   (b) $D_2 D_1 f$ existiert in U und ist in (x_0, y_0) stetig.

   Dann existiert auch $D_1 D_2 f(x_0, y_0)$ und ist $= D_2 D_1(x_0, y_0)$.

(2) Wenn f in U differenzierbar und in $x_0 \in U$ zweimal differenzierbar ist, so ist $D^2 f(x_0)$ symmetrisch, d.h.

$$D^2 f(x_0)[h,k] = D^2 f(x_0)[k,h].$$

Vorbemerkung

$$Df(x)[h] = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x+th) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x+th) - f(x))$$

Beweis von (1)

Wir wissen, dass D_2D_1f in U existiert und stetig ist. Wir haben zu untersuchen

$$
\begin{aligned}
&D_1D_2f(x_0,y_0)[k,h]\\
&\quad= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(D_2f(x_0+sh,y_0)[k]-D_2f(x_0,y_0)[k]\right)\\
&\quad= \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(x_0+sh,y_0+tk)-f(x_0+sh,y_0)\right)\right.\\
&\qquad\left.-\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(x_0,y_0+tk)-f(x_0,y_0)\right)\right)\\
&\quad= \lim_{s\to 0}\lim_{t\to 0}\frac{1}{st}\left\{\left(f(x_0+sh,y_0+tk)-f(x_0,y_0+tk)\right)-\left(f(x_0+sh,y_0)-f(x_0,y_0)\right)\right\}\\
&\quad= \lim_{s\to 0}\lim_{t\to 0}\frac{1}{st}\left\{\int_0^s\left[\frac{d}{du}f(x_0+uh,y_0+tk)-\frac{d}{du}f(x_0+uh,y_0)\right]du\right\}\\
&\quad= \lim_{s\to 0}\lim_{t\to 0}\frac{1}{st}\left\{\int_0^s\left[D_1f(x_0+uh,y_0+tk)[h]-D_1f(x_0+uh,y_0)[h]\right]du\right\}\\
&\quad= \lim_{s\to 0}\lim_{t\to 0}\frac{1}{st}\left\{\int_0^s\int_0^t D_2D_1f(x_0+uh,y_0+vk)[h,k]dvdu\right\}\\
&\quad= \lim_{s\to 0}\lim_{t\to 0}\frac{1}{st}\left\{\int_0^s\int_0^t D_2D_1f(x_0,y_0)[h,k]dvdu\right\}+\lim_{s\to 0}\lim_{t\to 0}\frac{1}{st}R_{st}[h,k]\\
&\quad= D_2D_1f(x_0,y_0)[h,k]+R[h,k]
\end{aligned}
$$

wobei

$$|R[h,k]| = \left|\lim_{s\to 0}\lim_{t\to 0}\frac{1}{st}R_{st}[h,k]\right| \leqslant \lim_{s\to 0}\lim_{t\to 0}\frac{1}{st}|R_{st}[h,k]| \overset{!}{=} 0$$

Sei $\varepsilon > 0$; dann gibt es $\delta(\varepsilon)$ so, dass

$$|D_2D_1f(x_0+uh,y_0+vk)-D_2D_1f(x_0,y_0)| \leqslant \varepsilon \text{ für } |u||h|+|v||k| \leqslant \delta(\varepsilon).$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{st}|R_{st}[h,k]| &\leqslant \frac{1}{st}\int_0^s\int_0^t |D_2D_1f(x_0+uh,y_0+vk)[h,k]-D_2D_1f(x_0,y_0)[h,k]|\,dvdu\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{st}|h||k|\int_0^s\int_0^t dvdu = \varepsilon|h||k|.
\end{aligned}
$$

Weil ε beliebig ist, folgt daraus

$$|D_1D_2f(x_0,y_0)[h,k]-D_2D_1f(x_0,y_0)[h,k]| \leqslant \varepsilon|h||k| \quad \text{für } |h|+|k| \leqslant \delta(\varepsilon).$$

Wähle $|\underbrace{h_0}_{\in\mathbb{R}^{m_1}}| = |\underbrace{k_0}_{\in\mathbb{R}^{m_2}}| = 1$ beliebig und $0 < \lambda \leqslant \frac{\delta(\varepsilon)}{2}$. Dann gilt

$$|D_1D_2f(x_0,y_0)[\lambda h_0,\lambda k_0] - D_2D_1f(x_0,y_0)[\lambda h_0,\lambda k_0]| \leqslant \varepsilon|\lambda h_0||\lambda k_0| = \varepsilon\lambda^2|h_0||k_0|.$$

Weil ε beliebig ist, folgt

$$D_1D_2f(x_0,y_0)[h,k] = D_2D_1(x_0,y_0)[h,k] \quad \forall h\in\mathbb{R}^{m_1}, k\in\mathbb{R}^{m_2}.$$

$\square$

Beweis von (2)

Wir betrachten

$$\begin{aligned}
g(x,h,k) &:= f(x+th+k) - f(x+th) - f(x+k) + f(x)\\
&= f(x+th+k) - f(x+k) - (f(x+th) - f(x))\\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}\,[f(x+th+k) - f(x+th)]\,dt\\
&= \int_0^1 (Df(x+uh+k)[h] - Df(x+uh)[h])\,du\\
&\underset{x=x_0}{=} \int_0^1 ((Df(x_0+uh+k)[h] - Df(x_0)[h]) - (Df(x_0+uh)[h] - Df(x_0)[h]))\,du\\
&= \int_0^1 \left\{D^2f(x_0)[h,uh+k] + o(|h||uh+k|) - \left(D^2f(x_0)[h,uh] + o(|h||uh|)\right)\right\}du\\
&= \int_0^1 D^2f(x_0)[h,k]du + R_{h,k} \text{ mit}\\
&|R_{h,k}| \leqslant \varepsilon(|h|(|h|+|k|) + |h|^2) \leqslant 3\varepsilon(|h|^2+|k|^2).
\end{aligned}$$

D.h.

$$\left|g(x_0,h,k) - D^2f(x_0)[h,k]\right| \leqslant 3\varepsilon(|h|^2+|k|^2)$$

also auch

$$\left|g(x_0,k,h) - D^2f(x_0)[k,h]\right| \leqslant 3\varepsilon(|h|^2+|k|^2)$$

also

$$\left|D^2f(x_0)[h,k] - D^2f(x_0)[k,h]\right| \leqslant 6\varepsilon(|h|^2+|k|^2)$$

falls $|h|^2+|k|^2 \leqslant \delta(\varepsilon)$. Mit $h=\lambda h_0, k=\lambda k_0, |h_0|=|k_0|=1$ folgt wie zuvor

$$D^2f(x_0)[h,k] = D^2f(x_0)[k,h].$$

Bemerkung

(1) Ist f in U zweimal differenzierbar mit stetiger 2. Ableitung, so sind alle partiellen Ableitungen stetig in U – und umgekehrt! Die Menge dieser Abbildungen bezeichnen wir mit $C^2(U, \mathbb{R}^n)$.

(2) Es ist für n=1: $D^2 f(x)[e_i, e_j] = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)\right)$, falls z.B. $f \in C^2$

4.2.5 Definition

Für f mit $\mathbb{R}^m \supset \underset{\text{offen}}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$, $n = 1$ heißt die Matrix von $D^2 f$ bezüglich (e_i) die *Hesse-Matrix* von f.

Beispiel

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3ay, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax$$

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3a \\ -3a & 6y \end{pmatrix}, \quad \det D^2 f = 36xy - 9a^2$$

Damit können wir höhere Ableitungen bilden.

4.2.6 Definition (höhere Ableitungen)

Es sei f mit $\mathbb{R}^m \supset \underset{\text{offen}}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ in U k-mal differenzierbar. Dann heißt f in $x_0 \in U$ $(k+1)$-mal differenzierbar, falls $x \mapsto D^k f(x)[h_1, \ldots, h_k]$ in x_0 differenzierbar ist. Dann setzen wir

$$D^{k+1} f(x_0)[h_1, \ldots, h_k, h_{k+1}] = D(D^k f(\cdot)[h_1, \ldots, h_k])(x_0)[h_{k+1}].$$

4.2.7 Hilfssatz

Mit 4.2.6 gilt

(1) $D^k f(x_0)$ ist eine k-Linearform auf $\mathbb{R}^n$

(2) $D^k f(x_0)$ ist symmetrisch.

Hinweis

$D^{k+1} f = D^2 D^{k-1} f$ für $k \geqslant 1$!

Die höheren partiellen Ableitungen werden definiert durch

$$\begin{aligned} D^k f(x)[e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}] &= \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{k-1}}} \right)(x) \\ &= \frac{\partial^k f(x)}{\partial x_{i_{\pi(1)}} \cdots \partial x_{i_{\pi(k)}}} \quad \forall \pi \in S_k \end{aligned}$$

4.2.8 Hilfssatz

Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}$ in U k-mal differenzierbar.

(1) Dann ist auch $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ in U k-mal differenzierbar und

$$D^k(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 D^k f_1 + \alpha_2 D^k f_2 \qquad \text{Linearität}$$

(2) Ebenso ist $f_1 f_2$ in U k-mal differenzierbar, mit der *allgemeinen Leibnizregel*:

$$D^k(f_1 f_2) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j f_1 D^{k-j} f_2.$$

(3) Ist $g : \mathbb{R}^k \supset V \to U$ k-mal differenzierbar, so auch $f_j \circ g : V \to \mathbb{R}$ (mit einer expliziten, aber sehr komplizierten Formel)

Beweis Später; die k-malige Differenzierbarkeit – ohne explizite Formel – folgt leicht durch Induktion.

Taylorformel

Beachte, dass

$$D^k f(x)[h_1, \ldots, h_k] = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} h_{1i_1} h_{2i_2} \cdots h_{ki_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}, \qquad h_j \in \mathbb{R}^m$$

insbesondere für $h = h_1 = \cdots = h_k$:

$$D^k f(x)[h, \ldots, h] = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} \underbrace{h_{i_1} \cdots h_{i_k}}_{h_1^{\alpha_1} h_2^{\alpha_2} \cdots h_m^{\alpha_m} = h^\alpha} \quad \text{mit } h = (h_1, \ldots, h_m)$$

und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ und $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = k$

$(i_1, \ldots, i_k) = (i_{\pi(1)}, \ldots, i_{\pi(k)})$ = Wort in den Buchstaben $1, \ldots, m$ der Länge k, $\sharp = \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!}$

$$\begin{aligned} &D^k f(x)[h, \ldots, h] \\ &\quad = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m \\ |\alpha| = k}} \underbrace{\frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}}_{\partial x^\alpha} \cdot h^\alpha \cdot \sharp\{\text{Worte in } m \text{ Buchst. d. L. } k \text{ m. Häufigk. } \alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \\ &\quad = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m \\ |\alpha| = k}} \frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \cdot h^\alpha = k! \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m \\ |\alpha| < k}} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x) \end{aligned}$$

Ist $f \in C^{k+1}(U, \mathbb{R}^m)$, so gilt

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} D^j f(x)[h, \ldots, h] + \frac{1}{k!} \int_0^1 (1-t)^k D^{k+1} f(x+th)[h, \ldots, h] dt \\ &= \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{Z}_+^m \\ |\alpha| \leqslant k}} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x) + (k+1) \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^k \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x+th) dt \end{aligned}$$

Beachte, dass *VL: Mo 2003-11-10*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x+th) = Df(x)[h],$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{d^2}{dt^2}\right|_{t=0} f(x+th) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \frac{d}{dt} f(x+th) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} Df(x+th)[h] \\ &= D(Df(\cdot)[h])(x)[h] \\ &= D^2 f(x)[h, h] \end{aligned}$$

also induktiv

$$\left.\frac{d^k}{dt^k}\right|_{t=0} f(x+th) = D^k f(x)[h, \ldots, h] =: D^k f(x)[h^{(k)}]$$

4.2.9 Satz (Taylorformel)

Es sei f in U $n+1$-mal differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} D^j f(x)[h^{(j)}] + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n D^{n+1} f(x+th)[h^{(n+1)}] dt \\ &= \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant n \\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^m}} \frac{h^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x) + (n+1) \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(\alpha)}(x+th) dt. \end{aligned}$$

mit $f^{(\alpha)}(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(x)$.

Beweis

Die erste Identität folgt durch Anwendung der Taylorformel in $\mathbb{R}$ auf die Funktion $g(t) = f(x+th)$ für $t = 1$.

Für die zweite Identität müssen wir $D^j f(x)[h^{(j)}]$ durch partielle Ableitungen ausdrücken.

$$D^j f(x)[h^{(j)}] = D^j f(x) \left[\sum h_i e_i, \ldots, \sum h_i e_i\right] = \sum_{i_1, \ldots, i_j = 1}^{m} h_{i_1} \cdots h_{i_j} f^{(i_1, \ldots, i_j)}(x)$$

$$\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_j)\in\mathbb{N}^m \\ \text{mit Häufigkeiten} \\ \alpha_1,\dots,\alpha_m}} h_{i_1}\cdots h_{i_k} f^{(i_1,\dots,i_j)}(x) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{Z}_+^m \\ |\alpha|=j}} c_\alpha h^\alpha f^{(\alpha)}(x)$$

c_α lässt sich kombinatorisch in α ausdrücken.

Zur Berechnung von c_α wenden wir die Taylorformel an auf die Funktion $f(x) := x^\alpha$ in $x = 0$. Dann ist

$$f^{(\beta)}(0) = \begin{cases} 0, & \beta \neq \alpha \\ \alpha!, & \beta = \alpha \end{cases} \qquad \text{und } f^{(\beta)}(x) = 0 \ \forall |\beta| > |\alpha|$$

Dann folgt mit $j = |\alpha|$:

$$f(0+h) = h^\alpha = \frac{1}{j!}\sum_{|\beta|=|\alpha|} c_\beta h^\beta \beta! \delta_{\beta\alpha} = \frac{c_\alpha}{j!} h^\alpha \alpha! \Rightarrow \frac{c_\alpha}{j!} = \frac{1}{\alpha!}$$

□

Die Leibnizregel

$B : V^1 \times V^2 \to W$ Bilinearform,
$f_i : \mathbb{R}^m \supset U \to V^i$ $k+1$-mal differenzierbar.
Wir wollen $D^k B(f_1, f_2)(x)[h^{(k)}]$ berechnen.
Formal argumentieren wir so:

$$\begin{aligned} B(f_1(x+h), f_2(x+h)) &= \sum_{i,j=0}^{k} B\left(\frac{1}{i!}D^i f_1(x)[h^{(i)}], \frac{1}{j!}D^j f_2(x)[h^{(j)}]\right) + R_k \\ &= \sum_{i,j=0}^{k} \frac{1}{i!j!} B\left(D^i f_1(x)[h^{(i)}], D^j f_2(x)[h^{(j)}]\right) + R_k \\ &= \sum_{l=0}^{2k} \frac{1}{l!} \sum_{i+j=l} \frac{l!}{i!j!} \underbrace{B\left(D^i f_1(x)[h^{(i)}], D^j f_2(x)[h^{(j)}]\right)}_{l=i+j-\text{Multilinearform}} + R_k \\ &= \sum_{l=0}^{2k} \frac{1}{l!} D^l (B \circ f_1 \times f_2)(x)[h^{(l)}] + R_k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D^l B \circ (f_1 \times f_2)(x) = \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} \left(B \circ D^i f_1 \times D^{l-i} f_2\right)(x)$$

Was ergibt sich für die partiellen Ableitungen?

$$\begin{aligned}
B(f_1(x+h), f_2(x+h)) &= \sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant k} B\left(\frac{h^\alpha}{\alpha!} f_1^{(\alpha)}(x), \frac{h^\beta}{\beta!} f_2^{(\beta)}(x)\right) \\
&= \sum_{|\alpha|+|\beta|\leqslant k} \frac{h^{\alpha+\beta}}{\alpha!\beta!} B\left(f_1^{(\alpha)}, f_2^{(\beta)}\right) \\
&\underset{\gamma=\alpha+\beta}{=} \sum_{|\gamma|\leqslant k} \frac{h^\gamma}{\gamma!} \frac{\gamma!}{\alpha!\beta!} B\left(f_1^{(\alpha)}, f_2^{(\beta)}\right) \\
&= \sum_{|\gamma|\leqslant k} \frac{h^\gamma}{\gamma!} \sum_{\alpha\leqslant\gamma} \begin{pmatrix}\gamma\\ \alpha\end{pmatrix} B\left(f_1^{(\alpha)}(x), f_2^{(\gamma-\alpha)}(x)\right).
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $V = V^2 = \mathbb{R}$, $B =$ Multiplikation in $\mathbb{R}$:

$$(f_1 f_2)^{(\gamma)}(x) = \sum_{\alpha\leqslant\gamma} \begin{pmatrix}\gamma\\ \alpha\end{pmatrix} f_1^{(\alpha)}(x) f_2^{(\gamma-\alpha)}(x)$$

$$(f_1 f_2)''(x) = (f_1' f_2 + f_1 f_2')' = f_1'' f_2 + f_1' f_2' + f_1' f_2' + f_1 f_2''$$

zur Kettenregel

$f_2 : U \to \mathbb{R}^n$, $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$, f_i k-mal differenzierbar. Dann gilt für $f_1(0) = 0, f_2(0) = 0$:

$$D^k(f_1 \circ f_2)(x)[h^{(k)}] = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ \alpha\in\mathbb{N}^i\\ |\alpha|=k}} \frac{k!}{i!\alpha!} D^\alpha f_1(0) \circ D^i f_2(0)[h^{(k)}]$$

mit $D^\alpha f_2(0) = D^{\alpha_1} f_2(0) \times \ldots \times D^{\alpha_i} f_2(0)$

Für die partiellen Ableitungen ergeben sich sehr viel kompliziertere Ausdrücke.

4.2.10 Differentialoperatoren

VL: Mi, 2003-11-12

Multiindexschreibweise:

$$(x_1, \ldots, x_m) = x \in \mathbb{R}^m,\ \alpha \in \mathbb{Z}_+^m, \quad x^\alpha = x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_m^{\alpha_m}$$

Entsprechend: $\partial_x^\alpha : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m): \quad f^{(\alpha)}(x) = \partial_x^\alpha f(x) := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}} f(x) = \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}(x)$$

∂^α bezeichnet eine partielle Ableitung der Ordnung $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$, wobei α_1-mal nach x_1, ..., α_m-mal nach x_m differenziert wird. Auf die Reihenfolge kommt es nach dem Satz von Schwarz (4.2.4) nicht an.

Beispiel: $\alpha = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i\text{-te Stelle}}, \ldots, 0)$, $\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^i}$

Sei nun $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant d} a_\alpha \xi^\alpha$ ein Polynom in m Veränderlichen $\xi_1, \ldots, \xi_m$ mit Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{C}$ ($|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m,\ d = \operatorname{grad} P$)

$P(\xi)$ erzeugt einen *linearen Differentialoperator* (mit konstanten Koeffizienten)

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant d} a_\alpha \xi^\alpha \mapsto D = P(\partial) : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$$

$$P(\partial) f(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant d} a_\alpha \partial_x^\alpha f(x)$$

$$(\xi_i) \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \xi \leftrightarrow \partial = \left(\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \tfrac{\partial}{\partial x_m}\right)$$

Beispiel

$P(\xi) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_m^2$ erzeugt den *Laplace-Operator*:

$$\Delta : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}$$

(der eine wichtige Rolle in der mathematischen Physik spielt)

Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $A_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))$:

$$P : U \times \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$

$$P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant d} A_\alpha(x) \xi^\alpha \qquad \text{Polynom mit Koeffizienten linearer Abbildungen}$$

$$P(x, \xi)[h] = \sum_{|\alpha| \leqslant d} A_\alpha(x)[h] \xi^\alpha, \quad h \in \mathbb{R}^m$$

P erzeugt einen linearen Differentialoperator

$$D = P(x, \partial) : \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^p)$$

$$P(x, \partial) f(x) := \sum_{|\alpha| \leqslant d} A_\alpha(x) \left[\partial_x^\alpha f(x)\right]$$

Beispiele

(1) *Der Gradient:*
grad $: \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^m)$
$\operatorname{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)$

(2) *Die Divergenz:* $U \subset \mathbb{R}^m$
div $: \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^m) \to \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$
$\operatorname{div}(f_1, \ldots, f_m) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$

(3) *Die Rotation:* $(m = 3)$ $\operatorname{rot} : \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^3) \to \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^3)$

$$\operatorname{rot}(f_1, f_2, f_3) = \left(\tfrac{\partial f_3}{\partial x_2} - \tfrac{\partial f_2}{\partial x_3},\quad \tfrac{\partial f_1}{\partial x_3} - \tfrac{\partial f_3}{\partial x_1},\quad \tfrac{\partial f_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$$

(Mit Hilfe dieser Operation drückt man viele Differentialgleichungen der mathematischen Physik aus, z.B. Maxwellsche Gleichungen.)

Differenzierbarkeit im Komplexen

Wir betrachten die Differentiation von Funktionen einer Veränderlichen. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U, f : U \to \mathbb{C}$. Da $\mathbb{C}$ ein Körper ist, kann man wie in $\mathbb{R}$ Differenzenquotienten bilden.

4.2.11 Definiton ($\mathbb{C}$-differenzierbar)

f heißt $\mathbb{C}$-*differenzierbar* in $z_0 \in U$, falls

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \qquad h \in \mathbb{C}$$

existert.

$$\iff \exists l \in \mathbb{C} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - l \cdot h}{|h|} = 0$$

und dann $l = f'(z_0)$

$$T_l : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad T_l(z) = lz \quad T_l \text{ ist } \mathbb{C}\text{-linear, } T_l \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$$

Wir fassen $\mathbb{C}$ als reellen Vektorraum (d.h. $\mathbb{R}^2$) und T_l als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ auf.

$$\mathbb{C} \xrightarrow[\phi]{\sim} \mathbb{R}^2 \quad \phi(z) = \Big(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z\Big) \quad \mathbb{R} - \text{Isomorphismus}$$

$$\phi : (\mathbb{C}, |\cdot|) \xrightarrow{\sim} \Big(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2\Big) \text{ Isometrie } \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |z| = \|\phi(z)\|_2$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{T_l} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow\wr & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow\wr \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[\tilde{T_l}]{} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$\tilde{T_l} = \phi \circ T_l \circ \phi^{-1}$ (T_l betrachtet als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$)

$$T_l(z) = (l_1 + il_2)(x + iy) = (l_1 x - l_2 y) + i(l_2 x + l_1 y)$$

$$\begin{array}{c} l = l_1 + il_2 \\ z = x + iy \end{array} \quad \tilde{T_l}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & -l_2 \\ l_2 & l_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Wir fassen U als offene Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und $f : U \to \mathbb{R}^2$ als Abbildung $(x,y) \mapsto (\operatorname{Re} f(x,y), \operatorname{Im} f(x,y))$ auf.

4.2.12 Satz (Cauchy-Riemansche Differentialgleichungen)

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ ist in z_0 genau dann $\mathbb{C}$-differenzierbar, wenn f in z_0 $\mathbb{R}$-differenzierbar ist und in z_0 gilt:

$$\frac{\partial(\operatorname{Re} f)}{\partial x} = \frac{\partial(\operatorname{Im} f)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial(\operatorname{Re} f)}{\partial y} = -\frac{\partial(\operatorname{Im} f)}{\partial x}$$

Beweis

f ist in z_0 $\mathbb{C}$-differenzierbar

$$\iff \exists l \in \mathbb{C} \text{ mit } \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - T_l(h)}{|h|} = 0, \quad h \in \mathbb{C}$$

$$\iff \exists \tilde{T}_l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \text{ mit } \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0) - \tilde{T}_l(h)}{\|h\|_2} = 0, \quad h \in \mathbb{R}^2$$

$$\iff \exists l \in \mathbb{C}\ f \text{ ist in } z_0\ \mathbb{R}\text{-differenzierbar und } Df(z_0) = \tilde{T}_l$$

$$\iff \begin{pmatrix} \frac{\partial(\operatorname{Re} f)}{\partial x} & \frac{\partial(\operatorname{Re} f)}{\partial y} \\ \frac{\partial(\operatorname{Im} f)}{\partial x} & \frac{\partial(\operatorname{Im} f)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & -l_2 \\ l_2 & l_1 \end{pmatrix}$$

$\iff$ Cauchy-Riemansche Differentialgleichungen

Kommentar: Wenn f in U $\mathbb{C}$-differenzierbar ist (d.h. in jedem $z \in U$), so heißt f *holomorph*.

$$\left(\Rightarrow \text{ lokal } f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n (z - z_0)^n \right)$$

Integrale mit Parametern

Erinnerung: Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $\quad f : I \to V$ stetig, $(V, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler, normierter Vektorraum.

Sei $n = \dim V$, $\quad (e_1, \ldots, e_n)$ Basis.

$$V \ni f(x) = f_1(x)e_1 + \ldots + f_n(x)e_n, \quad f_i : I \to \mathbb{R} \text{ stetig}$$

$$\int_a^b f(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt\right) e_1 + \ldots + \left(\int_a^b f_n(t)dt\right) e_n$$

- Diese Definition hängt nicht von $(e_1, \ldots, e_n)$ ab.
- $\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leqslant (b-a) \sup_{\xi\in[a,b]} \|f(\xi)\|$
- $V = \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ $f : I \to V$

$$\int_a^b f(t)dt[h] = \int_a^b f(t)[h]dt \quad h \in \mathbb{R}^m$$

4.2.13 Satz (Leibniz)

Seien $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen, $f : I \times U \to \mathbb{R}^n$ mit Parameter $\in U$

(a) f stetig $\Rightarrow g : U \to \mathbb{R}^n, g(y) = \int\limits_a^b f(t,y)dt$ stetig.

(b) $\exists \frac{\partial f}{\partial y} = D_2 f : I \times U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ stetig $\Rightarrow$ g differenzierbar und

$$Dg(y) = \int\limits_a^b D_2 f(t,y)dt \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

Beweis

(a) Sei $y_0 \in U$, $\varepsilon > 0$ festgelegt. Sei $t \in I$ beliebig. f ist in (t, y_0) stetig $\Rightarrow \exists V(t)$ Umgebung von t in $[a,b]$ und $\delta(t) > 0$, so dass

$$\|f(s,y) - f(t,y_0)\| \leqslant \varepsilon \quad \forall s \in V(t),\ y \in B_{\delta(t)}(y_0) \text{ (d.h. } \|y - y_0\| < \delta(t))$$

Wir überdecken I mit Umgebungen der Form $V(t)$ und wählen eine endliche Überdeckung $V(t_1), \ldots, V(t_p)$ (I ist kompakt).

$$\Rightarrow \forall i\ \exists \delta(t_i) : \quad \|f(s,y) - f(t_i,y_0)\| \leqslant \varepsilon \quad \forall s \in V(t_i),\ y \in B_{\delta(t_i)}(y_0)$$

Setze $\delta := \min \delta(t_i)$

Sei $s \in I$ und $y \in B_\delta(y_0) \Rightarrow \exists i \quad s \in V(t_i)$

$$\|f(s,y) - f(s,y_0)\| \leqslant \underbrace{\|f(s,y) - f(t_i,y_0)\|}_{\leqslant \varepsilon} + \underbrace{\|f(t_i,y_0) - f(s,y_0)\|}_{\leqslant \varepsilon} \leqslant 2\varepsilon$$

Sei nun $y \in B_\delta(y_0)$

$$\|g(y) - g(y_0)\| = \left\| \int\limits_a^b [f(s,y) - f(s,y_0)]\, ds \right\| \leqslant (b-a) \sup_{\xi \in [a,b]} \|f(\xi,y) - f(\xi,y_0)\| \leqslant 2\varepsilon(b-a)$$

$\square$

(b) Sei nun $y_0 \in U$ und $\varepsilon > 0$ festgelegt. Die selbe Schlussweise angewandt auf $D_2 f$ liefert

$$\exists \delta > 0 \quad \|D_2 f(s,y) - D_2 f(s,y_0)\| \leqslant \varepsilon \quad \forall s \in I,\ \forall y \in B_\delta(y_0)$$

Wir schätzen ab:

$$\|f(s,y_0+h) - f(s,y_0) - D_2 f(s,y_0)[h]\| \overset{4\,1\,24}{\leqslant} \|h\| \sup_{\theta \in [y_0, y_0+h]} \|D_2 f(s,\theta) - D_2 f(s,y_0)\| \leqslant \varepsilon \|h\|$$

für $\|h\| < \delta\ \forall s \in I$ (da $[y_0, y_0+h] \subset B_\delta(y_0)$ für $\|h\| < \delta$)

$$\begin{aligned}
&\left\| g(y_0+h) - g(y_0) - \int_a^b D_2 f(s,y_0)[h]ds \right\| \\
&= \left\| \int_a^b \left[f(s,y_0+h) - f(s,y_0) - D_2 f(s,y_0)[h] \right] ds \right\| \\
&\leqslant (b-a) \sup_{s\in[a,b]} \left\| f(s,y_0+h) - f(s,y_0) - D_2 f(s,y_0)[h] \right\| \\
&\leqslant (b-a)\varepsilon \|h\| \qquad \text{für } \|h\| < \delta
\end{aligned}$$

$\Rightarrow g$ ist in y_0 differenzierbar und

$$Dg(y_0)[h] = \int_a^b D_2 f(s,y_0)[h]ds = \int_a^b D_2 f(s,y_0)ds[h], \quad h \in \mathbb{R}^m \qquad \square$$

4.3 Struktur differenzierbarer Funktionen

4.3.1 Definition

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen
$f: U \to V$ heißt $\mathcal{C}^k$-*Diffeomorphismus* ($k = 1,2,\dots,\infty$), wenn f bijektiv ist und f, f^{-1} der Klasse $\mathcal{C}^k$ sind.

f ist ein *lokaler $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus* $\iff$ $\forall x \exists U_x$ Umgebung von x und $\exists V_x$ Umgebung von $f(x)$ und $f\Big|_{U_x} : U_x \to V_x$ ist $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus.

VL: Mo, 2003-11-17

Von nun an: differenzierbar $= \mathcal{C}^\infty$, und Diffeo(morphismus) $= \mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus

Beispiele

1) $(-1,1) \ni t \mapsto \tan(\frac{\pi}{2}t) \in \mathbb{R}$ Diffeomorphismus
2) $\mathbb{R}^n \ni B_1(0) \ni x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_n^2}} \in \mathbb{R}^n$
3) Die Polarkoordinatentransformation (in $\mathbb{R}^2$) ist ein lokaler, aber kein globaler Diffeomorphismus.

Bedeutung der Diffeomorphismen

Sie sind nichtlineare Koordinatentransformationen (wie die linearen Isomorphismen in der Linearen Algebra).

Beispiel Ist $(x_1,\dots,x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n, (y_1,\dots,y_n) \in V \subset \mathbb{R}^n, \alpha : U \to V$ ein (lokaler) Diffeomorphismus, dann können $x_1,\dots,x_n$ als Koordinatensystem auf V aufgefasst werden (mittels α). So können Funktionen, Differentialformen oder Differentialoperatoren auf V als Objekte in Koordinaten $x_1,\dots,x_n$ aufgefasst werden.

Beispiele

- $g : V \to \mathbb{R},\ g \circ \alpha : U \to \mathbb{R}$ ("Funktion g in Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$")
- Sei $D : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^p) \to \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^q)$ ein Differentialoperator
  $\Rightarrow \exists$ einen Differentialoperator $\alpha^* D : \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^p) \to \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^q)$
  $g \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^p), \quad U \ni x \mapsto \alpha(x) \in V$
  $$(\alpha^* D) g(x) = D(g \circ \alpha^{-1})(\alpha(x))$$
  $\alpha^* D$ heißt der "zurückgeholte Operator D durch α" oder "D in Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$".

  Beispiel

  $$P : (0, \infty) \times \mathbb{R} \ni (r, \phi) \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, P(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$$

  Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
  $$(P^* \Delta) g(r, \phi) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}$$

Der Rangsatz

Manche Phänomene der lokalen Geometrie sehen viel einfacher aus, wenn man sie in geeignet angepassten Koordinaten betrachtet.

Motivation: $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\operatorname{rg} T := \dim \operatorname{Im} T$. Wenn (t_{ij}) die assoziierte Matrix von T ist: $\operatorname{rg} T = \operatorname{rg}(t_{ij})$ und:
$\operatorname{rg}(t_{ij}) = r \iff$

1) $\exists (r \times r)$-Unterdeterminante $\neq 0$
2) Alle $(r+1) \times (r+1)$-Unterdeterminanten sind gleich 0

$\operatorname{rg} T = r \Rightarrow \exists A \in \operatorname{Inv}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m),\ B \in \operatorname{Inv}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : B \circ T \circ A^{-1}(x) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$

4.3.2 Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^m, V \subset \mathbb{R}^n, f : U \to V$ differenzierbar. Der Rang von f in $x_0 \in U$
$$\operatorname{rg} f(x_0) := \operatorname{rg} \underbrace{Df(x_0)}_{\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)} = \operatorname{rg} J_f(x_0)$$

4.3.3 Bemerkung

Der Rang einer Abbildung ist invariant unter Diffeomorphismen (Koordinatentransformationen).

Seien $\alpha : U \to \alpha(U),\ \beta : V \to \beta(V)$ Diffeomorphismen
$$\begin{aligned}\operatorname{rg}\left(\beta \circ f \circ \alpha^{-1}\right)(\alpha(x)) &= \operatorname{rg} D\left(\beta \circ f \circ \alpha^{-1}\right)(\alpha(x)) \\ &= \operatorname{rg} \underbrace{D\beta(f(x))}_{\operatorname{Inv}(\mathbb{R}^n)} \circ Df(x) \circ \underbrace{D\alpha^{-1}(\alpha(x))}_{\operatorname{Inv}(\mathbb{R}^m)} = \operatorname{rg} Df(x) = rgf(x)\end{aligned}$$

4.3.4 Rangsatz

a) $f : U \to V$ differenzierbar, $\operatorname{rg} f(x_0) = r$.
Dann $\exists U_0 \ni x_0, \alpha : U_0 \to W_\varepsilon^m$ Diffeomorphismus mit

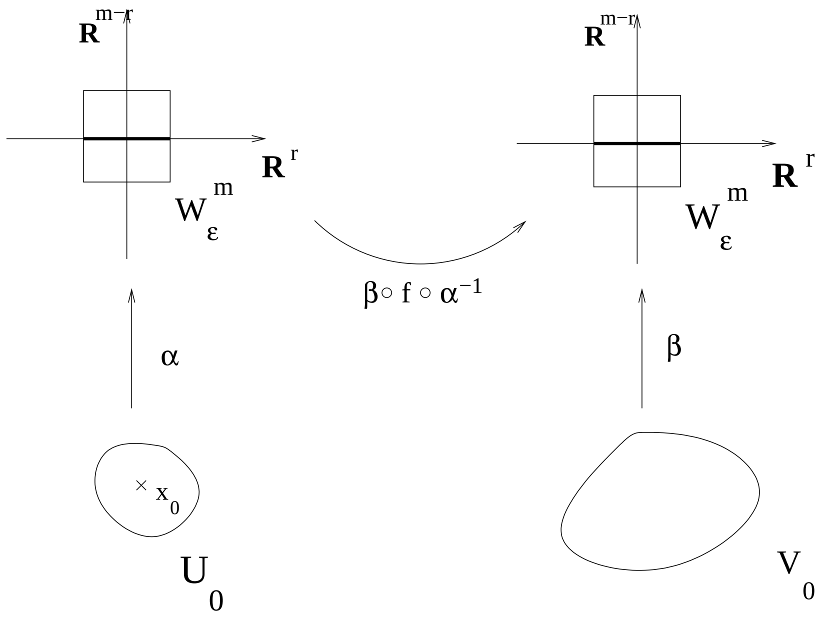
$$\alpha(x_0) = 0, \;\; \left(f \circ \alpha^{-1}\right)(z) = (z_1, \ldots, z_r, \phi_{r+1}(z), \ldots, \phi_n(z))), \;\; z \in W_\varepsilon^m$$

mit differenzierbaren $\phi_{r+1}, \ldots, \phi_n$ für ein hinreichend kleines ε.

wichtiger:

b) $\operatorname{rg} f(x) = r \; \forall x \in U$.
Dann $\exists U_0 \ni x_0, \; \exists V_0 \ni f(x_0)$ und Diffeomorphismen $\alpha : U_0 \to W_\varepsilon^m, \; \beta : V_0 \to W_\varepsilon^m$ mit $\alpha(x_0) = 0, \; \beta(f(x_0)) = 0$, sodass

$$\beta \circ f \circ \alpha^{-1}(z) = (z_1, \ldots, z_r, 0, \ldots, 0)$$



$$(z_1, \ldots, z_m) \overset{\text{kan.Proj.}}{\longmapsto} (z_1, \ldots, z_r) \overset{\text{kan.Injektion}}{\longmapsto} (z_1, \ldots, z_r, 0, \ldots, 0)$$

Beweis

a) o.B.d.A. $x_0 = 0, f(x_0) = 0$
rg $J_{f(x_0)} = r \Rightarrow \exists$ eine Untermatrix mit det $\neq 0$.
Durch Vertauschen der Koordinaten (Diffeomorphismus) können wir annehmen, dass

$$\underbrace{\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant r}}}_{=:\frac{\partial(f_1,\ldots,f_r)}{\partial(x_1,\ldots,x_r)}} \neq 0$$

Sei $\alpha : U \to \mathbb{R}^m, \alpha(x) = (f_1(x), \ldots, f_r(x), x_{r+1}, \ldots, x_m)$. Wir berechnen nun J_α :

$$J_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1,\ldots,f_r)}{\partial(x_1,\ldots,x_r)} & \frac{\partial(f_1,\ldots,f_r)}{\partial(x_{r+1},\ldots,x_m)} \\ 0 & Id_{m-r} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det J_\alpha(x_0) = \det \frac{\partial(f_1, \ldots, f_r)}{\partial(x_1, \ldots, x_r)}(x_0) \neq 0$$

Nach dem Satz über inverse Funktionen $\exists U_0, W_\varepsilon^m,\ \alpha : U_0 \to W_\varepsilon^m$ Diffeomorphismus

$$\begin{tikzcd}
(x_1, \ldots, x_m) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & (f_1(x), \ldots, f_r(x), f_{r+1}(x), \ldots, f_n(x)) \\
(f_1(x), \ldots, f_r(x), x_{r+1}, \ldots, x_m) \arrow[ur, "f\circ\alpha^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow (f \circ \alpha^{-1})(z) = (z_1, \dots, z_r, \phi_{r+1}(z), \dots, \phi_n(z))$ mit $\phi_j(z) := f_j(\alpha^{-1}(z)), j = \overline{r+1, n}, \phi_j \in \mathcal{C}^\infty$

Bemerkung Wir haben nur $\operatorname{rg} f(x_0) \geqslant r$ benutzt.

b) $\operatorname{rg} f(x) = r \ \forall x \in U$

$$\Rightarrow \operatorname{rg}\left(f \circ \alpha^{-1}\right)(z) = \operatorname{rg} f(x) = r \ \forall z = \alpha(x) \in W_\varepsilon^m$$

$$J_{f\circ\alpha^{-1}}(z) = \begin{pmatrix} Id_r & 0 \\ \frac{\partial(\phi_{r+1},\dots,\phi_n)}{\partial(z_1,\dots,z_r)} & \frac{\partial(\phi_{r+1},\dots,\phi_n)}{\partial(z_{r+1},\dots,z_m)} \end{pmatrix}$$

Nun ist aber $\operatorname{rg} J_{f\circ\alpha^{-1}}(z) = r \ \forall z$
Für $j \geqslant r+1$ folgt: Die Unterdeterminante

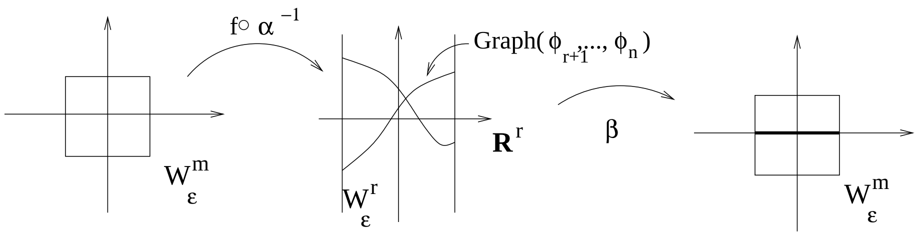
$$0 = \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & Id & & \vdots \\ & & & 0 \\ \frac{\partial\phi_i}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial\phi_i}{\partial z_r} & \frac{\partial\phi_i(z)}{\partial z_j} \end{vmatrix} = \frac{\partial\phi_i}{\partial z_j}(z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\phi_i}{\partial z_j}(z) = 0, \ r+1 \leqslant j \leqslant m, r+1 \leqslant i \leqslant n$$

$\Rightarrow \phi_i, i = \overline{r+1, n}$ hängen von $z_{r+1}, \dots, z_m$ nicht ab.
Das erlaubt, β zu definieren.

$$\beta : W_\varepsilon^r \times \mathbb{R}^{n-r} \to W_\varepsilon^r \times \mathbb{R}^{n-r}$$

$\beta(z_1, \dots, z_r, t_{r+1}, \dots, t_n) =$
$$\big(z_1, \dots, z_r, t_{r+1} - \phi_{r+1}(z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0), \dots, t_n - \phi_n(z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0)\big)$$



Es ist leicht zu sehen, dass:

β Diffeo mit $\beta^{-1}(z_1, \dots, z_r, t_{r+1}, \dots, t_n)$
$$= (z_1, \dots, z_r, t_{r+1} + \phi_{r+1}(z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0), \dots, t_n + \phi_n(z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \beta \circ f \circ \alpha^{-1} &= \beta(z_1, \dots, z_r, \phi_{r+1}(z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0), \dots, \phi_n(z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0)) \\ &= (z_1, \dots, z_r, \phi_{r+1}(z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0) - \phi_{r+1}(z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0), \dots) \\ &= (z_1, \dots, z_r, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Wir nehmen $V_0 := \beta^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon]^n)$ mit ε hinreichend klein, $\beta : V_0 \to W_\varepsilon^n$ $\square$

4.3.5 Bemerkung

Der Rang ist *unterhalbstetig*:

$$\operatorname{rg} f(x_0) = r \Rightarrow \exists U_0, \text{ sodass } \operatorname{rg} f(x) \geqslant r \ \forall x \in U_0$$

Beweis $\exists(r \times r)$-Untermatrix von J_f mit $\det A(x_0) \neq 0$. (weil $\operatorname{rg} J_f(x_0) = r$)

$$\begin{array}{ccccccc} U & \rightarrow & M_{m\times n}(\mathbb{R}) & \rightarrow & M_{r\times r}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & J_f(x) & \mapsto & A(x) & \mapsto & \det A(x) \end{array}$$

$\Rightarrow \exists U_0 \ni x_0 :\ \det A(x) \neq 0 \ \forall x \in U_0$
$\Rightarrow J_f(x)$ hat eine $(r \times r)$-Untermatrix mit $\det \neq 0$
$\Rightarrow \operatorname{rg} J_f(x) \geqslant r$
Konklusion: Wenn $\operatorname{rg} f(x_0) = \min(m,n) \Rightarrow$ konstant auf Umgebungen

4.3.6 Definition

$(*)$ $\mathbb{R}^m \supset U \xrightarrow{f} f(U) = V \subset \mathbb{R}^n$

1) f heißt *Immersion* bei x_0, falls $\operatorname{rg} Df(x_0) = m$ $(\leqslant n)$
f heißt *Submersion* bei x_0, falls $\operatorname{rg} Df(x_0) = n$
f heißt *lokaler Diffeomorphismus* bei x_0, falls f bei x_0 Immersion und Submersion ist $\iff$ $\operatorname{rg} Df(x_0) = m = n$

2) x_0 heißt ein *kritischer Punkt* von f, wenn $\operatorname{rg} Df(x_0) < n$, d.h. wenn $Df(x_0)$ nicht surjektiv ist.

   $y \in V$ heißt *kritischer Wert* von f, falls $f^{-1}(y)$ einen kritischen Punkt enthält.

   Andernfalls heißt y ein *regulärer Wert* von f; insbesondere ist y regulär, falls $f^{-1}(y) = \emptyset$ (!).

3) x_0 heißt *Singularität* von f, wenn $\operatorname{rg} Df(x_0) < \min\{m,n\}$

4.3.7 Normalform der Immersionen und Submersionen

1) f ist eine Immersion in x_0 $\iff$
$m \leqslant n$ und bis auf Koordinatentransformation hat f die Gestalt

$$W_\varepsilon^m \rightarrow W_\varepsilon^n,\ x \mapsto (x{,}0)$$

2) f ist eine Submersion in x_0 $\iff$
$m \geqslant n$ und bis auf Koordinatentransformation hat f die Gestalt

$$W_\varepsilon^m \rightarrow W_\varepsilon^n,\ (x_1,\ldots,x_n,\ldots,x_m) \mapsto (x_1,\ldots,x_n)$$

VL: Mo, 2003-11-24

$\mathbb{R}^m \supset U \xrightarrow{f} f(U) = V \subset \mathbb{R}^m$ Diffeomorphismus $\iff f \in \mathcal{C}^\infty$, bijektiv und $f^{-1} \in \mathcal{C}^\infty$

lokaler Diffeomorphismus $\iff \forall x \in U \exists U_x \overset{\text{offen}}{\subset} U: \; f|U_x : U_x \to f(U_x)$ Diffeomorphismus $\iff Df(x)$ invertierbar $\forall x \in U$

Bedeutung f linear, dann f Diffeomorphismus $\iff f$ invertierbar $\iff$ linearer Koordinatenwechsel: $(e_i) \rightsquigarrow (f(e_i))$

Diffeomorphismus $\leftrightarrow$ nichtlinearer Koordinatenwechsel

Beispiel Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$:

$$(-\pi, \pi) \times (0, \alpha) \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-, \quad (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$f^{-1} : (x, y) \mapsto (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\frac{y}{x})$$

Für $f : U \to V$ Diffeomorphismus definieren wir

$$T_f : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n) \qquad g \mapsto g \circ f$$

mit dem Inversen $(T_f)^{-1} = T_{f^{-1}}$. Diese Abbildung ist $\mathbb{R}$-linear.

Ist dann $D : \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^k)$ ein Differentialoperator

$$Dg(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant d} A_\alpha(x) g^{(\alpha)}(x),$$

so wird $f^*D = T_f \circ D \circ T_f^{-1}$, d.h.

$$f^*D(g)(x) = (D(g \circ f^{-1})) \circ f(x), x \in U, g \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n)$$

Beispiel für Polarkoordinaten

$$D = \operatorname{grad} : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-, \mathbb{R}^2), g \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = e_1 \frac{\partial g}{\partial x} + e_2 \frac{\partial g}{\partial y}$$

Berechne f^*D

$$g \in \mathcal{C}^\infty((0, \infty) \times (-\pi, \pi)), g \circ f^{-1}(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}, \; \arctan\frac{y}{x})$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(g \circ f^{-1})(x,y) =& e_1 \left[\frac{\partial g}{\partial r} \circ f^{-1}(x,y) \frac{x}{r} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \circ f^{-1}(x,y) \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \right] \\
&+ e_2 \left[\frac{\partial g}{\partial r} \circ f^{-1}(x,y) \frac{y}{r} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \circ f^{-1}(x,y) \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \right] \\
=& \frac{\partial g}{\partial r} \circ f^{-1}(x,y) \left[\cos\theta \cdot e_1 + \sin\theta \cdot e_2 \right] \\
&+ \frac{\partial g}{\partial \theta} \circ f^{-1}(x,y) \left[-\frac{\sin\theta}{r} e_1 + \frac{\cos\theta}{r} e_2 \right]
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (T_f \circ \operatorname{grad} \circ T_{f^{-1}}) g(r,\theta) =: \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) e_\theta$$

Struktur differenzierbarer Abbildungen

$Df(x_0)$ hat $\operatorname{rg} Df(x_0) =: p$ mit $p \leqslant \min\{m,n\}$

Rangsatz $\operatorname{rg} Df(x_0) = l$ ($\leqslant m$) $\Rightarrow$ (nach Koordinatentransformation) Für $\tilde f = T_k \circ f \circ T_{k'}^{-1}$ mit k, k' Diffeomorphismen gilt

$$\tilde f(x) = (x_1, \ldots, x_l, \tilde f_{l+1}(x), \ldots, \tilde f_n(x)) \text{ mit } \tilde f_i \in \mathcal{C}^\infty(x_0)$$

Ist aber $\operatorname{rg} Df(x) = l$ in einer Umgebung von x_0 - das ist stets der Fall für maximalen Rang -, so können wir $\tilde f_i \equiv 0$ erreichen.

D.h. Immersionen sind lokal lineare Immersionen $x \mapsto (x{,}0)$. Submersionen sind lokal lineare Submersionen $x = (x', x'') \mapsto x'$

Beispiele

1) $m = 1, n = 1$ Funktionen in $\mathbb{R}$

   kritische Punkte = Singularitäten = Nullstellen der Ableitung. Insbesondere befinden sich darunter die Extremalpunkte, Extremwerte sind kritische Werte.

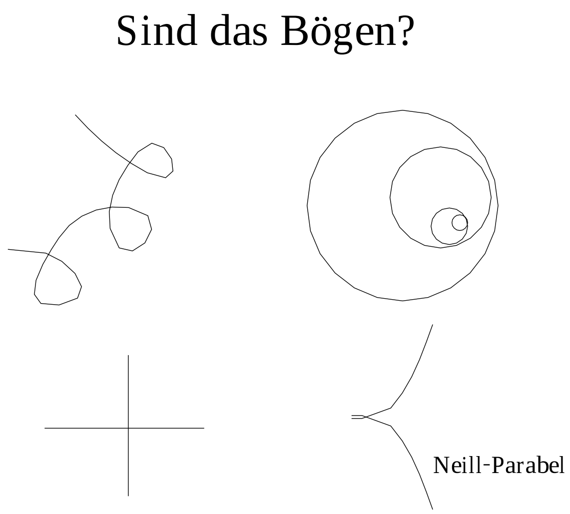
2) $m = 1 < n$

   $\mathcal{C}^\infty$-Wege: $c : (0{,}1) \to \mathbb{R}^n$
   $Dc(t) = c'(t)$ ist immer kritisch, aber singulär nur für $c'(t) = 0$.

4.3.8 Definition

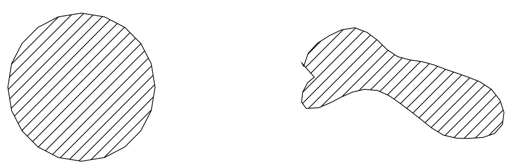
1) Ein $\mathcal{C}^\infty$- Weg $c : (0,1) \to \mathbb{R}^n$ heißt *regulär*, falls
   (a) c injektiv (b) $c'(t) \neq 0 \ \forall t \in (0,1)$.
2) Eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ heißt *regulärer Bogen*, falls es einen regulären $\mathcal{C}^\infty$-Weg $c : (0,1) \to \mathbb{R}^n$ gibt mit $c((0,1)) = B$. c heißt reguläre Parametrisierung von B.

Erläuterung



Ein $\mathcal{C}^\infty$-Weg heißt *einfach geschlossen*, wenn gilt:

1) c ist regulär.
2) c besitzt eine $\mathcal{C}^\infty$-Fortsetzung auf $[0,1]$ mit $c(0) = c(1) \neq c(t)$ für $t \in (0,1)$



4.3.9 Satz (Jordan)

Ist c in $\mathbb{R}^2$ einfach geschlossen, so hat $\mathbb{R}^2 \setminus c([0,1])$ zwei Wegzusammenhangskomponenten, von denen eine beschränkt und eine unbeschränkt ist.

($m = 2 < n$ Flächenstücke)

4.3.10 Definition

Eine Abbildung $\psi : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^n, n > 2$, heißt ein *regulär parametrisiertes Flächenstück*, wenn gilt

1) ψ ist eine Immersion in U.
2) ψ ist injektiv.
3) ψ ist *eigentlich*, d.h. $\psi^{-1}(K)$ ist kompakt in U für jedes kompakte $K \subset \mathbb{R}^n$.

Bemerkung: Ist ψ eine Immersion, dann gibt es zu jedem Punkt $x \in U$ eine Umgebung $U_x \subset U$ so, dass (1),(2),(3) für $\psi|U_x$ erfüllt sind. (Übung!)

$$\mathbb{R}^m \supset \underset{\text{offen}}{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n)$$

Wir untersuchen das Verhalten von f *lokal* (Zu jedem $x \in U$ gibt eine Umgebung U_x, sodass ...) und bis auf (lokale) Diffeomorphismen, d.h. $f \sim T_k \circ f \circ T_h$. (also bis auf Koordinatentransformationen), d.h. wir suchen Normalformen differenzierbarer Abbildungen mit *bestimmten Eigenschaften.* *VL: Mi, 2003-11-26*

Beispiele

1) f lokaler Diffeomorphismus $\iff Df(x)$ invertierbar $\forall x \in U \Rightarrow f \sim \mathrm{Id}$
2) f ist in U eine Immersion oder eine Submersion $\iff Df(x)$ hat maximalen Rang in $U \iff f \sim \mathbb{R}^m \ni x \mapsto (x,0) \in \mathbb{R}^n$ bzw. $f \sim x = (x', x'') \mapsto x' \in \mathbb{R}^n$

Bemerkung: Was heißt "invariant unter Koordinatenwechsel"?
Koordinatensystem $\sim$ Labor zur Messung natürlicher Vorgänge
Labors müssen gleichwertig sein $\sim$ Koordinatenwechsel

Invariant Galilei: alle *Gesetze* der Mechanik (solange die Geschwindigkeiten nicht zu groß sind)
Einstein: Die *Lichtgeschwindigkeit* ist immer maximal.

Invariant ist $\operatorname{rg} Df(x)$
Ist $\operatorname{rg} Df(x) < \min\{n, m\}$, dann entstehen *Singularitäten.* Auch dann gibt es Strukturtheorien ($\to$ Seminar?!)
1973 Rene Thom: Morphogenese und strukturelle Stabilitäten
$\rightsquigarrow$ "Katastrophen-Theorie", 5 Modell-Singularitäten
Differenzierbare Funktionen in mehreren Veränderlichen sind ein wichtiges Hilfsmittel zur *Konstruktion* (vs. Existenz).

Beispiel Dezimalzahl $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots, \quad a = \{a_1, \ldots, a_m\}$
Wort in $\{0,1,\ldots,9\}$ mit m Buchstaben: $\# = 10^m \Rightarrow$ Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10^m}$.
x normal $:\iff$ für jedes m-Wort ist die asymptotische Wahrscheinlichkeit in der g-adischen Entwicklung $= g^{-m}$.

E. Borel Fast alle reellen Zahlen sind normal. Aber: keine normale Zahl ist explizit bekannt.

Kandidat π! Bisher deutet jede Evidenz darauf hin, aber ...

Ein singulärer Fall $f : U \to \mathbb{R}$ hat einen kritischen und damit singulären Punkt $\iff$ $Df(x) = \operatorname{grad} f(x) = 0$, z.B. bei allen lokalen Extrempunkten. Dann ist aber (o.B.d.A. $x_0 = 0, f(x_0) = 0$)

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + Df(0)[x] + \frac{1}{2} D^2 f(0)[x,x] + o(|x|^2) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j + o(|x|^2) \end{aligned}$$

Nach orthogonalem Koordinatenwechel $x = O(y), O \in \mathcal{O}(m)$ folgt

$$D^2 f(0)[O(y), O(y)] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(0) y_i^2$$

$(\lambda_i(0)) =$ Eigenwerte von $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)$,
d.h. $f(O(y)) = \frac{1}{2} \sum \lambda_i(0) y_i^2 + o(|y|^2)$

4.3.11 Definition

Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ und $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt von f; $(\lambda_i(x_0))$ seien die Eigenwerte von $\left(\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \right)$. Dann heißt

1) $n_f(x_0) := \#\{1 \leqslant i \leqslant m;\ \lambda_i(x_0) = 0\}$ die *Nullität von* f *in* x_0.

2) $i_f(x_0) := \#\{1 \leqslant i \leqslant m;\ \operatorname{sgn} \lambda_i(x_0) < 0\}$ der *Index von* f *in* x_0.

Bemerkung $n_f(x_0)$ und $i_f(x_0)$ sind invariant unter Koordinatentransformationen $(f \mapsto T_g(f) = f \circ g)$ - Übung

4.3.12 Satz (Morse-Lemma)

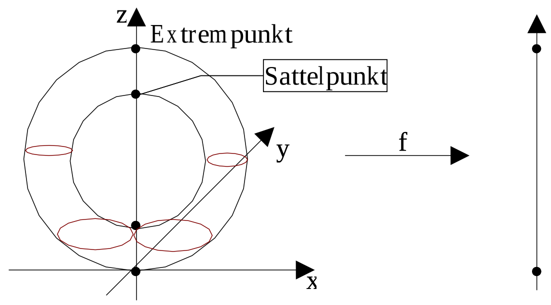
(nach Marstom Morse, ohne Beweis)

Seien f und x_0 wie in 4.3.11 mit $n_f(x_0) = 0$. Dann gibt es eine Koordinatentransformation g bei x_0, o.B.d.A. $g(0) = x_0$, sodass

$$f \circ g(y) = f(x_0) + \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{i_f(x_0)} (-y_j^2) + \sum_{j=i_f(x_0)+1}^{m} y_j^2 \right]$$

Bemerkung $\lambda_i(x_0) \rightsquigarrow \operatorname{sgn} \lambda_i(x_0), o(|y|^2) \to 0$.

Beispiel Torus



$\rightsquigarrow$ Morse-Theorie (Seminar !?)

4.3.13 Definition

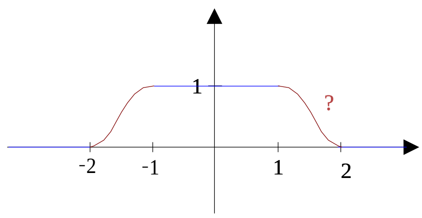
$f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ heißt *Morse-Funktion* in U, wenn $n_f(x) = 0$ für alle kritischen Punkte $x \in U$. Solche kritischen Punkte heißen *nicht entartet*.

4.3.14 Hilfssatz

Nicht entartete kritische Punkte sind isoliert in der Menge der kritischen Punkte.

Beweis: **Übung** (z.B. unter Benutzung von 4.3.12) □

Zum Schluss noch einige spezielle $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen!
Wir wollen uns "Abschneide-Funktionen" (cut-off) verschaffen:



$$\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow \phi f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \text{ und } \operatorname{supp} \phi f \in [-2{,}2]$$

1. Schritt

$$\phi_1(x) := \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$$

2. Schritt

$$\phi_2(x) = \frac{\phi_1(x)}{\phi_1(x) + \phi_1(-x+1)} \qquad \Rightarrow \phi_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

3. Schritt

$$\phi(x) := \phi_2(2+x)\cdot\phi_2(2-x) \geqslant 0$$

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow \phi(x) = 1, \quad |x| \geqslant 2 \Rightarrow \phi(x) = 0$$

4. Schritt Für $\varepsilon > 0$ hat $\phi_\varepsilon(x) := \phi(\frac{x}{\varepsilon})$ die Eigenschaften

$$\phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leqslant \varepsilon \\ 0 & \text{für } |x| \geqslant 2\varepsilon \end{cases}$$

5. Schritt In $\mathbb{R}^m$ definieren wir $\phi_m(x) := \phi(|x|^2)$. Dann ist $\phi_m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit

$$\phi_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geqslant \sqrt{2} \end{cases}$$

4.3.15 Satz

Zu jedem $x_0 \in \mathbb{R}^m$ und jeder offenen Umgebung U von x_0 existiert ein $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$ mit $\phi(x) = 1$ in einer offenen Umgebung von x_0.

Beweis Wähle $B_{2\varepsilon}(x_0) \subset U$ und $\phi(x) := \phi_m\left(\frac{x-x_0}{\varepsilon}\right)$ □

$$f(x) \cong \sum \frac{x^\alpha}{\alpha!} f^{(\alpha)}(0)$$

4.3.16 Satz (E. Borel)

Es sei $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}_+^m}$ eine beliebige Zahlenfolge in $\mathbb{R}$. Dann gibt es $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $f^{(\alpha)}(0) = a_\alpha$.

Bemerkung: Wenn f durch eine Potenzreihe dargestellt wird, dann ist die Folge der $a_j = f^{(j)}(0)$ stark eingeschränkt: $|f^{(j)}(0)| \leqslant j!C^j$ für ein $C > 0$.

VL: Mo, 2003-12-01

Spezielle differenzierbare Funktionen

1) Polynome $f \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$

$$f(x) = \sum_{\alpha\leqslant k} f_\alpha x^\alpha = \sum_{\substack{\alpha_1,\ldots,\alpha_m \\ \alpha_1+\cdots+\alpha_m\leqslant k}} f_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} \underbrace{x_1^{\alpha_1}\cdots x_m^{\alpha_m}}_{\text{Monom, homogen v. Grad}|\alpha|}$$

f heißt *homogen* vom Grad l, wenn $f(tx) = t^l f(x)$.

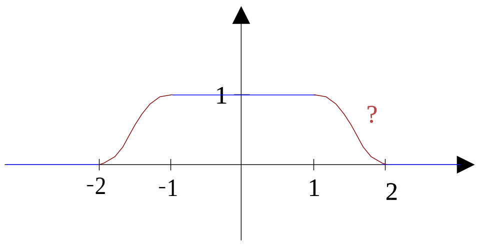
Allgemeiner heißt $f : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ homogen vom Grad $\beta \in \mathbb{R}$, falls $f(tx) = t^\beta f(x), t > 0, x \in \mathbb{R}^m$.

z.B.

1) $f(x) = |x|$ ist homogen vom Grad 1, aber kein Polynom.

2) $f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\beta}$, $x \neq 0$ ist homogen vom Grad $2-2\beta$, aber kein Polynom.

2) $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m), f \neq 0$



$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geqslant 2 \end{cases}$$

Genauer gilt $f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^m; |x| \geqslant 2\} = \mathbb{R}^m \setminus B_2(0)$.

4.3.17 Satz

Es sei $A \subset \mathbb{R}^m$ eine beliebige abgeschlossene Teilmenge. Dann gibt es $f_A \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $f_A^{-1}(0) = A$.

Beweis: $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^m} A = \mathbb{R}^m \setminus A$, $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^m} A \cap \mathbb{Q}^m = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$.
Wähle $\varepsilon_i := \min\{1, d(A, x_i)\}$,

$$d(A, x_i) := \inf_{x \in A} |x - x_i| = |x^i - x_i| > 0 \text{ für ein } x^i \in A$$

Sei $f_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $f_0^{-1}(0) = \mathbb{R}^m \setminus B_1(0)$ und $f_0 \geqslant 0$.
Mit $f_i(x) := f_0\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon_i}\right)$ ist $f_i^{-1}(0) = \mathbb{R}^m \setminus B_{\varepsilon_i}(x_i)$.
Nun setzen wir

$$f(x) := \sum_{i=1}^{\infty} C_i \left(\frac{\varepsilon_i}{2}\right)^i f_0\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon_i}\right)$$

z.z.

1) $f(x) = 0 \iff x \in A$

2) $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$

Ad 2)

$$\text{Formal } f^{(\alpha)}(x) = \sum_{i \geqslant 1} C_i \left(\frac{\varepsilon_i}{2}\right)^i f_0^{(\alpha)}\left(\frac{x - x_i}{\varepsilon_i}\right) \varepsilon_i^{-|\alpha|}$$

$$\text{und } |\sum_i| \leqslant \sum_{i \geqslant 1} \underbrace{C_i \frac{\varepsilon_i^{i-|\alpha|}}{2^i} \sup_{x \in \mathbb{R}^m} |f_0^{(\alpha)}(x)|}_{\leqslant \frac{1}{2^i} \text{ für } i \geqslant |\alpha|}$$

$$\text{Für } i \geqslant |\alpha| \text{ ist } C_i \frac{\varepsilon_i^{i-|\alpha|}}{2^i} \left\| f_0^{(\alpha)} \right\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^i} C_i \left\| f_0^{(\alpha)} \right\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^i},$$

wenn $C_i = \left(\sum_{|\alpha| \leqslant i} \left\| f_0^{(\alpha)} \right\| + 1 \right)^{-1}$.

Ad 1) Für $x \in A$ ist $f(x) = 0$. Ist $x \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^m} A$, so gibt es eine Folge $(x_{i_k}) \subset \mathcal{C}A \cap \mathbb{Q}^m$ mit $x_{i_k} \underset{k \to \infty}{\to} x, \varepsilon_{i_k} \to d(x, A) > 0$. Also ist für hinreichend großes k

$$x \in B_{\varepsilon_{i_k}}(x_{i_k}) \Rightarrow f_0 \left(\frac{x - x_{i_k}}{\varepsilon_{i_k}} \right) > 0$$

$\square$

4.3.18 Folgerung

Sind $A, B \subset \mathbb{R}^m$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$, so gibt es $f_{A,B} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $f_{A,B}^{-1}(0) = A, f_{A,B}|B = 1$.

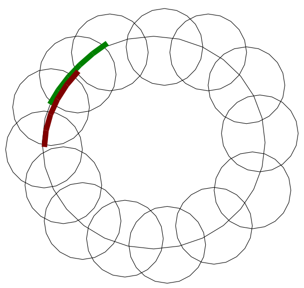
Beweis:

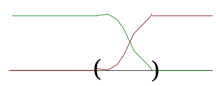
$$f_{A,B} = \frac{f_A(1 - f_B)}{f_A + f_B}$$

4.3.19 Satz (Zerlegung der Eins)

Es sei $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt und $U = (U_i)_{i=1}^N$ eine offene Überdeckung von K. Dann gibt es Funktionen $g_i \in \mathcal{C}_0^\infty(U_i)$ mit

$$1)\ 0 \leqslant g_i \leqslant 1, \quad 2) \sum_{i=1}^N g_i(x) = 1 \text{ für } x \in K.$$





Beweis: Zu $x \in K$ gibt es $\varepsilon(x) > 0$ mit $B_{2\varepsilon(x)}(x) \subset U_i$ für ein $i = i(x) \in \{1, \dots, N\}$. Dann ist $(B_{\varepsilon(x)}(x))_{x \in K}$ eine offene Überdeckung von K, besitzt also eine endliche Teilüberdeckung $\left(B_{\varepsilon(x_k)}(x_k)\right)_{k=1}^M$. Dann wählen wir eine Funktion

$$\tilde{g}_k \in \mathcal{C}_0^\infty(B_{2\varepsilon(k)}(x_k)) \text{ mit } 0 \leqslant \tilde{g}_k \leqslant 1,\ \tilde{g}_k | B_{\varepsilon(k)}(x_k) = 1;$$

insbesondere sei $\tilde{g}_k | B_{2\varepsilon(k)}(x_k) > 0$.

Weiter wählen wir eine Funktion $\tilde{g_0} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit der Eigenschaft, dass

$$\tilde{g_0}^{-1}(0) = \bigcup_{k=1}^{M} \overline{B_{\frac{3}{2}\varepsilon(k)}(x_k)} \supset \underset{\text{offen}}{V} \supset K$$

Nun setzen wir

$$\tilde{\tilde{g_k}} := \tilde{g_k}\underbrace{(\tilde{g_0} + \sum_{l\geqslant 1} \tilde{g_l})^{-1}}_{>0 \text{ auf } \mathbb{R}^m}$$

Dann gilt

$$\sum_k \tilde{\tilde{g_k}} = (\tilde{g_0} + \sum_l \tilde{g_l})^{-1} \sum_k \tilde{g_k} = 1 \text{ auf } K$$

Schließlich setzen wir

$$0 \leqslant g_i := \sum_{\operatorname{supp} \tilde{g_k} \subset U_i} \tilde{\tilde{g_k}} \leqslant 1, \ g_i \in \mathcal{C}_0^\infty(U_i)$$

$\square$

4.4 Integralrechnung im $\mathbb{R}^m$

Kurvenintegrale

Sei $c : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ ein stetiger Weg. Hat c eine Länge? Dazu wählen wir eine Zerlegung $\mathfrak{z}:\ 0 = t_0 < \ldots < t_n = 1$ und betrachten eine "Approximation an die Länge"

$$l_{\mathfrak{z}} := \sum_{i=1}^{N} |c(t_i) - c(t_{i-1})|$$

4.4.1 Definition

Ein stetiger normierter Weg heißt *rektifizierbar*, wenn $l(c) := \sup_{\mathfrak{z}} l_{\mathfrak{z}} < \infty$.

Bemerkung: Die Peanokurve ist nicht rektifizierbar!

4.4.2 Satz

Ist c ein normierter $\mathcal{C}^1$-Weg, so gilt

$$l(c) = \int_0^1 |c'(t)| dt$$

Beweis: Es sei $\mathfrak{z} = \{0 = t_0 < \ldots < t_N = 1\}$ beliebig vorgegeben. Dann wird

$$\begin{aligned}
\left| l_{\mathfrak{z}}(c) - \int_0^1 |c'(t)|dt \right| &= \left| \sum_{i=1}^N \left[|c(t_i) - c(t_{i-1})| - \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(t)|dt \right] \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^N \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left[\left| \frac{c(t_i) - c(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right| - |c'(t)| \right] dt \right| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \left| \frac{c(t_i) - c(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right| - |c'(t)| \right| dt \\
&\leqslant \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \frac{c(t_i) - c(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - c'(t) \right| dt \\
&= \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \left| \frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} [c'(u) - c'(t)]du \right| dt \\
&\overset{?}{\leqslant} \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} \underbrace{\frac{1}{t_i - t_{i-1}} \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(u) - c'(t)|du}_{\leqslant \sup_{t_{i-1} \leqslant t, u \leqslant t_i} |c'(u) - c'(t)| \leqslant \varepsilon, \text{ wenn } t_i - t_{i-1} \leqslant \delta(\varepsilon)} dt \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^N \int_{t_{i-1}}^{t_i} dt = \varepsilon
\end{aligned}$$

d.h. $l(c) = \lim_{\delta(\mathfrak{z}) \to 0} l_{\mathfrak{z}}(c) = \int_0^1 |c'(t)|dt$

$\tilde{c}(t) = c \circ \psi(t) \Rightarrow \tilde{c}'(t) = c'(\psi(t)) \cdot \psi'(t)$

$$\begin{aligned}
l(\tilde{c}) &= \int_0^1 |\tilde{c}'(t)|dt = \int_0^1 |c'|(\psi(t))|\psi'(t)|dt \\
&\overset{\psi'(t)>0}{=} \int_0^1 |c'|(\psi(t))\psi'(t)dt = \int_0^1 |c'|(u)du = l(c)
\end{aligned}$$

mit $u = \psi(t),\ 0 \leqslant u \leqslant 1,\ du = \psi'(t)dt.$

4.4.3 Definition

Zwei $\mathcal{C}^1$-Wege $c_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^m$ heißen äquivalent, falls es einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\psi : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ gibt mit $c_2 = c_1 \circ \psi$.

4.4.4 Folgerung

Sind c_1 und c_2 äquivalent, so gilt $l(c_1) = l(c_2)$.

Bemerkungen *VL: Mi, 2003-12-03*

1) Ist $\psi : [a,b] \to [0,1]$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorpsismus, so ist $l(c \circ \psi) = l(c)$. Das ist unabhängig davon, ob $\psi'(t) > 0$ oder $\psi'(t) < 0$ für alle t.

Definition

- Ist ψ wie oben, so nennen wir die $\mathcal{C}^1$-Wege $c : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ und $c \circ \psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *äquivalent*. Das ist eine Äquivalenzrelation. (!).
- c und $c \circ \psi$ heißen *orientierbar äquivalent*, falls $\psi' > 0$.
- Die Äquivalenzklasse heißt eine (orientierbare) $\mathcal{C}^1$-Kurve.

2) Die Länge $l(c)$ ist eine Eigenschaft von Kurven.

3) $c \circ \psi$ heißt auch eine *Umparametrisierung* von c.

4) Eine ausgezeichnete Parametrisierung, genannt die Parametrisierung mit Bogenlänge: Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ ein $\mathcal{C}^1$-Weg. Setze

$$s = \psi(t) := \int_a^t |c'(u)| du$$

Dann ist $0 \leqslant \psi(t) \leqslant l(c)$ und $\psi'(t) = |c'(t)| > 0$, wenn c eine reguläre Parametrisierung ist.

Also können wir $t := \psi^{-1}(s)$ und $\tilde{c} := c \circ \psi^{-1}$ bilden; dann gilt

$$\begin{aligned} |\tilde{c}'(s)| &= |c'\big(\psi^{-1}(s)\big)(\psi^{-1})'(s)| \\ &= \left| c'\big(\psi^{-1}(s)\big) \frac{1}{\psi'\big(\psi^{-1}(s)\big)} \right| \\ &= \left| c'(t) \cdot \frac{1}{|c'(t)|} \right| = 1 \end{aligned}$$

4.4.5 Hilfssatz

Jede regulär parametrisierbare Kurve kann mit Bogenlänge parametrisiert werden, d.h. es existiert ein Repräsentant (der Äquivalenzklasse)

$$c : [0, l(c)] \to \mathbb{R}^m \text{ mit } |c'(t)| = 1 \ \forall t$$

Zwischenbemerkung: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ integrierbar über $[a,b]$. $\iff$ f_i ist über $[a,b]$ integrierbar für alle $1 \leqslant i \leqslant m$.

Dann setzen wir

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b f(t)dt \right)_i &:= \int_a^b f_i(t)dt \\ \iff \left\langle \int_a^b f(t)dt, e_i \right\rangle &= \int_a^b \langle f(t), e_i \rangle dt \\ \iff e^* \left(\int_a^b f(t)dt \right) &= \int_a^b e^*\big(f(t)\big)dt \ \forall e^* \in (\mathbb{R}^m)^* \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f(t)dt\right| &= \sup_{|e^*|\leqslant 1} \left|e^*\left(\int_a^b f(t)dt\right)\right| \\ &= \sup_{|e^*|\leqslant 1} \left|\int_a^b e^*\big(f(t)\big)dt\right| \\ &\leqslant \sup_{|e^*|\leqslant 1} \int_a^b \left|e^*\big(f(t)\big)\right| dt \\ &\leqslant \sup_{|e^*|\leqslant 1} \int_a^b |e^*| \cdot |f(t)|dt \\ &\leqslant \int_a^b |f(t)|dt \end{aligned}$$

Also gilt die *fundamentale Abschätzung* auch für vektorwertige Integrale.

Anmerkung: Sie gilt auch für Hilbert- und Banach-Räume.

Was sonst können wir integrieren?

Kraft in einem Punkt zu kompensieren $= M_{\text{träge}}\cdot$ Komponente der Erdanziehungskraft in Bahnrichtung
Leistung ist $M \cdot K_{\text{bahn}} \cdot l$.
Geneigte Ebene: $c(t) = t \cdot (\sin(\alpha), \cos(\alpha)) \quad 0 \leqslant t \leqslant l$

$$K_{\text{bahn}} \stackrel{!}{=} m\cos\alpha = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} \right\rangle = \langle k, c'(t)\rangle$$

Verallgemeinerung: Sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ein Vektorfeld (z.B. Erdanziehungskraft) und c ein $\mathcal{C}^1$-Weg $[0,1] \to \mathbb{R}^m$. Dann setzen wir

$$\int_0^1 \langle f\big(c(t)\big), c'(t)\rangle dt =: \int_c f$$

Bei Umparametrisierung gilt für einen $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\psi : [a,b] \to [0,1]$:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \langle f\big(c\circ\psi(s)\big), (c\circ\psi)'(s)\rangle ds \\
&\qquad = \int_a^b \langle f\circ c\big(\psi(s)\big), c'\big(\psi(s)\big)\rangle \psi'(s) ds \\
&\qquad = \int_0^1 \langle f(t), c'(t)\rangle dt
\end{aligned}$$

(mit $t=\psi(s), dt=\psi'(s)ds, a\leqslant s\leqslant b, 0\leqslant t\leqslant 1$)

Wir ersetzen jetzt das Vektorfeld $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ durch eine Abbildung $f^*:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^{m*}$. Tatsächlich ist jede lineare Abbildung auf dem $\mathbb{R}^m$ von dieser Form, denn die Abbildung

$$\mathbb{R}^m \ni x\mapsto x^\flat \in (\mathbb{R}^m)^* \text{ mit } x^\flat(y) := \langle x,y\rangle$$

ist injektiv, denn $x^\flat=0\Rightarrow x^\flat(x)=|x|^2=0\Rightarrow x=0$; also ist $x\mapsto x^\flat$ ein Isomorphismus, weil

$$\dim\mathbb{R}^m = \dim(\mathbb{R}^m)^*$$

Wie machen wir den Unterschied kenntlich? Es seien $x_1,\dots,x_m$ unsere Standardkoordinaten, $x_i=\langle x,e_i\rangle$. Dann schreiben wir

$$\text{einen Vektor } x\in\mathbb{R}^m \text{ in der Form } x=\sum x_ie_i =: \sum x_i\frac{\partial}{\partial x_i} \text{ und}$$
$$\text{einen Covektor } x^*\in(\mathbb{R}^m)^* \text{ in der Form } x^*=\sum x_i^*e_i^* =: \sum x_i^* dx_i$$

wobei gilt $dx_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)=\delta_{ij}$.

4.4.6 Definition

Die $\mathcal{C}^k$-Abbildungen $\omega:\mathbb{R}^m\to(\mathbb{R}^m)^*$, $1\leqslant k\leqslant\infty$,

$$\omega(x)=\sum_{i=1}^m \omega_i(x)dx_i$$

heißen die *$\mathcal{C}^k$-Eins-Formen* auf $\mathbb{R}^m$.

4.4.7 Definition

Es sei ω eine $\mathcal{C}^1$-Eins-Form auf $\mathbb{R}^m$ und c eine $\mathcal{C}^1$-Kurve. Dann definieren wir das Integral von ω über c (das *Kurvenintegral*):

$$\int_c \omega := \int_0^1 \omega\big(c(t)\big)[c'(t)]dt$$

Wie kann es sein, dass das Integral $\int_c\omega$ nur von den Endpunkten abhängt? D.h.: Das Integral ist unabhängig von der $c(0)$ und $c(1)$ verbindenden Kurve *bei festem ω*.

Betrachte die $\mathcal{C}^2$-Wege

$$c : [0,1] \times [0,1] \ni (s,t) \mapsto c(s,t) \in \mathbb{R}^m$$

$$c_s(t) := c(s,t), \quad c_s(0) \equiv c_0(0), \quad c_s(1) \equiv c_0(1)$$

Dann soll gelten:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{ds}\int_{c_s} \omega = \frac{d}{ds}\int_0^1 \omega\big(c(t)\big)[c'(t)]dt \\
&= \frac{d}{ds}\int_0^1 \sum_{i=1}^m \omega_i\big(c(s,t)\big)\frac{\partial}{\partial t}c_i(s,t)dt \\
&\overset{\text{K.R.}}{=} \int_0^1 \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\big(c(s,t)\big)\frac{\partial c_j}{\partial s}(s,t)\frac{\partial c_i}{\partial t}(s,t) + \omega_i\big(c(s,t)\big)\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}c_i(s,t)\right] dt \\
&= \int_0^1 \left[\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\frac{\partial c_j}{\partial s}\frac{\partial c_i}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\frac{\partial c_j}{\partial t}\frac{\partial c_i}{\partial s}\right] dt \\
&= \int_0^1 \sum_{i,j=1}^m \left[\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\right] c(s,t)\frac{\partial c_i}{\partial t}\frac{\partial c_j}{\partial s}(s,t)dt
\end{aligned}$$

Beobachtung: Das Kurvenintegral ist sicher dann unabhängig von Variationen von c mit festen Endpunkten, wenn die *Integrabilitätsbedingungen*

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

überall erfüllt sind.

Sicher dann erfüllt, wenn

$$\omega_i = \frac{\partial g}{\partial x_i} \iff \omega = dg = \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}dx_i$$

VL: Mo, 2003-12-08

Kurvenintegral

$$\mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^m \text{ Vektorfeld}$$
$$\mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^{m*} \text{ 1-Form}$$

$\langle e_i \rangle$ Basis von $\mathbb{R}^m$, $e_i^*(e_j) = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

$$f(x) = \sum_i f_i(x)\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i}}_{e_i}, \quad \omega(x) = \sum_i \omega_i(x)\underbrace{dx_i}_{e_i^*}$$

$$\int_c \omega = \int_0^1 \omega(c(t))(c'(t))dt \in \mathbb{R} \text{ mit } c: \ [0,1] \to \mathbb{R}^m$$

Notwendige Bedingung für $E(c) = E(c(0), c(t))$ ist

$$\text{Integrabilitätsbedingung (IB): } \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \ \forall i,j$$

1) Wenn $\omega_i = \frac{\partial g}{\partial x_i}$ mit $g \in \mathcal{C}^\infty(U) \Rightarrow$ IB erfüllt.

   In diesem Fall heißt ω ein konservatives oder Potentialfeld.

   Beispiel: Für das Gravitationsfeld ist $\omega(x, y, z) = -zdz$.

2) Gilt auch die Umkehrung? D.h. wenn das Integral in geeigneter Umgebung unabhängig ist vom Weg, ist dann ω ein Potentialfeld?

Annahme U ist eine Kugel $B_1(0)$; $c_x(t) = tx, t \in [0,1]$

Versuch

$$g(x) = \int_{c_x} \omega = \int_0^1 \sum_{i=1}^m \omega_i(tx)c_i'(t)dt = \sum_{i=1}^m \int_0^1 \omega_i(tx)x_i dt$$

Dann wird

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x_j}(x) &= \sum_{i=1}^m \int_0^1 \left[\delta_{ij}\omega_i(tx) + tx_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(tx)\right] dt \\
&= \int_0^1 \left[\omega_j(tx) + t \sum_i x_i \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}(tx)\right] dt \\
&\overset{IB}{=} \int_0^1 \left[\omega_j(tx) + t \sum_i x_i \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}(tx)\right] dt \\
&= \int_0^1 \left[\omega_j(tx) + t \frac{\partial \omega_j}{\partial t}(tx)\right] dt \\
&= \int_0^1 [\omega_j(tx) - \omega_j(tx)]\, dt + t\omega_j(tx)\Big|_0^1 \\
&= \omega_j(x)
\end{aligned}$$

4.4.8 Satz

$\omega : U \to \mathbb{R}^{m*}$ erfülle in U die Integrabilitätsbedingungen. Dann existiert in jeder Kugel $B_\varepsilon(x) \subset U$ ein Potential $g_{B_\varepsilon(x)}$ mit $\omega = dg_{B_\varepsilon(x)}$. Insbesondere ist ω in $B_\varepsilon(x)$ wegunabhängig integrierbar.

$$\operatorname{grad} g(x) = \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad dg^{(0)}(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) dx_i$$

Wir schreiben

$$d\omega^{(1)} := \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$$

Warum nur in Kugeln?

$$\mathbb{C} \simeq (\mathbb{R}^2, \cdot),\ f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = f(x+iy) = f_1(z) + if_2(z)$$
$$c:\ [0{,}1] \ni t \mapsto c_1(t) + ic_2(t) \in \mathbb{C}$$

Komplexes Kurvenintegral hat Werte in $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\int_c f(z)dz &= \int_0^1 f(c(t)) \cdot c'(t)dt \\ &= \int_0^1 \{[f_1(c(t))c_1'(t) - f_1(c(t))c_2'(t)] \\ &\quad + i[f_1(c(t))c_2'(t) + f_2(c(t))c_1'(t)]\}dt \\ &=: \int_c \omega_i + i\int_c \omega_2,\ \text{wobei}\end{aligned}$$

$$\omega_1(z) = f_1(z)dx - f_2(z)dy,\ \omega_2(z) = f_2(z)dx + f_1(z)dy$$

Dann bedeutet IB:

$\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial f_2}{\partial x},\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}$ Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichungen

$f = (f_1, f_2)$ differenzierbar & CR $\iff$ f $\mathbb{C}$-differenzierbar
$\Rightarrow$ Kurvenintegrale über komplexe differenzierbare Funktionen sind *lokal* wegunabhängig.

Beispiel

$$\begin{aligned} c(t) &= (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) \quad & c'(t) &= 2\pi(-\sin 2\pi t, \cos 2\pi t),\ t \in [0{,}1] \\ c(t) &= (x(t), y(t)) \quad & c'(t) &= 2\pi(-y(t), x(t))\end{aligned}$$

$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar z}{z\bar z} = \frac{\bar z}{|z|} = \frac{x-iy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
Berechne $\omega_1(x,y) = (x,y),\ \omega_2(x,y) = (-y,x)$.

Integration in $\mathbb{R}^m$

Betrachte $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m) \Rightarrow \operatorname{supp} f \subset Q_m(a) := \prod_{i=1}^m [-a,a]$
Definiere

$$\begin{aligned} f_{(1)}(x_2, \ldots, x_m) &:= \int_{-a}^a f(x_1, \ldots, x_m)dx_1 \\ f_{(2)}(x_3, \ldots, x_m) &:= \int_{-a}^a f_{(1)}(x_2, \ldots, x_m)dx_2 \\ &\vdots \\ f_{(m)} &:= \int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, \ldots, x_m)dx_1dx_2\cdots dx_m = \int_{-a}^a f_{(m-1)}(x_m)dx_m \\ &= \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a f(x_1, \ldots, x_m)dx_1\cdots dx_m\end{aligned}$$

Eigenschaften des Integrals

1) Die Abbildung

$$I_0 : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R},\ I_0(f) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx \text{ (Abkürzung!)}$$

ist ein *lineares Funktional*.

2) I_0 ist *monoton* in dem Sinne, dass $\underbrace{f \leqslant g}_{f(x)\leqslant g(x)\ \forall x} \Rightarrow I_0(f) \leqslant I_0(g)$

3) I_0 ist *translationsinvariant*, d.h.

$$I_0(f \circ \tau_a) = I_0(f),\ \tau_a(x) = x - a$$

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} \cdots \int_{-a}^{a} & f \circ \tau_b(x_1, \ldots, x_m)dx_1 \cdots dx_m \\ &= \int_{-a}^{a} \cdots \int_{-a}^{a} f(x_1 - b_1, x_2 - b_2, \ldots, x_m - b_m)dx_1 \ldots dx_m \\ &= \int f(x)dx\end{aligned}$$

4) Sei $\operatorname{supp} f = K$ und $\phi_K \in \mathcal{C}_0$ so, dass $0 \leqslant \phi_K \leqslant 1$ und $\phi_K|K = 1$ (existiert immer!). Dann gilt

$$\int f(x)dx \leqslant \|f\|_\infty \int \phi(x)dx,\ \text{ weil } |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \phi(x)$$

4.4.9 Satz

Es sei $I : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften 1), 2), 3). Dann gibt es eine Konstante $C \geqslant 0$ so, dass

$$I = CI_0$$

Beweisidee $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ fest. Dann benutzen wir eine Zerlegung der Eins von der Form $g_i(x) = g(\frac{x - x_i(\varepsilon)}{\varepsilon})$ auf einer Umgebung von K mit $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m),\ 0 \leqslant g \leqslant 1,\ \sum_i g_i(x) = 1$ auf K. Dieses g und die x_i müssen gut gewählt werden!

$$\begin{aligned}I(f) &\overset{(1)}{=} \sum_i I(g_i f) = \sum_i [I(g_i f(x_i)) + I(g_i(f(x) - f(x_i)))] \\ &= \sum_i f(x_i)I(g_i) = \sum_i f(x_i)I(g(\frac{x}{\varepsilon}))\end{aligned}$$

VL: Mi, 2003-12-10

Einige Erinnerungen und Definitionen:

$$\chi_{[a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eine *Treppenfunktion* auf $\mathbb{R}$ ist eine Funktion der Form

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \chi_{[a,b)} \qquad \text{wobei } b_j \leqslant a_{j+1}$$

Dann ist $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^{k} [a_j, b_j]$ kompakt.

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbb{R}) &= \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; f \text{ Treppenfunktion } \} \\ &= \mathcal{T}_0(\mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{T}(\mathbb{R}); \operatorname{supp} f \text{ kompakt } \} \end{aligned}$$

Ist $f \in C_0(\mathbb{R})$, so gibt es eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Regelfunktion*, wenn f der in $\mathbb{R}$ gleichmäßige Limes von Treppenfunktionen ist. Gesamtheit: $\mathcal{R}(\mathbb{R})$.

Achtung: $\mathcal{R}_0(\mathbb{R}) \subsetneqq \mathcal{R}(\mathbb{R})$ (Beispiel: $f(x) = e^{-x^2}$)

Verallgemeinerung auf m Dimensionen:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbb{R}^m) &= \text{ lineare Hülle von } \{ g(x) = g_1(x_1) \cdots g_m(x_m) \text{ mit } g_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}) \} = \mathcal{T}_0(\mathbb{R}^m) \\ \mathcal{R}(\mathbb{R}^m) &= \left\{ f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}; f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ gleichmäßig für eine Folge } (f_n) \subset \mathcal{T}(\mathbb{R}^m) \right\} \\ \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m) &= \{ f \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^m); \operatorname{supp} f \text{ kompakt } \} \supset C_0(\mathbb{R}^m) \quad (!) \end{aligned}$$

Für $f \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m)$ setze

$$f_{(1)}(\underbrace{x_2; \dots; x_m}_{x^{(m-1)} \in \mathbb{R}^{m-1}}) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \underbrace{x_2, \dots, x_m}_{x^{(m-1)} \in \mathbb{R}^{m-1}}) dx_1$$

$x_{(k)} = (x_1, \dots, x_k)$, $x = (x_{(k)}, x^{(m-k)})$

induktiv:

$$\begin{aligned} f_{(k+1)}(x^{(m-k-1)}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) dx_1 \right) dx_2 \cdots dx_{k+1} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(k)}(x_{k+1}, \dots, x_m) dx_{k+1} \end{aligned}$$

Zu zeigen: Jedes $f_{(k)}$ ist in $\mathbb{R}_0(\mathbb{R}^{m-k})$. Es sei $(f_n) \subset \mathcal{T}(\mathbb{R}^m)$ mit $\|f - f_n\|_\infty \to 0$. Dann ist auch $f_{n(k)}$ eine Treppenfunktion – nach Definition! – und es gilt

$$(*) \qquad \left| f_{(k)}(x^{(m-k)}) - f_{n(k)}(x^{(m-k)}) \right| \leqslant \|f - f_n\|_\infty d(\operatorname{supp}(f - f_n))^k$$

(m-dimensionale Version der *fundamentalen Ungleichung*)

Dazu setzen wir für $K \subset \mathbb{R}^m$ beschränkt: $d(K) := \sup_{x,y \in K} |x - y| < \infty$

Beweis von $(*)$:

$$\left| f_{(1)}(x^{(m-1)}) - f_{n(1)} x^{(m-1)}) \right| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x_1, \dots, x_m) - f_n(x_1, \dots, x_m))\, dx_1 \right|$$

$\operatorname{supp}(f - f_n)$ ist kompakt nach Voraussetzung, und wir können erreichen, dass

$$d\big(\operatorname{supp}(f - f_n)\big) \leqslant 2d(\operatorname{supp} f) + 1$$

z.B. dadurch, dass wir $\operatorname{supp} f$ in ein Quadratgitter mit hinreichend kleiner Basislänge legen. (!)

Also gilt nach der fundamentalen Ungleichung:

$$\left| f_{(1)}(x^{(m-1)}) - f_{n(1)} x^{(m-1)}) \right| \leqslant \|f - f_n\|_\infty (2d(\operatorname{supp} f) + 1)$$

Also folgt induktiv:

$$\begin{aligned} &\left| f_{(k+1)}(x^{(m-k-1)}) - f_{n(k+1)}(x^{(m-k-1)}) \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f_{(k)}(x_{k+1}, \dots, x_m) - f_{n(k)}(x_{k+1}, \dots, x_m)\big)\, dx_{k+1} \right| \\ &\leqslant \|f - f_n\|_\infty (2d(\operatorname{supp} f) + 1) \qquad \text{nach fund. Ungl. und IV} \end{aligned}$$

$\square$

4.4.10 Definition

Für $f \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m)$ definieren wir

$$f_{(1)}(x^{(m-1)}) \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^{m-1}), \dots, f_{(k)}(x^{(m-k)}) \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^{m-k}),$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx := f_{(m)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(m-1)}(x_m)dx_m \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\cdots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_m)dx_1 \right) dx_2 \cdots \right) dx_m \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

4.4.11 Satz

Das Integral für $\mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m)$ berechnen wir mit:

$$I : \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m) \ni f \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx = I(f) \in \mathbb{R}$$

Dann hat I die folgenden Eigenschaften:

(1) I ist linear

(2) I ist monoton

(3) I ist translationsinvariant, d.h. für alle $a \in \mathbb{R}^m$, $\tau_a(x) = x - a$ gilt:

$$I(f \circ \tau_a) = I(f)$$

4.4.12 Hilfssatz

Für $f \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m)$ gilt:

$$(4) \quad |I(f)| \leqslant \|f\|_\infty d(\operatorname{supp} f)^m$$

Beweis verläuft wie oben. □

Integration in mehreren Veränderlichen

Zwei Probleme:

1) Was wird aus der Substitutionsregel?

2) Was wird aus der partiellen Integration?

$\longrightarrow$ Differentialformen
Antwort: *Satz von Stokes*

First things first: 1) Die Transformationsformel (in $\mathbb{R}$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \circ \psi(x)\psi'(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy$$

(Mit $y = \psi(x), dy = \psi'(x)dx, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, C^1 -$ Diffeo)

Einfachstes Beispiel: Lineare Diffeomorphismen, d.h.: (mit $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$)

$$\begin{aligned}\psi(x) &= Ax + b \qquad \text{mit } A \in GL(m, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^m \\ &= A(x + A^{-1}b) = A \circ \tau_{-A^{-1}b}(x)\\ \Rightarrow I(f \circ \psi) &= I(f \circ A \circ \tau_{-A^{-1}b}) = I(f \circ A)\end{aligned}$$

Spezialfall:

$$A(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_i \neq 0 \ \forall i$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow I(f \circ \psi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_m x_m) dx_1 \cdots dx_m \\ &= \frac{1}{\prod |\lambda_i|} I(f)\end{aligned}$$

$$\text{oder } \int_{\mathbb{R}^m} f \circ A(x) |\det A| dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) dx$$

Annahme: Das ist richtig für alle A.

$$\psi(x) = \psi(x_0) + D\psi(x_0)[x - x_0] + o(|x - x_0|)$$

Also sollte gelten (!)

$$\int_{\mathbb{R}^m} f \circ \psi(x) |\det D\psi(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) dy \qquad \textit{Transformationsformel}$$

4.4.13 Hilfssatz

Sei $J : \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (1), (2) und (3) aus 4.4.11. Dann gibt es eine Konstante $c = c_J \leqslant 0$, sodass $J = cI$.

Beweis: Vorbemerkung: Ist $f \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m)$, so gibt es einen Würfel

$$Q_a^m(x) = \prod_{i=1}^m [x_i - a_i, x_i + a_i)$$

mit $a = \frac{1}{2} d(\operatorname{supp} f)$, sodass $f = \chi_{Q_a(x)} f$. Also gilt:

$$-\|f\|_\infty \chi_{Q_a(x)} \leqslant f \leqslant \|f\|_\infty \chi_{Q_a(x)}, \text{ d.h. } |f| \leqslant \|f\|_\infty \chi_{Q_a(x)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow J(f) &\leqslant J\left(\|f\|_\infty \chi_{Q_a(x)}\right) \\ &\leqslant \|f\|_\infty J\left(\chi_{Q_a(x)}\right) \\ &= c_J d(\operatorname{supp} f) \|f\|_\infty \end{aligned}$$

Induktion über m:

$m = 1$ Es sei f eine Treppenfunktion

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{[a_i, b_i)} = \sum_i \alpha_i \chi_{[-\varepsilon_i, \varepsilon_i)} \circ \tau_{-x_i}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad J(f) &\overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^k \alpha_i J(\chi_{[-\varepsilon_i, \varepsilon_i)} \circ \tau_{-x_i} \\ &\overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^k \alpha_i J(\chi_{[-\varepsilon_i, \varepsilon_i)}); \\ I(f) &= \sum_{i=1}^k 2\alpha_i \varepsilon_i \end{aligned}$$

Es bleibt also $J(\chi_{[-\varepsilon_i, \varepsilon_i)})$ zu berechnen!

$$\begin{aligned} \chi_{[-2\varepsilon, 2\varepsilon)} &= \chi_{[-\varepsilon, \varepsilon)} \circ \tau_\varepsilon + \chi_{[-\varepsilon, \varepsilon)} \circ \tau_{-\varepsilon} \\ \Rightarrow J(\chi_{[-2\varepsilon, 2\varepsilon)}) &= 2J(\chi_{[-\varepsilon, \varepsilon)}) \end{aligned}$$

Einfacher:

$$\varepsilon_i = b_i - a_i \qquad \Rightarrow \qquad f = \sum_i \alpha_i \chi_{[0,\varepsilon_i)} \circ \tau_{a_i}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow J(f) &= \sum_i \alpha_i J(\chi_{[0,\varepsilon_i)}) \\
J(\chi_{[0,n\varepsilon)}) &= J\left(\sum_{l=1}^{n-1} \chi_{[0,\varepsilon)} \circ \tau_{-l\varepsilon_i} + \chi_{[0,\varepsilon)}\right) \\
&= \sum_{l=1}^{n} J(\chi_{[0,\varepsilon)}) = nJ(\chi_{[0,\varepsilon)}) \Rightarrow J(\chi_{[0,\frac{p}{q})}) = \frac{p}{q} J(\chi_{[0,1)})
\end{aligned}$$

Wähle $r_n, s_n \in \mathbb{Q}$ mit $0 < r_n \nearrow x \swarrow s_n$ für $n \to \infty$, $x > 0$.

$$\begin{aligned}
&\overset{(2)}{\Rightarrow} J(\chi_{[0,r_n)}) \leqslant J(\chi_{[0,x)}) \leqslant J(\chi_{[0,s_n)}) \\
&\quad r_n J(\chi_{[0,1)}) \leqslant J(\chi_{[0,x)}) \leqslant s_n J(\chi_{[0,1)})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad J(\chi_{[0,x)}) = x \cdot J(\chi_{[0,1)}).$$

Damit folgt $J(f) = J(\chi_{[0,1)}) \cdot I(f)$ für f Treppenfkt. $\mathcal{T}(\mathbb{R})$ und für $f \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
J(f) &\overset{(4)}{=} \lim_{n\to\infty} J(f_n) \\
&= J(\chi_{[0,1)}) \cdot \lim_{n\to\infty} I(f_n) = J(\chi_{[0,1)}) I(f)
\end{aligned}$$

(Das beendet den Beweis für den Induktionsanfang.)

Sei die Behauptung bewiesen für $m - 1 \geqslant 1$ Dann wähle $g \in \mathcal{T}(\mathbb{R}), g \geqslant 0, g \neq 0$, und $\tilde{g} \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^{(m-1)})$. Betrachte nun

$$Jg(\tilde{g}) = J(g(x_1)\tilde{g}(x_2, \ldots, x_m))$$

Dann erfüllt Jg die Bedingungen (1), (2) und (3) in $\tilde{g}$!

Also gilt nach Induktionsvoraussetzung, dass $Jg = c(g) I^{\mathbb{R}^{m-1}}$. Aber $c(g)$ erfüllt ebenfalls (1), (2), (3), also ist $c(g) = cI^1$. Also wird $J(g\tilde{g}) = I^1(g) I^{m-1}(\tilde{g}) c = cI(g\tilde{g})$.

$$\Rightarrow J(g) = cI(g) \text{ für alle } g \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^m)$$

und damit

$$J(g) = cI(g) \text{ für alle } g \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m)$$

(wegen der Vorbemerkung.) □

Fundamentale Eigenschaften

VL: Mo, 2003-12-15

1) Linearität

2) Monotonie

3) Translationsinvarianz

4) $|\int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx| \leqslant \|f\|_\infty \cdot d(\operatorname{supp} f)^m$

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \right) \dots dx_m \right)$$

Also: falls $f(x_1, \dots, x_m) = f_1(x_1) \cdots f_m(x_m)$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx = \prod_{i=1}^{m} \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x_i) dx_i$$

1) Substitutionsregel?

2) Partielle Integration?

Problem 1

Einfachste Substitution:
$\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus, $f \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \circ \psi(x) \psi'(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

a1) Einfachste Substitution $\psi(x) = Ax$ mit $A \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$. Was ist $\int_{\mathbb{R}^m} f(Ax)dx$?

$$Ae_i = \lambda_i e_i,\ \lambda_i \neq 0\ \forall i \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^m} f(Ax)dx = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^m} f$$

a2) Vermutung

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(Ax) |\det A| dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) dy$$

$y = Ax,\ dy = |\det A| dx$

Beobachtung Wir betrachten die Abbildung

$$I_A: \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m) \ni f \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(Ax)dx = I(f \circ A)$$

Dann gilt 1),2), aber 3)?
Zu prüfen ist für $a \in \mathbb{R}^m$: $I_A(f \circ \tau_a) = I_A(f)$?
$\tau_a \circ A(x) = Ax - a = A(x - A^{-1}a) = A \circ \tau_{A^{-1}a}(x)$ impliziert

$$\begin{aligned} I_A(f \circ \tau_a) &= I(f \circ \tau_a \circ A) = I(f \circ A \circ \tau_{A^{-1}a}) \\ &\overset{wg.3}{=} I(f \circ A) = I_A(f) \end{aligned}$$

a3) Wir haben schon bewiesen, dass jetzt folgt $I_A = c(A) \cdot I$ mit $c(A) > 0$. Also bleibt die Konstante zu berechnen!

a4) Spezialfälle

1) Wenn $Ae_i = \lambda_i e_i$, so gilt $c(A) = |\det A|^{-1}$.

2) Wenn A orthogonal, dann

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(Ax)dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx, \text{ falls } f(x) = \tilde{f}(|x|)$$

d.h. $c(A) = 1 = |\det A|^{-1}$.

Aus früheren Überlegungen folgt genauer

4.4.14 Hilfssatz

Es gibt eine Funktion $j \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit den Eigenschaften

1) $j \geqslant 0$

2) $j(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geqslant 2 \end{cases}$

3) $j(x) = \tilde{j}(|x|) \quad [\Rightarrow j(Ax) = j(x) \text{ für } A^*A = I]$

Beweis: Wir haben so ein j_1 für $m = 1$ konstruiert; für beliebiges m setzen wir $j_m(x_1, \ldots, x_m) = j_1(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_m^2})$

Bemerkung: Wir normieren jetzt j durch die Forderung $\int_{\mathbb{R}^m} j(x)dx = 1$ (statt 2) und setzen $j_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-m} j(\frac{x}{\varepsilon})$

Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} j_\varepsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} j(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot \varepsilon^{-m} dx = \int_{\mathbb{R}^m} j(x)dx = 1$$

a5) Der allgemeine Fall

Sind $A_1, A_2 \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$, so wird

$$I_{A_1 A_2}(f) = I_{A_2}(f \circ A_1) = c(A_2)I(f \circ A_1) = c(A_2)I_{A_1}(f) = c(A_2)c(A_1)I(f)$$

Damit ist der allgemeine Fall erledigt, wenn jede Matrix A geschrieben werden kann als Produkt von Diagonalmatrizen und orthogonalen Matrizen.

A^* adjungierte Matrix $\iff \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$. B heißt symmetrisch, wenn $B^* = B$. Jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar:

$$\exists O \in \mathcal{O}(m): \ O^*BO = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

$A \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ beliebig $\Rightarrow A^*A$ ist symmetrisch und positiv definit. $\Rightarrow \exists$ Orthonormalbasis $(f_j)_{j=1}^m$ und $(\lambda_j^2)_{j=1}^m$, $\lambda_j > 0$, sodass $A^*Af_j = \lambda_j^2 f_j$. Definiere $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ durch $|A|f_j = \lambda_j f_j$, dann ist $O^*|A|O = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Weiter gilt, dass $S := A|A|^{-1}$ orthogonal ist, denn $S^*S = |A|^{-1}A^*A|A|^{-1} = |A|^{-1}|A|^2|A|^{-1} = I \Rightarrow A = A|A|^{-1}|A| = SOD(\lambda)O^*$

4.4.15 Hilfssatz

Für $A \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{R}_0$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(Ax)\, |\det A|\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x) dx$$

Folgerung $\int_{\mathbb{R}^m} f$ ist unabhängig von der Reihenfolge der Integrationen.

Beweis Für $\sigma \in S_m$ setzen wir $A_\sigma e_i := e_{\sigma(i)} \Rightarrow A_\sigma$ orthogonal $\Rightarrow$ Beh.

b) Der allgemeine Fall

4.4.16 Satz

Für $\psi:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus und $f \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^m)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(\psi(x)) |\det D\psi(x)| = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) dy$$

Beweis $K = \operatorname{supp} f$ kompakt, $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ es gibt eine Zerlegung der Eins $(g_i)_{i=1}^L$ für K (siehe 4.3.19), die "ε-klein" ist, d.h.

1) $0 \leqslant g_i \leqslant 1$

2) Zu jedem i gibt es ein $x_i \in \mathbb{R}^m$ mit $\operatorname{supp} g_i \subset B_\varepsilon(x_i)$.

3) $\sum_{i=1}^L g_i(x) = 1$ für $x \in K$

4) $\operatorname{supp} g_i \subset B_{2d(K)}(x_0)$ (!)

5) $\left|\frac{\partial}{\partial x_j} g_i(x)\right| \leqslant \frac{c}{\varepsilon}$ $\forall i, j \in \mathbb{N}; x \in K$ (!)

Jetzt schreiben wir (mit $\psi(x) = \psi(x_i) + D\psi(x_i)[x - x_i] + o(|x - x_i|)$)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} f(\psi(x))\, |\det D\psi(x)|\, dx &= \sum_{i=1}^L \int_{\mathbb{R}^m} g_i(\psi(x)) f(\psi(x)) |\det D\psi(x)| dx \\
&= \sum_{i=1}^L \int_{\mathbb{R}^m} g_i f(\underbrace{\psi(x_i) + D\psi(x_i)[x - x_i]}_{y})\, |\det D\psi(x_i)|\, dx + R_\varepsilon \\
&= \sum_{i=1}^L \int_{\mathbb{R}^m} g_i f(y) dy + R_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) dy + R_\varepsilon
\end{aligned}$$

d.h. der Satz ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass $|R_\varepsilon| \leqslant c\varepsilon$.

Nun ist

$$\begin{aligned}
|R_\varepsilon| =& \Big| \sum_{i=1}^{L} \int_{\mathbb{R}^m} \big[g_i f(\psi(x)) \, |\det D\psi(x)| \\
&- g_i f\big(\underbrace{\psi(x_i) + D\psi(x_i)[x - x_i]}_{\psi_i(x)}\big) \, |\det D\psi(x_i)| \, \big] dx \Big| \\
\leqslant& \left| \sum_{i=1}^{L} \int_{\mathbb{R}^m} \{ g_i f(\psi(x)) - g_i f(\psi_i(x)) \} \, |\det D\psi(x)| \, dx \right| \\
&+ \left| \sum_{i=1}^{L} \int_{\mathbb{R}^m} g_i f(\psi_i(x)) \, \{ |\det D\psi(x)| - |\det D\psi(x_i)| \} \, dx \right| \\
=:& \, I + II
\end{aligned}$$

Wähle $\delta > 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ so, dass für alle $x, y \in B_{2d(K)}(x_0)$ gilt $\big| |\det D\psi(x)| - |\det D\psi(y)| \big| \leqslant \delta$, wenn $|x - y| \leqslant \varepsilon$, wegen gleichmäßiger Stetigkeit auf kompakten Mengen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|II| =& \left| \sum_{i=1}^{L} \int_{\mathbb{R}^m} g_i f(\psi_i(x)) \big(|\det D\psi(x) - |\det D\psi(x_i)| \big) dx \right| \\
\leqslant& \left| \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^{L} g_i |f|(\psi_i(x)) \big| |\det D\psi(x)| - |\det D\psi(x_i)| \big| dx \right| \\
\overset{(4)}{\leqslant}& \, \|f\|_\infty c \delta (2d(K))^m \ \ (!)
\end{aligned}$$

Zu I Abzuschätzen ist (mit dem MWS 4.1.24)

$$\begin{aligned}
&\big| g_i f(\psi(x)) - g_i f(\psi_i(x)) \big| \\
\leqslant& |\psi(x) - \psi_i(x)| \sup_{0<t<1} \Big| D g_i f\big(t\psi(x) + (1-t)\psi_i(x)\big) \Big| \\
=& |\psi(x) - \psi(x_i) - D\psi(x_i)[x - x_i]| \sup_{0<t<1} \Big| \big((Dg_i) f + g_i (Df) \big) \\
&\big(t\psi(x) + (1-t)\psi(x_i) + (1-t) D\psi(x_i)[x - x_i] \big) \Big| \\
\leqslant& |\psi(x) - \psi(x_i) - D\psi(x_i)[x - x_i]| \frac{c}{\varepsilon} \text{ mit dem speziellen MWS} \\
\leqslant& |x - x_i| \sup_{0<t<1} \big| D\psi(tx + (1-t)x_i) - D\psi(x_i) \big| \frac{c}{\varepsilon} \\
\leqslant& c\delta,
\end{aligned}$$

wenn $|D\psi(x) - D\psi(y)| \leqslant \delta$ für $x, y \in B_{2d(K)}(x_0), \ |x - y| \leqslant \varepsilon$.

VL: Mi, 2003-12-17 Wir haben $f \in \mathcal{C}_0^1$ benutzt! $\rightsquigarrow f \in \mathcal{R}_0$!

Transformationsformel Sei $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus und $f \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^m)$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} f \circ \psi(x) |\det D\psi(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) dy.$$

Erweiterungen

1) Es genügt, ψ wie folgt anzunehmen: ψ ist ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus $\mathbb{R}^m \supset \underset{\text{offen}}{O} \to \psi(O) \subset \mathbb{R}^m$ mit $\psi^{-1}(\operatorname{supp} f) \subset O$. Die Zerlegung der Eins, $(g_i)_{i=1}^L$, kann so konstruiert werden, dass zu einer gegebenen Menge, O, $\operatorname{supp} g_i \subset O \quad \forall i$. Dazu betrachte alle Kugeln $U_x := B_{d(x,\mathcal{C}_{\mathbb{R}^m}(O))}(x)$. Dann gilt $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{x\in\operatorname{supp} f} U_x \subset O$. Da $\operatorname{supp} f$ kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\operatorname{supp} f \subset \bigcup_{i=1}^k U_{x_i} \subset O$. Dann ist $\varepsilon \leqslant \min\limits_{1\leqslant i\leqslant k} d(x_i, \mathcal{C}_{\mathbb{R}^m}(O))$.

2) Wir wollen aber die Transformationsformel für $f \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m)$! Wir erinnern uns jetzt an die Funktion $j^{(1)} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \leqslant j^{(1)}$, $j^{(1)}(x) = 0$ für $|x| \geqslant 2$, $\int_{-\infty}^{\infty} j^{(1)}(x)dx = 1$.

   Dann setzen wir $j_\varepsilon^{(1)}(x) := \varepsilon^{-1} j^{(1)}(\frac{x}{\varepsilon})$. Daraus folgt $\operatorname{supp} j_\varepsilon^{(1)}(x) \subset B_{2\varepsilon}^{(1)}(0)$, $\int_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon^{(1)}(x)dx = 1$.
   Für $m \in \mathbb{N}$ setzen wir dann $j_\varepsilon^{(m)}(x_1,\ldots,x_m) := j_\varepsilon^{(1)}(x_1)\cdots j_\varepsilon^{(1)}(x_m)$.
   $\Rightarrow 0 \leqslant j_\varepsilon(x) := j_\varepsilon^{(m)}(x)$, $\int_{\mathbb{R}^m} j_\varepsilon(x)dx = 1$,

   $\operatorname{supp} j_\varepsilon \subset B_{2\varepsilon\sqrt{m}}(0)$: Wenn $\left|\frac{x_i}{\varepsilon}\right| > 2$ für ein i, dann ist $j_\varepsilon(x) = 0$, d.h. $j_\varepsilon(x) > 0$ verlangt $\left|\frac{x_i}{\varepsilon}\right| \leqslant 2 \Rightarrow |x_i|^2 \leqslant 4\varepsilon^2 \Rightarrow |x|^2 \leqslant 4m\varepsilon^2$, $|x| \leqslant 2\varepsilon\sqrt{m}$.

4.4.17 Definition

Wir definieren den *Glättungsoperator*

$$J_\varepsilon f(x) := \int_{\mathbb{R}^m} j_\varepsilon(x-y)f(y)dy$$

für $f \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m)$.

1) Wir vermuten, dass $J_\varepsilon f$ in $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$! Ist f eine Treppenfunktion, so ist f Linearkombination von Funktionen der Form $f_0 = \prod_{i=1}^m \chi_{[a_i,b_i)} \Rightarrow$

$$J_\varepsilon f_0(x) = \prod_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon^{(1)}(x_i - y_i)\chi_{[a_i,b_i)}(y_i)dy_i = \prod_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} j_\varepsilon^{(1)}(x_i-y_i)dy_i.$$

   Nach der Differentialrechnung genügt es zu zeigen, dass alle partiellen Ableitungen stetig sind, d.h. es genügt zu zeigen, dass

$$\underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^k \int_a^b j_\varepsilon^{(1)}(x-y)dy}_{\text{induktiv } = \int_a^b \varepsilon^{-k-1}(j^{(1)})^{(k)}(\frac{x-y}{\varepsilon})dy \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})!} \qquad \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$$

2) $f \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m)$, $(f_n) \subset \mathcal{T}(\mathbb{R}^m)$, $\|f - f_n\|_\infty \to 0$, $n \to \infty$. Also wäre es interessant, $\|J_\varepsilon f - J_\varepsilon f_n\|_\infty$ abzuschätzen:

$$|J_\varepsilon f(x) - J_\varepsilon g(x)| = |\int_{\mathbb{R}^m} j_\varepsilon(x-y)(f-g)(y)dy| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{j_\varepsilon(x-y)}_{\geqslant 0} |f-g|(y)dy$$

$$\leqslant \|f-g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^m} j_\varepsilon(x-y)dy$$

Substitution $z = x - y$, $|dy| = |dz|$
Jetzt wissen wir, dass $(J_\varepsilon f_n)$ eine Folge von $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen ist, deren Ableitungen gleichmäßig konvergieren, für jedes feste $\varepsilon > 0$. Also ist auch der Grenzwert $J_\varepsilon f$ differenzierbar ($J_\varepsilon f_n \underset{\text{glm.}}{\to} J_\varepsilon f$),

$$\begin{aligned} |(J_\varepsilon f_n)^{(\alpha)} - (J_\varepsilon f_m)^{(\alpha)}| &= |\int_{\mathbb{R}^m} \varepsilon^{-|\alpha|-1}(j)^{(\alpha)}(\frac{x-y}{\varepsilon})(f_n - f_m)(y)dy| \\ &= C_{\varepsilon,|\alpha|}\left\|f_n - f_m\right\|_\infty . \end{aligned}$$

D.h. $J_\varepsilon : \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ ist linear. Idee:

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} (J_\varepsilon f) \circ \psi(x)|\det D\psi(x)|dx}_{\underset{?\varepsilon\to 0?}{\to} \int_{\mathbb{R}^m} f\circ\psi(x)|\det D\psi(x)|dx} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^m} J_\varepsilon f(y)dy}_{\underset{?\varepsilon\to 0?}{\to} \int_{\mathbb{R}^m} f(y)dy}$$

3) 1. Vermutung: $J_\varepsilon f(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} f(x)$. $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$
$\int_{\mathbb{R}^m} j_\varepsilon(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^m} j_\varepsilon(z)dz = 1$ durch Substitution: $z = \psi(y) = x - y$, $D\psi(y) = -Id \Rightarrow |\det D\psi(y)| = 1$, $dz = |\det D\psi(y)|dy = dy$.

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon f(x) - f(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^m} j_\varepsilon(x-y)f(y)dy - f(x)| \\ &= |\int_{\mathbb{R}^m} j_\varepsilon(x - y(f(y) - f(x))dy| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^m} j_\varepsilon(x-y)|f(y) - f(x)|dy \\ &\leqslant \sup_{|x-y|\leqslant 2\varepsilon\sqrt{m}} |f(y) - f(x)| \leqslant \delta \quad \forall \delta > 0 \text{ und } \varepsilon \leqslant \varepsilon(\delta) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lim_{\varepsilon\to 0} \left\|J_\varepsilon f - f\right\|_\infty = 0$, d.h. $J_\varepsilon f$ konvergiert gleichmäßig gegen f. Dann gilt für jedes $g \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m)$:

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^m} J_\varepsilon f(x)g(x)dx - \int_{\mathbb{R}^m} f(x)g(x)\right| &\leqslant \left\|J_\varepsilon f - f\right\|_\infty \int_{\mathbb{R}^m} |g(x)|dx \\ &= C_g\left\|J_\varepsilon f - f\right\|_\infty \leqslant C_g\delta, \text{ falls } \varepsilon \leqslant \varepsilon(\delta). \end{aligned}$$

Also: Die gleichmäßige Konvergenz kann nicht für Treppenfunktionen gelten.

4) Erweiterte Vermutung: Für $f, g \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m)$ gilt:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^m} J_\varepsilon f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)g(x)dx$$

Es genügt zunächst Treppenfunktionen zu betrachten (für f) und $g = 1$ zu setzen (!!!) O.B.d.A. ist $f = \prod_{i=1}^m \chi_{[a_i,b_i)} \Rightarrow J_\varepsilon f(x) = \prod_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} j_\varepsilon^{(1)}(x_i - y_i)dy_i$ also

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} J_\varepsilon f(x)dx &= \prod_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty}\int_{a_i}^{b_i} j_\varepsilon^{(1)}(x_i - y_i)dy_i dx_i \\ &\overset{!}{=} \prod_{i=1}^m \int_{a_i}^{b_i} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon^{(1)}(x_i - y_i)dx_i}_{=1} dy_i = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx.\end{aligned}$$

4.4.18 Satz

Die Abbildung $J_\varepsilon : \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m) \to \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ hat folgende Eigenschaften:

1) $\|J_\varepsilon f - J_\varepsilon g\|_\infty \leqslant \|f - g\|_\infty$
2) $|J_\varepsilon f(x) - f(x)| \leqslant \sup\limits_{|x-y|\leqslant 2\varepsilon\sqrt{m}} |f(x) - f(y)|$
3) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \|J_\varepsilon f - f\|_\infty = 0$ für $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$
4) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^m} J_\varepsilon f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)g(x)dx$

Anwendung Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$

$$D\psi(r,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -r\sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} \Rightarrow \det D\psi(r,\phi) = r$$

Also sollte für $f \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m)$ gelten

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(y)dy = \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} f(r\cos\phi, r\sin\phi)r d\phi dr$$

also insbesondere für $f(x) = \tilde{f}(|x|)$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(y)dy = \int_0^\infty \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(r)r d\phi dr = 2\pi \int_0^\infty \tilde{f}(r)r dr$$

Beispiel

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

E. Landau

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2} dydx = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-r^2} dydx$$
$$= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} rdr = \pi \int_0^{\infty} e^{-u} du = \pi$$

(Substitution: $u = r^2$, $du = 2rdr$)

$$\Rightarrow I = \sqrt{\pi}$$

VL: Mo, 2004-01-05

Grundlegende Integrationstechniken

1) Substitutionsregel
2) Partielle Integration (Satz von Gauß/Ostrogadskij)

Ad 1) $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m) \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} f \circ \psi(y) |\det D\psi(y)| dy$$

Für $f \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m)$ ist nicht klar, ob $f \circ \psi \in \mathcal{R}_0(\mathbb{R}^m)$!

Entscheidung Vorläufige Beschränkung auf $\mathcal{C}_0$.

Beispiel $f(x) = e^{-x^2}$, berechne

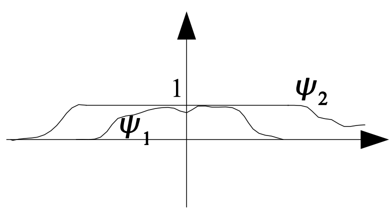
$$I := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \Rightarrow I^2 = \prod_{i=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_i^2} dx_i$$

Erweiterung des Integralbegriffs

Für $\psi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ mit $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ existiert

$$I_\psi(f) := \int_{\mathbb{R}^m} \psi f(x) dx$$

a) Annahme: $f \geqslant 0 \Rightarrow f = |f|$
b) Für $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$, $0 \leqslant \psi_j \leqslant 1$, schreiben wir $\psi_1 < \psi_2 \iff \psi_2(x) = 1$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp} \psi_1$



Dann ist $\psi_1 = \psi_1\psi_2$, also gilt

$$I_{\psi_1}(f) = \int \psi_1 f(x)dx = \int \psi_1\psi_2 f(x)dx \leqslant I_{\psi_2}(f)$$

c) Die Menge $\mathfrak{C}(\mathbb{R}^m) := \{\psi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m);\ 0 \leqslant \psi \leqslant 1\}$ ist *gerichtet* unter der Halbordnung (!) $<$, denn $\exists \psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$ mit $0 \leqslant \psi \leqslant 1$ und $\psi|K = 1$. (Siehe Zerlegung der Eins 4.3.19).

4.4.19 Definition

$f \geqslant 0,\ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$ heißt *integrierbar*, wenn es eine Konstante $c = c_f > 0$ gibt mit $\sup\limits_{\psi\in\mathfrak{C}(\mathbb{R}^m)} \int_{\mathbb{R}^m} \psi f \leqslant c_f$

In diesem Fall setzen wir

$$\int_{\mathbb{R}^m} f := \sup_{\psi\in\mathfrak{C}} \int_{\mathbb{R}^m} \psi f$$

Wenn f das Vorzeichen wechselt, so setzen wir

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + |f(x)|) + \frac{1}{2}(f(x) - |f(x)|) =: f_+(x) - f_-(x)$$

mit $f_\pm \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m),\ f_\pm \geqslant 0$ und $f_+f_- = 0$. Dann definieren wir

$$\int_{\mathbb{R}^m} f := \sup_{\psi} \int_{\mathbb{R}^m} \psi f_+ - \sup_{\psi} \int_{\mathbb{R}^m} \psi f_-$$

Also ist f genau dann integrierbar, wenn $|f|$ integrierbar ist.

Für die Funktion ψ können wir eine spezifische Wahl treffen: wähle $\psi_1 \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ mit $\psi_1 = 1$ auf $B_1(0)$ und setze $\psi_n(x) := \psi_1(\frac{x}{n}) \Rightarrow \psi_n = 1$ auf $B_n(0)$, d.h. zu jedem $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\psi < \psi_n$. Dann wird

$$\int_{\mathbb{R}^m} f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \psi_n f$$

$$\psi :\ (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \ni (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0), x \leqslant 0\}$$

Sei $U \in \mathbb{R}^m$ offen, f stetig und $\geqslant 0$, $\mathfrak{C}(U) := \{\psi \in \mathcal{C}_0(U);\ 0 \leqslant \psi \leqslant 1\}$

4.4.20 Definition

$f \in \mathcal{C}(U)$ heißt über U (absolut) integrierbar $\iff$

$$\infty > \int_U f(x)dx := \sup_{\psi \in \mathfrak{C}(U)} \int_{\mathbb{R}^m} \psi f = \int_u f_+ - \int_u f_-, \text{ falls } f \text{ nicht } \geqslant 0$$

Beispiel $\mathbb{R}^1$: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ existiert immer für f stetig in $[a, b]$. Aber

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_{\psi \in \mathfrak{C}((a,b))} \int_a^b \psi f(x)dx, \text{ weil}$$

$$|\int_a^b (1-\psi)(x) f(x)dx| \leqslant d(\operatorname{supp}(1-\psi))\|f\|_\infty$$

Wenn nur $f \in \mathcal{C}(a, b)$ gilt, dann ist die Definition auch dieselbe wie bisher.

$$(*) \int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} \int_{a+\frac{1}{n}}^{\frac{a+b}{n}} f(x)dx + \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{a+b}{n}}^{b-\frac{1}{n}} f(x)dx$$

z.B. $f(x) = x^{-\alpha}$ ist nicht über $U = (0, \infty)$ integrierbar, aber über

$$(0{,}1) \iff \alpha < 1 \quad (1, \infty) \iff \alpha > 1$$

z.B. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ist über $(0, \infty)$ integrierbar im Sinne von $(*)$, aber nicht absolut!

4.4.21 Hilfssatz

1) Zu jedem $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^m$ offen gibt es eine Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{C}(U)$ mit $\psi_n \leqslant \psi_{n+1}$ und $\int_U f = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \psi_n f$ für alle über U integrierbaren f.
2) Sind U, V offen in $\mathbb{R}^m$ und ist $\psi:\ V \to U$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, so ist $0 \leqslant f \in \mathcal{C}(U)$ genau dann über U integrierbar, wenn $f \circ \psi |\det D\psi|$ über V integrierbar ist. In diesem Fall sind die Integrale gleich.

Beweis 1) Konstruiere kompakte Mengen $K_n \subset U$ mit

1) $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1} \subset U$
2) $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n = U$

Dann gibt es $\psi_n \in \mathfrak{C}(U)$ mit $\psi_n = 1$ in einer Umgebung von K_n. Dann gibt es zu jedem Kompaktum $K \subset U$ ein n mit $K \subset K_n \Rightarrow$ Beh.

Denn 2)$\Rightarrow$ $U = \bigcup \overset{\circ}{K}_n$, zu jedem $x \in K$ gibt es $U_x \subset K_{U_x}$, nach Wahl einer endlichen Teilüberdeckung folgt die Behauptung: $K \subset \sup \overset{\circ}{U}_{x_i}$.

Konkret setzen wir

$$K_n := \{x \in U;\ |x| \leqslant n, d(x, \partial U) \geqslant \frac{1}{n}\}$$

2) Für $\phi \in \mathfrak{C}(U)$ gilt nach der Transformationsformel

$$\int_U \phi f = \int_{\mathbb{R}^m} \phi f = \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\phi \circ \psi}_{=:\tilde{\phi}\in\mathfrak{C}(V)} \ (f \circ \psi)|\det D\psi|$$

Es gilt

$$\sup_{\phi\in\mathfrak{C}(U)} \int_U \phi f = \sup_{\tilde{\phi}} \int_V \tilde{\phi} f \circ \psi| \det D\psi| \Box$$

Also finden wir (z.B.)

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \stackrel{!}{=} \underbrace{\int_{V^2} f = \int_{U^2} f \circ \psi|\det D\psi|}_{\text{beide zugleich divergent oder konvergent}} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^\infty f(r,\theta) r dr dr d\theta$$

Also insbesondere für $f(x) = \tilde{f}(|x|)$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = 2\pi \int_0^\infty \tilde{f}(r) r dr, \quad I^2 = 2\pi \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \pi$$

Zur partiellen Integration

4.4.22 Hilfssatz

Sei $f \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^m)$. Es gilt

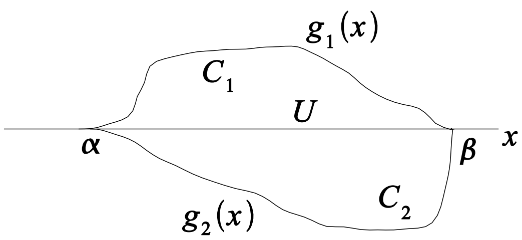
$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx = 0$$

Beweis

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-N}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) dx_i dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_m$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} [\underbrace{f(x_1,\ldots,N,\ldots,x_m)}_{=0} - \underbrace{f(x_1,\ldots,-N,\ldots,x_n}_{=0}] dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_m$$

Wie könnte ein Rand auftreten?



D.h. ∂U ist gegeben durch zwei $\mathcal{C}^1$-Bögen

$$C_i = \{(x, g_i(x));\ x \in [\alpha, \beta]\},\ g_i \in \mathcal{C}^1[\alpha, \beta]$$

Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, d.h. $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$. $\frac{\partial f}{\partial y}$ sollte integrierbar sein und

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dydx &= \int_\alpha^\beta \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dydx \\
&= \int_\alpha^\beta [f(x, g_2(x)] - f(x, g_1(x))]dx
\end{aligned}$$

$\omega = \omega_1 dx + \omega_2 dy$ 1-Form im $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \int_{c_i} \omega = \int_\alpha^\beta \omega(c_i(x))[c_i'(x)]dx = \int_\alpha^\beta [\omega_1(x, g_i(x)) \cdot 1 + \underbrace{\omega_2(x, g_i(x))}_{=0} \cdot g_i'(x)]dx$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dxdy = \int_{c_2} \omega_f^1 - \int_{c_1} \omega_f^1 \text{ mit } \omega_f^1(x,y) = f(x,y)dx$$

$$\begin{aligned}
(*)\ \frac{d}{dx} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} h(x,y)dy &=: \frac{d}{dx} H(x, g_1(x), g_2(x)) \\
&= \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)dy + h(x, g_2(x))g_2'(x) - h(x, g_1(x))g_1'(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)dydx &= \int_\alpha^\beta \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y)dydx \\
&\overset{(*)}{=} \int_\alpha^\beta \frac{d}{dx} \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} h(x,y)dydx - \int_\alpha^\beta \big[h(x, g_2(x))g_2'(x) - h(x, g_1(x))g_1'(x)\big]dx \\
&= -\int_{c_2} hdy + \int_{c_1} hdy
\end{aligned}$$

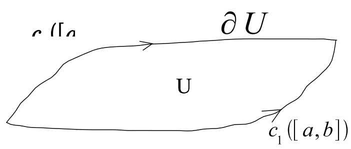
VL: Mi, 2004-01-07

Partielle Integration

In einer Dimension:

$$\int_a^b fg' = [fg]_a^b - \int_a^b f'g \iff \int_a^b (fg' + f'g) = [fg]_a^b$$

Im $\mathbb{R}^2$:



$$\mathbb{R}^2 = U \cup \partial U \cup \mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}\overset{\circ}{U}; \quad \int_U Af = \int_{\partial U} \omega_{Af}$$

Eins-Formen:

$$\omega = \omega_1(x_1, x_2) \underbrace{dx_1}_{e_1^*} + \omega_2(x_1, x_2) \underbrace{dx_2}_{e_2^*}$$

$$\omega : \mathbb{R}^2 \ni x \mapsto \omega(x) \in \left(\mathbb{R}^2\right)^*$$

Vektorfeld:

$$X = a_1(x_1, x_2) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_1}}_{e_1} + a_2(x_1, x_2) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2}}_{e_2}$$

$$\omega[X](x) = (\omega_1 a_1 + \omega_2 a_2)(x_1, x_2) \qquad c : [a, b] \to \mathbb{R}^2, c \in \mathcal{C}^1$$

$$\begin{aligned} \int_c \omega &:= \int_a^b \omega(c(t))[c'(t)]dt \\ &= \int_a^b [\omega_1(c(t))c_1'(t) + \omega_2(c(t))c_2'(t)]\, dt \end{aligned}$$

Dies ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung!

4.4.23 Satz

Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und ∂U gegeben durch zwei $\mathcal{C}^1$-Wege $c_i : [\alpha, \beta] \ni x \mapsto (x, g_i(x)), i = 1, 2$ mit $g_2(x) > g_1(x)$ für $x \in (\alpha, \beta)$ und $g_1(x) = g_2(x)$ für $x = \alpha, \beta$.

Dann gilt für jede $\mathcal{C}^1$-1-Form ω in $\mathbb{R}^2$, $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2$ die Identität

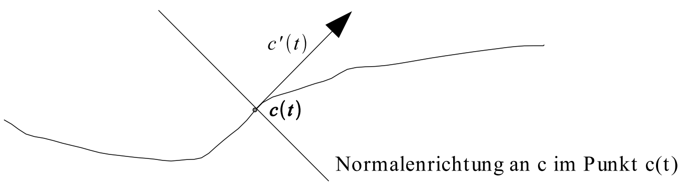
$$(1) \qquad \int_U \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\right)(x)dx = \int_{c_1} \omega - \int_{c_2} \omega$$

Weiter gilt für jedes $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld $X = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ im $\mathbb{R}^2$ der Satz von Gauß:

$$\begin{aligned} (2) \qquad & \int_U \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\right)(x)dx = \int_U \operatorname{div} X(x)dx \\ = \; & \int_\alpha^\beta \langle X, N_U\rangle(c_1(t))|c_1'(t)|dt - \int_\alpha^\beta \langle X, N_U\rangle(c_2(t))|c_2'(t)|dt \end{aligned}$$

Diskussion:

Erläuterungen zum Normalenvektor: Es sei $c : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ ein $\mathcal{C}^1$-Weg.



Drehumg um 90°:

$$\begin{pmatrix} \cos(\pm\pi/2) & -\sin(\pm\pi/2) \\ \sin(\pm\pi/2) & \cos(\pm\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} =: J_\pm$$

$$J_\pm e_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm e_2$$

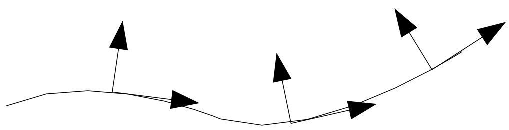
Wir bevorzugen J_- und definieren den Normalenvektor von c im Punkt $c(t)$ durch

$$N_c(t) = J_- \left(\frac{c'(t)}{|c'(t)|} \right)$$

(Achtung: $c(x) = (x, g(x))$ ist immer regulär!)

Bemerkung: c regulärer $\mathcal{C}^2$-Weg, o.B.d.A. mit Bogenlänge parametrisiert $\Longleftrightarrow$ $|c'(t)| = 1 \ \forall t$.

Dann setzen wir $e_1(t) = c'(t)$ und $e_2(t) = J_+\big(e_1(t)\big)$, das „bewegliche orthonormierte Zweibein".



Also gilt: $\langle e_i(t), e_j(t)\rangle = \delta_{ij}$.

$$\Rightarrow \quad 0 = \underbrace{\langle e_i'(t), e_j(t)\rangle}_{\omega_{ij}(t)} + \underbrace{\langle e_i(t), e_j'(t)\rangle}_{\omega_{ji}(t)}$$

$$\Rightarrow \quad w_{ij}(t) = -\omega_{ji}(t)$$

$$\text{D.h. } \omega(t) = \big(\omega_{ij}(t)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant 2} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12}(t) \\ -\omega_{12}(t) & 0 \end{pmatrix} \qquad \omega_{12} =: \kappa$$

Dann ist

$$\begin{aligned} e_1'(t) &= e_1(t)\langle e_1'(t), e_1(t)\rangle + e_2(t)\langle e_1'(t), e_2(t)\rangle \\ &= \kappa(t) e_2(t) \\ e_2'(t) &= -\kappa(t) e_1(t) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Formel von Frénet}}$

4.4.24 Definition

Die so für jede reguläre $\mathcal{C}^2$-Kurve c definierte Funktion κ heißt die *Krümmung von c*.

Beispiele:

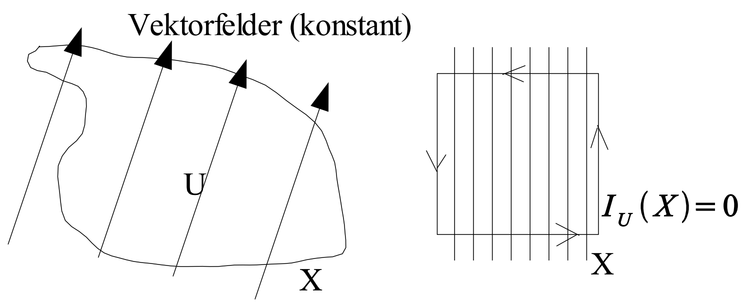
1) c Gerade $\Rightarrow \kappa(t) \equiv 0$.

2) Betrachte $c : [0, 2\pi] \ni t \mapsto (\cos t, \sin t) \in S^1$. Dann ist c mit Bogenlänge parametrisiert und

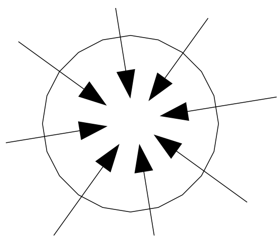
$$e_1(t) = (-\sin t, \cos t)$$
$$e_2(t) = J_+ e_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Dann wird $e_1'(t) = -(\cos t, \sin t) = e_2(t)$, d.h. $\kappa(t) \equiv 1$.
Betrachte

$$\int_\alpha^\beta \underbrace{\langle X, N_c \rangle}_{\text{unabh. vonParametrisierung}} (c(t)) \underbrace{|c'(t)| dt}_{\text{auch unabh.}}$$



Nach Gauß ist $I_U(X) = \int_U \operatorname{div} X = 0 \ \forall$ konst. X.
Aber



Hier sollte die Divergenz von $X \neq 0$ sein. z.B.

$$X(x) = -x = -x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \Rightarrow \operatorname{div} X(x) = -\frac{\partial x_1}{\partial x_1} - \frac{\partial x_2}{\partial x_2} = -2$$

Zum Integral U offen, $f \in \mathcal{C}(U)$, $f \geqslant 0$

$$\int_U f = \sup_{\substack{0 \leqslant \phi \leqslant 1 \\ \phi \in \mathcal{C}_0(U)}} \int_{\mathbb{R}^m} \phi f$$

Aber (Ü) Ist $(\phi_n) \in \tilde{\mathfrak{C}}(U)$, so dass $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = 1 \; \forall x \in U$ und gleichmäßig für $x \in K, K \subset U$ bel. kompakt, dann

$$\int_U f = \lim_{n\to\infty} \int_U \phi_n f \leqslant 0$$

4.4.25 Definition

Wir setzen für $U \subset \mathbb{R}^m$ offen *das Volumen* von U: $\operatorname{vol} U := \int_U 1 \leqslant \infty$.

4.4.26 Hilfssatz

1) Jede beschränkte Menge hat endliches Volumen.
2) $U_1 \subset U_2 \Rightarrow \operatorname{vol} U_1 \leqslant \operatorname{vol} U_2$
3) $f \in \mathcal{C}(U)$ beschränkt $\Rightarrow \int_U |f| \leqslant \|f\|_\infty \operatorname{vol} U \Rightarrow f$ ist immer integrierbar, wenn $\operatorname{vol} U < \infty$.

Beweis

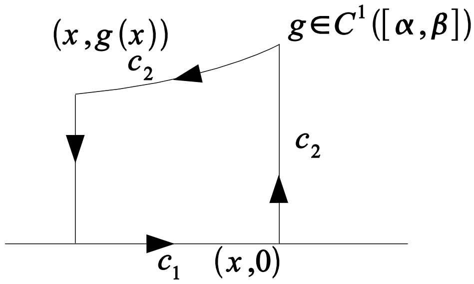
1) $\phi \in \mathfrak{C}(U_1) \Rightarrow \int_{U_1} \phi = \int_{U_2} \phi \Rightarrow \operatorname{vol} U_1 \leqslant \operatorname{vol} U_2$
2) Sei U beschränkt $\Rightarrow \exists R > 0$ mit $U \subset B_R(0) \overset{(2)}{\Rightarrow} \operatorname{vol} U \leqslant \operatorname{vol} B_R(0) \leqslant \operatorname{vol} \underbrace{Q_R(0)}_{\prod_{i=1}^m [-R,R]} = (2R)^m < \infty$

Wieso gilt 4.4.23 für allgemeine Gebiete?

4.4.27 Definition

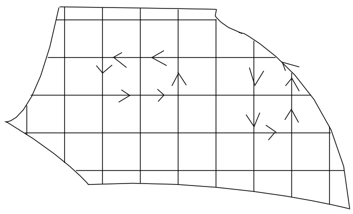
Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^m$ heißt *ein Gebiet*, wenn gilt:
1) M ist offen, 2) M ist wegzusammenhängend.

Ein Beispiel $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$



$$-\int_U \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dxdy = -\int_\alpha^\beta \int_0^{g(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dydx = -\int_\alpha^\beta [f(x,g(x)) - f(x,0)]dx$$
$$= \int_{c_2} \omega_f + \int_{c_1} \omega_f$$

$\omega_f^{(1)} = f(x,y)dx, \quad \omega_h^{(2)} = h(x,y)dy$
Dafür gilt 4.4.23!



$$\int_U \frac{\partial h}{\partial x} dxdy = \int_{\partial U} \omega_h \qquad \int_U \operatorname{div} X = \int_{\partial U} \langle X, N_u \rangle \ldots$$

Hauptfrage: Was bedeutet 4.4.23(1)?

Untersuchungsstrategie Wie verhalten sich beide Teile unter Koordinatentransformation?

Ist $\psi:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, $\psi(V) = U$

$$\Rightarrow \int_{U=\psi(V)} f = \int_V f \circ \psi |\det D\psi|$$

Betrachte jetzt, mit $c:\ [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$ $\mathcal{C}^1$-Weg,

$$\int_c \omega_\psi = \int_{\psi(c)} \omega = \int_\alpha^\beta \omega(\psi(c(t)))\big[D\psi(c(t))(c'(t))\big]dt$$

$$c'(t) = c_1'(t)\frac{\partial}{\partial x_1} + c_2'(t)\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad D\psi(c(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}(c(t))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow D\psi\big(c(t)\big)\big[c'(t)\big] = &\left(\frac{\psi_1}{\partial x_1} \circ c \cdot c_1' + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \circ c \cdot c_2'\right)\frac{\partial}{\partial x_1} \\ &+ \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \circ c \cdot c_1' + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \circ c \cdot c_2'\right)\frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \omega\big(\psi(c(t))\big[D\psi(c(t))[c'(t)]\big] \\ &=\omega_1 \circ \psi(c(t))\left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \circ c \cdot c_1' + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \circ c \cdot c_2'\right] + \omega_2 \circ \psi(c(t))\left[\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \circ c \cdot c_1' + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \circ c \cdot c_2'\right] \\ &=\omega_{\psi_1}(c(t))c_1'(t) + \omega_{\psi_2}(c(t))c_2'(t) \end{aligned}$$

4.4.28 Definition

$\psi:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus, ω $\mathcal{C}^\infty$-1-Form. Dann wird die 1-Form $\psi^*\omega$ definiert durch

$$\psi^*\omega(x)[X] = \omega_{\psi(x)}\big[D\psi(x)[X(x)]\big]$$

und dies ist tatsächlich eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung $\mathbb{R}^m \to (\mathbb{R}^m)^*$.

4.4.29 Satz

$$\int_{\psi(c)} \omega = \int_c \psi^*(\omega)$$

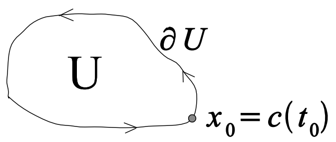
VL: Mo, 2004-01-12

$\mathbb{R}^2 \supset U$ offen, regulärer $\partial U = C^\infty$-Bogen, d.h. $\partial U = c([a,b])$ für einen regulären C^∞- Weg $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $c(b) = c(a)$.

$\omega \in \Omega(\mathbb{R}^2)$, das heißt $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2, w_i \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. In speziellen Fällen gilt der Satz von Stokes im $\mathbb{R}^2$, d.h.

$$(*) \quad \int_{\partial U} \omega := \int_c \omega = \int_U d\omega, \quad d\omega := \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

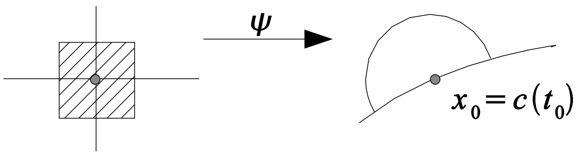
C sei so orientiert, dass U immer zur Linken liegt.



Annahme: c ist mit Bogenlänge parametrisiert $\iff |c'(t)| = 1$.

Wir können eine Abbildung produzieren, wie folgt

$$(-\varepsilon,\varepsilon) \times (-\varepsilon,\varepsilon) \ni (x,y) \to c(t_0 + x) + yJ_+(c'(t_0 + x))$$



d.h. $\psi^{-1}(\partial U) = \{y = 0\}$. Ist ψ ein Diffeomorphismus? Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
D\psi(x,y) &= (c'(t_0 + x) + yJ_+(c''(t_0 + x)) \quad | \quad J_+(c'(t_0 + x))) \\
&= (e_1(t_0 + x) + ye_2'(t_0 + x) \quad | \quad e_2(t_0 + x)) \\
&= ((1 - y\kappa(t_0 + x))e_1(t_0 + x) \quad | \quad e_2(t_0 + x)) \\
\Rightarrow D\psi(0{,}0) &= (e_1(x_0), e_2(x_0)) \\
\Rightarrow D\psi(0{,}0) &= 1
\end{aligned}$$

Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\psi : B_\varepsilon(0) \to W_\varepsilon(x_0 = c(t_0))$ ein C^∞-Diffeomorphismus ist mit

$$\begin{aligned}
&\psi(\mathbb{R}^2_+ \cap B_\varepsilon(0)) = W_\varepsilon(x_0) \cap U\\
&\psi(\partial\mathbb{R}^2_+ \cap B_\varepsilon(0)) = W_\varepsilon(x_0) \cap \partial U\\
&\mathbb{R}^2_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geqslant 0\}
\end{aligned}$$

1) Reduktion des Beweises von $(*)$:
Wähle zu jedem $x \in \partial U$ eine Umgebung $B_{\varepsilon,x}(0)$ und ein $\psi_x : B_{\varepsilon,x} \to W_\varepsilon(x)$ wie eben. Weil $c([a,b])$ kompakt ist, können wir $U \cup \partial U$ durch endlich viele $(B_{\varepsilon,x_i}(0))_{i=1}^N$ und ein U' mit $U' \subset U$ überdecken. Sei $\{\phi_i\} \cup \{\phi'\}$ die zugehörige Zerlegung der Eins. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_U d\omega &= \int_U \left[\sum_{i=1}^N d\phi_i\omega + d\underbrace{\phi'\omega}_{\in C_0^\infty(U)}\right] = \sum_{i=1}^N \int_{U\cap W_\varepsilon(x_i)} d\phi_i\omega\\
&= \sum_{i=1}^N \int_{\partial U} \phi_i\omega = \int_{\partial U} \omega
\end{aligned}$$

Also bleibt $(*)$ zu beweisen für ω mit $\operatorname{supp}(\omega) \subset U \cap W_\varepsilon(x)$.

2) Wenn $U \cap W_\varepsilon(x) = \mathbb{R}_2^+ \cap B_\varepsilon(0)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{U\cap W_\varepsilon} d\omega &= \int_{\mathbb{R}^2_+\cap B_\varepsilon(0)} \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\right)(x_1,x_2)dx_1dx_2\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\right)(x_1,x_2)dx_2dx_1\\
&= \int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}(x_1,x_2)dx_1dx_2 - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^\infty \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}(x_1,x_2)dx_2dx_1\\
&= 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1(x_1,0)dx_1
\end{aligned}$$

$$\partial U = \{(x_1,0); x_1 \in \mathbb{R}\}, \quad c(t) = (t,0), \quad c'(t) = (1,0)$$

$$\text{Was ist} \quad \int_{\partial U} \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1(t,0)dt\ ?$$

3) Wir hatten gesehen, dass

$$\int_{\psi(c)} \omega = \int_c \psi^*\omega,$$

wobei $\psi^*\omega(c(t))[c'(t)] = \omega(\psi(c(t)))[D\psi(c(t))[c'(t)]]$ mit $\psi^*\omega \in \Omega^1(B_\varepsilon(0))$. Wenn es nun wahr wäre, dass

$$d\psi^*\omega = \psi^* d\omega := d\omega \circ \psi \ \det D\psi \quad (**)$$

dann wäre

$$\begin{aligned}
\int_{\partial U} \omega = \int_{\psi(C)} \omega = \int_C \psi^*\omega = \int_{\partial \mathbb{R}^{2*}_+} \psi^*\omega = \int_{\mathbb{R}^2_+} d\psi^*\omega \\
\overset{(**)}{=} \int_{\mathbb{R}^2_+} d\omega \circ \psi \ \det D\psi = \int_{\mathbb{R}^2_+ \cap B_\varepsilon(0)} d\omega \circ \psi | \ \det D\psi| \\
= \int \psi(B_\varepsilon(0) \cap \mathbb{R}^2_+) d\omega = \int_U d\omega
\end{aligned}$$

d.h. $(**)$ beweist den Satz von Stokes!

4.4.30 Definition

1) Für U offen im $\mathbb{R}^m$ setzen wir:

$$\Omega^1(U) := \{\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i(x) dx_i \ \text{1-Form} \ ; \omega_i \in C^\infty(U)\}$$
$$\Omega^1_0(U) = \{\omega \in \Omega^1(U); \ \text{supp} \ \omega_i \ \text{kompakt in} \ U\}$$

2) Sei $\psi : V \to U$ ein C^∞- Diffeomorphismus.
Für ein Vektorfeld $\sum_{i=1}^m X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ in V mit $X_i \in C^\infty(V)$ setzen wir

$$\psi_*[X](\psi(x)) = D\psi(x)[X(x)]$$

Weiter setzen wir für $\omega \in \Omega^1(U)$

$$\psi^*\omega(x)[X(x)] = \omega(\psi(x))[\psi_* X(x)].$$

Wie sehen die Darstellungen in Koordinaten aus?

$$\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i(y) dy_i \quad X = \sum_{i=1}^m X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Dann wird

$$\begin{aligned}
\psi_*(X(x))(\psi(x)) &= \sum_{i=1}^m X_i(x) \psi_* \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^m X_i(x) D\psi(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} |_x \right) \\
&= \sum_{i=1}^m X_i(x) \sum_{j=1}^m \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} |_{\psi(x)} \\
&= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m X_i(x) \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial y_j} |_{\psi(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi^*\omega(x) &= \sum_{i=1}^m \omega_i^\psi(x)dx_i \\
\omega_i^\psi(x) &= \psi^*\omega(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \omega(\psi(x))\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_x\right) \\
&= \sum_{j=1}^m \omega_j(\psi(x))dy_j|_{\psi(x)}\left(\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}|_x\right)\right) \\
&= \sum_{j=1}^m \omega_j(\psi(x))\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}(x) \\
\psi^*\omega(x) &= \sum_{i,j=1}^m \omega_j(\psi(x))\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}(x)dx_i
\end{aligned}$$

Bemerkung

1) Wir haben nicht verwendet, dass ψ ein Diffeomorphismus ist! Die Definition 4.4.20 bleibt richtig für jedes $\psi \in C^\infty(V,U)$, wobei $U \subset \mathbb{R}^{m_1}, V \subset \mathbb{R}^{m_2}$ sein kann.
2) Es ist wichtig zu bemerken, dass $\psi^* : \Omega^1(U) \to \Omega^1(V)$ eine lineare Abbildung ist.

$(**)$ im $\mathbb{R}^2 : \omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2$

$$\begin{aligned}
\psi^*\omega &= \left(\omega_1\circ\psi\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \omega_2\circ\psi\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right)dx_1 + \left(\omega_1\circ\psi\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} + \omega_2\circ\psi\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)dx_2 \\
\Rightarrow d\psi^*\omega &= \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}\circ\psi\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\circ\psi\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} + \omega_1\circ\psi\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\partial x_2} \\
&+ \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}\circ\psi\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}\circ\psi\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} + \omega_2\circ\psi\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial x_2} \\
&- \left[\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1}\circ\psi\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\circ\psi\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} + \omega_1\circ\psi\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x_1\partial x_2}\right] \\
&- \left[\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}\circ\psi\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\omega_2}{\partial x_2}\circ\psi\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right)\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} + \omega_2\circ\psi\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x_1\partial x_2}\right] \\
&= \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\circ\psi\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}\circ\psi\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\circ\psi\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}\circ\psi\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} \\
&= \frac{\partial\omega_2}{\partial x_1}\circ\psi \det D\psi - \frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\circ\psi \det D\psi \\
&= d\omega\circ\psi \det D\psi \Rightarrow (**)
\end{aligned}$$

4.4.31 Satz (von Stokes)

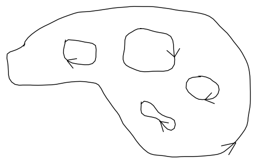
Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und so, dass der Rand von endlich vielen paarweise disjunkten, regulären, positiv orientierten (U liegt zur Linken) einfach geschlossenen (d.h.

$C|_{[a,b]}$ injektiv) C^∞-Bögen gebildet wird. Dann gilt für jedes $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$

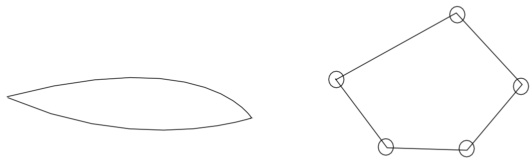
$$\int_{\partial U} \omega = \int_U d\omega.$$

Bemerkungen

1) Es ist auch eine Verallgemeinerung mit mehreren Randkomponenten möglich.



2) Es genügt anzunehmen, dass jede Bogenkomponente des Randes stückweise C^∞ ist.



3) Es genügt anzunehmen, dass $\omega \in \Omega^1(V)$ mit $V \supset \bar{U}$.

VL: Mi, 2004-01-14

$\int_{\partial U} = \int_U d\omega \quad U \subset \mathbb{R}^2,\ \partial U$ endliche Vereinigung von einfach geschlossenen regulären $\mathcal{C}^\infty$-Bögen, $\psi:\ V \to U$ $\mathcal{C}^1$-Diffeomorophismus $\Rightarrow d\omega \circ \psi \det D\psi = \psi^* d\omega = d\psi^*\omega$ mit $\det D\psi > 0$.

Wie sollen wir $d\omega$ für $\omega \in \Omega^1(U)$ integrieren?

Spekulation: $\det D\psi$ ist quadratisch in $\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}$, also sollen wir vielleicht $d\omega$ als bilineare Abbildung auf den Vektorfeldern definieren?

$$\int_U d\omega = \int_U \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\right)(x_1, x_2)dx_1 dx_2$$

Also evtl.:

$$d\omega := \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\right)\underbrace{dx_1 \wedge dx_2}_{\text{Bilinearform}}$$

Wir wissen (!), dass $\boxed{\psi^*(f dx_i) = f \circ \psi d(x_i \circ \psi)}$, $x_i := \langle x, e_i\rangle,\ x_i \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Was wäre dann

$$
\begin{aligned}
\psi^* d\omega &\overset{?}{=} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\right) \circ \psi \psi^*(dx_1 \wedge dx_2) \\
&\overset{?}{=} \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\right) \circ \psi (\psi^* dx_1) \wedge (\psi^* dx_2) \\
&= \underbrace{\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\right)}_{=:\omega_{12}} \circ \psi d\psi_1 \wedge d\psi_2 \\
&= \omega_{12} \circ \psi \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} dx_2\right) \wedge \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} dx_2\right) \\
&= \omega_{12} \circ \psi \left(\underbrace{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_1}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_2}_{=0} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} \underbrace{dx_2 \wedge dx_1}_{=-dx_1 \wedge dx_2} \right) \\
&\overset{?}{=} \omega_{12} \circ \psi \det D\psi dx_1 \wedge dx_2
\end{aligned}
$$

1) Wir brauchen also ein “Produkt” von 1-Formen, $\wedge$, sodass

$$\wedge :\ \Omega^1 \times \Omega^1 \to \Omega^2, \quad \omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1 \Rightarrow dx_i \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_i = 0$$

2) und: wir müssen wissen, wie man 2-Formen integriert

$$\Omega^1 \times \Omega^1 \ni (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 \wedge \omega_2$$

Bilinearform auf den Vektorfeldern

$$
\begin{aligned}
\omega_1 \wedge \omega_2[X_1, X_2] &= \omega_1(X_1)\omega_2(X_2) - \omega_1(X_2)\omega_2(X_1) \\
&\Rightarrow \omega_1 \wedge \omega_2 = -\omega_2 \wedge \omega_1 \text{ und bilinear} \\
\Rightarrow \omega_1 \wedge \omega_2[X_2, X_1] &= -\omega_1 \wedge \omega_2[X_1, X_2] \ !
\end{aligned}
$$

Integration

$\omega \in \Omega^2(U) \Rightarrow \omega(x_1, x_2) = \omega_{12}(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2$ mit $\omega_{12} \in \mathcal{C}^\infty(U)$
Setze $\int_U \omega := \int_U \omega_{12}$

Kompatibilität $\psi :\ V \to U$ $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismus $\Rightarrow \psi^*\omega = \omega_{12} \circ \psi \det D\psi dx_1 \wedge dx_2$ in V

$$\int_{\psi(V)} \omega = \int_{\psi(V)} \omega_{12} = \int_V \omega_{12} \circ \psi \,|\det D\psi| = \operatorname{sgn}(\det D\psi) \int_V \psi^* \omega$$

Also Vorsicht: die alte und neue Integration stimmen überein, solange wir nur Diffeomorphismen ψ zur Transformation zulassen, die $\det D\psi > 0$ erfüllen.

4.5 Differentialformen

$U \subset \mathbb{R}^m$ offen

4.5.1 Definition

Mit $\mathfrak{X}(U)$ bezeichnen wir die $\mathcal{C}^\infty$-Vektorfelder in U, d.h.

$$\mathfrak{X}(U) = \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^m), \quad \mathfrak{X}(U) \ni X(x) = \sum_{i=1}^m X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$$

4.5.2 Definition

$$\Omega^0(U) := \mathcal{C}^\infty(U)$$
$$\Omega^k(U) \ni \omega : \ \mathfrak{X}(U)^k \to \mathcal{C}^\infty(U) \text{ sodass}$$

1) ω ist k-linear und alternierend

2)

$$\omega[\phi X_1, \ldots, X_k](x) = \phi(x)\omega[X_1, \ldots, X_k](x)$$
$$X \in \mathfrak{X}(U) \Rightarrow \phi X \in \mathfrak{X}(U) \text{ für } \phi \in \mathcal{C}^\infty(U) \Rightarrow \phi X(x) = \sum_{i=1}^m \phi(x) X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_x$$

Bemerkungen

1) $\Omega^k(U)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

2) $\Omega^k(U) = 0$ für $k > m$, denn

$$\begin{aligned}
\omega[X_1, \ldots, X_k](x) &= \omega\left[\sum_{i_1=1}^m X_{1i_1} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \sum_{i_k=1}^m X_{ki_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\right](x) \\
&= \sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^m X_{1i_1} \cdots X_{ki_k} \omega\left[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right](x) \\
&=: \sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^m X_{1i_1}(x) \cdots X_{ki_k} \omega_{i_1, \ldots, i_k}(x)
\end{aligned}$$

Dabei ist $\boxed{\omega_{i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(k)}}(x) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \omega_{i_1, \ldots, i_k}(x)}$

3) $\omega_{i_1, \ldots, i_k} = 0$, falls nicht alle i_k verschieden sind.
$\omega_{i_1, \ldots, i_k} \not\equiv 0$ höchstens dann, wenn $k \leqslant m$ und $\{i_1, \ldots, i_k\}$ eine Teilmenge von $\{1, \ldots, m\}$ mit k Elementen ist.

4.5.3 Definition

Für $\omega_i \in \Omega^{k_i}(U),\ i = 1{,}2$ setzen wir

$$\begin{aligned}
&\omega_1\wedge\omega_2[X_1,\dots,X_{k_1},X_{k_1+1},\dots,X_{k_1+k_2}]\\
&\quad := \frac{1}{k_1!k_2!}\sum_{\sigma\in S_{k_1+k_2}} \operatorname{sgn}\sigma\cdot\omega_1\left[X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k_1)}\right]\omega_2\left[X_{\sigma(k_1+1)},\dots,X_{\sigma(k_1+k_2)}\right]
\end{aligned}$$

4.5.4 Hilfssatz

Das Dachprodukt ("wedge"-Produkt) hat folgende Eigenschaften

1) Es ist wohldefiniert.
2) Wenn wir $\wedge$ durch Bilinearität erweitern auf
$$\Omega(U) := \bigoplus_{i=0}^{m}\Omega^i(U),$$
dann ist $\wedge$ assoziativ.
3) Für $\omega_i \in \Omega^{k_i}(U)$ ist
$$\omega_1\wedge\omega_2 = (-1)^{k_1k_2}\omega_2\wedge\omega_1$$

Beweis

1) $\omega_1\wedge\omega_2$ ist sicher eine k_1+k_2-Linearform, und es gilt 4.5.2 (2). Sei jetzt π die Permutation $\pi(i)=j,\ \pi(j)=i,\ \pi(l)=l$ für $l\neq i,j$. Dann wird

$$\begin{aligned}
&\omega_1\wedge\omega_2\left[X_{\pi(1)},\dots,X_{\pi(k_1+k_2)}\right]\\
&\quad = \frac{1}{k_1!k_2!}\sum_{\sigma\in S_{k_1+k_2}} \operatorname{sgn}(\sigma\pi\pi^{-1})\omega_1\left[X_{\sigma\pi(1)},\dots,X_{\sigma\pi(k_1)}\right]\omega_2\left[X_{\sigma\pi(k_1+1)},\dots,X_{\sigma\pi(k_1+k_2)}\right]\\
&\quad = \frac{1}{k_1!k_2!}\sum_{\sigma\in S_{k_1+k_2}} \operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\pi^{-1}\omega_1\left[X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k_1)}\right]\omega_2\left[X_{\sigma(k_1+1)},\dots,X_{\sigma(k_1+k_2)}\right]\\
&\quad = -\omega_1\wedge\omega_2[X_1,\dots,X_{k_1+k_2}]
\end{aligned}$$

2) (Übung)
$$\omega_j = \sum_{k=0}^{m}\omega_j^{[k]} \Rightarrow \omega_1\wedge\omega_2 = \sum_{k,k'\geqslant 0}\omega_1^{[k]}\wedge\omega_2^{[k']}$$

3)
$$\begin{aligned}
\omega_1\wedge\omega_2 &= \frac{1}{k_1!k_2!}\sum_{\sigma\in S_{k_1+k_2}} \operatorname{sgn}\sigma\cdot\omega_1\left[X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k_1)}\right]\omega_2\left[X_{\sigma(k_1+1)},\dots,X_{\sigma(k_1+k_2)}\right]\\
&= \frac{1}{k_1!k_2!}\sum_{\sigma\in S_{k_1+k_2}} \operatorname{sgn}\sigma\cdot\omega_2\left[X_{\sigma(k_1+1)},\dots,X_{\sigma(k_1+k_2)}\right]\omega_1\left[X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k_1)}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{k_1!k_2!}\sum_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma\circ\mu^{-1})\omega_2\left[X_{\sigma\mu(1)},\ldots,X_{\sigma\mu(k_2)}\right]\omega_1\left[X_{\sigma\mu(k_2+1)},\ldots,X_{\sigma\mu(k_2+k_1)}\right]\\
&= \operatorname{sgn}\mu^{-1}\omega_2\wedge\omega_1
\end{aligned}
$$

$$
\text{mit } \mu = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k_2 & k_2+1 & \cdots & k_1+k_2 \\ k_1+1 & \cdots & k_1+k_2 & 1 & \cdots & k_1 \end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow \operatorname{sgn}\mu^{-1} = \left((-1)^{k_2}\right)^{k_1} = (-1)^{k_1k_2}
$$

Bemerkungen

1) $\Omega(U)$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra unter $+$ und $\wedge$.
2) $\Omega^{\mathrm{ev}}(U) := \bigoplus_{k=0}^m \Omega^{2k}(U)$ ist eine *kommutative* $\mathbb{R}$-Algebra.
3) $\Omega(U)$ ist ein Modul über $\Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$.
4) Insbesondere gilt $dx_i\wedge dx_j = -dx_j\wedge dx_i,\ dx_i\wedge dx_i = 0$.
5) Allgemeiner ist $dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}\in\Omega^k(U)$, wenn $\{i_1,\ldots,i_k\}$ eine k-elementige Teilmenge von $\{1,\ldots,m\}$ ist. Es gilt

$$
dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k} = dx_{i_{\sigma(1)}}\wedge\ldots\wedge dx_{i_{\sigma(k)}}\operatorname{sgn}\sigma
$$

Also können wir uns beschränken auf die Menge I_m^k der k-elementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,m\}\simeq I_m^m$. Für $I\in I_m^k,\ I=\{i_1<\ldots<i_k\}$ setzen wir $dx_I := dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_k}$.

VL: Mo, 2004-01-19

$U\in\mathbb{R}$ offen,

$$
\begin{aligned}
&\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^m \omega^k(U)\\
&\Omega^0(U) = C^\infty(U)\\
&\Omega^k(U) = \left\{\omega:\mathfrak{X}(U)^k\to C^\infty(U);\ \omega \ \text{ ist k-linear über } \ C^\infty(U) \ \text{ und alternierend }\right\}, k\geqslant 1
\end{aligned}
$$

$\mathbb{R}$-Vektorraum unendlicher Dimension und ein Linksmodul über $C^\infty(U)$.

Wedge Produkt:

$$
\Omega^{k_1}(U)\times\Omega^{k_2}(U)\ni(\omega_1,\omega_2)\mapsto\omega_1\wedge\omega_2\in\Omega^{k_1+k_2}(U)
$$

$\Rightarrow(\Omega(U),\wedge)$ ist eine (assoziative) Algebra und $(\Omega^{ev}(U),\wedge)$ ist eine kommutative Algebra.

$$
\omega_1\wedge\omega_2 = (-1)^{k_1k_2}\omega_2\wedge\omega_1
$$

Bemerkung $(\Omega(U), \wedge)$ ist eine $\mathbb{Z}$-*graduierte Algebra*, das heißt

$$\Omega(U) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Omega^k(U) \quad \text{und} \quad \Omega^{k_1}(U) \wedge \Omega^{k_2}(U) \subset \Omega^{k_1+k_2}(U)$$

Erinnerung

$$\omega_1 \wedge \omega_2[X_1, \ldots, X_{k_1+k_2}] = \sum_{\sigma \in S_{k_1+k_2}} \frac{\operatorname{sgn}\sigma}{k_1!k_2!} \omega_1[X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k_1)}] \omega_2[X_{\sigma(k_1+1)}, \ldots, X_{\sigma(k_1+k_2)}]$$

Schreibweise

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} = \operatorname{sgn}\sigma dx_{i_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{\sigma(k)}}$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
&dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{l+r}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad = (dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{l-1}}) \wedge (dx_{i_l} \wedge dx_{i_{l+1}} \wedge (dx_{i_{l+2}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) \\
&\quad = -(dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{l-1}}) \wedge (dx_{i_{l+1}} \wedge dx_{i_l}) \wedge (dx_{i_{l+2}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}) \\
&\quad = (-1)^r dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{dx}_{i_l} \wedge dx_{i_{l+1}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{l+r-1}} \wedge dx_{i_{l+r}} \wedge dx_{i_l} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \\
&\quad = (-1)^{r+r-1} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \underbrace{dx_{i_{l+r}}}_{l\text{ -te Stelle}} \wedge \ldots \wedge \underbrace{dx_{i_l}}_{r+l\text{ -te Stelle}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}
\end{aligned}$$

$$I_m^k := \{\text{ Menge der } k\text{-elementigen Teilmengen von der Menge } \{1, \ldots, m\}\}$$

$$\sharp I_m^k = \binom{m}{k} \qquad I = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_k\} \qquad dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

4.5.5 Hilfssatz

Für $X_i \in \mathfrak{X}(U)$,$1 \leqslant i \leqslant k$, und $I \in I_k^m$ gilt

$$dx_I[X_1, \ldots X_k] = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}\sigma dx_{i_1}[X_{\sigma(1)}] \ldots dx_{i_k}[X_{\sigma(k)}]$$

Beweis

$k = 1 \quad \checkmark$

$k = 2 \qquad dx_1 \wedge dx_2[X_1, X_2] = dx_1[X_1]dx_2[X_2] - dx_1[X_2]dx_2[X_1]$

$k \geqslant 2$ bewiesen, $I \in I_m^{k+1}, I' := I \setminus \{i_{k+1}\}, X_i \in \mathfrak{X}(U), 1 \leqslant i \leqslant k+1$

$$
\begin{aligned}
&dx_I[X_1, \dots, X_{k+1}] \\
&= (dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \wedge dx_{i_{k+1}}[X_1, \dots, X_{k+1}] \\
&= \sum_{\sigma \in S_{k+1}} \frac{\operatorname{sgn}\sigma}{k!} dx_{I'}[X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}] dx_{i_{k+1}}[X_{\sigma(k+1)}] \\
&= \sum_{\substack{\sigma \in S_{k+1} \\ \pi \in S_k}} \frac{\operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\pi}{k!} dx_{i_1}[X_{\sigma\circ\pi(1)}] \cdots dx_{i_k}[X_{\sigma\circ\pi(k)}] dx_{i_{k+1}}[X_{\sigma(k+1)}] \\
&= \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\pi \in S_k} \sum_{\sigma \in S_{k+1}^l} \frac{\operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\pi}{k!} dx_{i_1}[X_{\sigma\circ\pi(1)}] \cdots dx_{i_k}[X_{\sigma\circ\pi(k)}] dx_{i_{k+1}}[X_{\sigma(k+1)}]
\end{aligned}
$$

[Dabei ist $\sigma \in S_{k+1}^l \iff \sigma \in S_{k+1}$ und $\sigma(k+1) = l$.]

[Für $\sigma, \sigma_l \in S_{k+1}^l$ gilt $\sigma_l^{-1} \circ \sigma \in S_k \quad \sigma = \sigma_l \circ \sigma_l^{-1} \circ \sigma$.]

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\pi \in S_k} \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\substack{\sigma \in S_{k+1}^l \\ \sigma = \sigma_l \circ \rho, \rho \in s_k}} \frac{\operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\pi}{k!} dx_{i_1}[X_{\sigma\circ\pi(1)}] \cdots dx_{i_k}[X_{\sigma\circ\pi(k)}] dx_{i_{k+1}}[X_{\sigma\pi(k+1)}] \\
&= \sum_{\pi \in S_k} \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\rho \in S_k} \frac{\operatorname{sgn}\sigma_l \operatorname{sgn}\rho\pi}{k!} dx_{i_1}[X_{\sigma_l\circ\rho\pi(1)}] \cdots dx_{i_k}[X_{\sigma_l\circ\rho\pi(k)}] dx_{i_{k+1}}[X_{\sigma_l\circ\rho\pi(k+1)}] \\
&= \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\rho \in S_k} \operatorname{sgn}(\sigma_l \circ \rho) dx_{i_1}[X_{\sigma_l\circ\rho(1)}] \cdots dx_{i_k}[X_{\sigma_l\circ\rho(k)}] dx_{i_{k+1}}[X_{\sigma_l\circ\rho(k+1)}] \\
&= \sum_{l=1}^{k+1} \sum_{\sigma \in S_{k+1}^l} \operatorname{sgn}(\sigma) dx_{i_1}[X_{\sigma(1)}] \cdots dx_{i_k}[X_{\sigma(k)}] dx_{i_{k+1}}[X_{\sigma(k+1)}] \\
&= \sum_{\sigma \in S_{k+1}} \operatorname{sgn}(\sigma) dx_{i_1}[X_{\sigma(1)}] \cdots dx_{i_k}[X_{\sigma(k)}] dx_{i_{k+1}}[X_{\sigma(k+1)}]
\end{aligned}
$$

□

$$\omega \in \Omega^k(U), X_i \in \mathfrak{X}(U), 1 \leqslant i \leqslant k$$

$$
\begin{aligned}
\omega[X_1, \dots, X_k] &\overset{\text{multilinear}}{=} \sum_{i_1, \dots i_k = 1}^{m} X_{1i_1} \cdots X_{ki_k} \omega\left[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right] \\
&\overset{\text{alternierend}}{=} \sum_{\substack{I = \{i_1 < \dots < i_k\} \\ \supset \{1, \dots, n\}}} \sum_{\sigma \in S_k} X_{1i_{\sigma(1)}} \cdots X_{ki_{\sigma(k)}} \omega\left[\frac{\partial}{\partial x_{i_{\sigma(1)}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_{\sigma(k)}}}\right] \\
&\overset{\text{alternierend}}{=} \sum_{I \in I_m^k} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn}\sigma\, \underbrace{\omega\left[\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right]}_{=:\omega_I} X_{1i_{\sigma(1)}} \cdots X_{ki_{\sigma(k)}}
\end{aligned}
$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} dx_I[X_1,\ldots,X_k] &= \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}\sigma dx_{i_1}[X_{\sigma(1)}]\ldots dx_{i_k}[X_{\sigma(k)}] = \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}\sigma X_{\sigma(1)i_1}\cdots X_{\sigma(k)i_k} \\ &= \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}\sigma^{-1} X_{1i_{\sigma^{-1}(1)}}\cdots X_{ki_{\sigma^{-1}(k)}} = \sum_{\sigma\in S_k} \operatorname{sgn}\sigma X_{1i_{\sigma(1)}}\cdots X_{ki_{\sigma(k)}} \end{aligned}$$

Denn $\sigma(j) = l \Leftrightarrow j = \sigma^{-1}(l) \quad \operatorname{sgn}\sigma\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\sigma^{-1} = 1$.

$$\Rightarrow \omega[X_1,\ldots,X_k] = \sum_{I\in I_m^k} \omega_I dx_I[X_1,\ldots X_k].$$

4.5.6 Hilfssatz

Jedes $\omega \in \Omega(U)$ lässt sich schreiben als

$$\omega = \sum_{k=0}^{m}\sum_{I\in I_m^k} \omega_I dx_I$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $\omega_I \in C^\infty(U)$.

Einsformen: $\sum \omega_i dx_i$

Im Allgemeinen wird dann, mit $\omega^i \in \Omega(U)$

$$\begin{aligned} \omega^1 + \omega^2 &= \sum_{k,I\in I_m^k} (\omega_I^1 + \omega_I^2) dx_I \\ \omega^1 \wedge \omega^2 &= \sum_{k,k',I,I'} \omega_I^1\omega_{I'}^2 dx_I \wedge dx_{I'} \end{aligned}$$

Transformationen

$$\begin{array}{ccc} V \subset \mathbb{R}^m & \longrightarrow & U \subset \mathbb{R}^m \\ \Omega(V) & \xleftarrow{\psi^*} & \Omega(U) \end{array}$$

4.5.7 Definition

Für $X_i \in \mathfrak{X}(V), 1 \leqslant i \leqslant k, \omega \in \Omega^k(U)$ setzen wir

$$\psi^*\omega\,[X_1,\ldots,X_k] := \omega[\psi_*X_1,\ldots,\psi_*X_k]\circ\psi$$

Das ist wohldefiniert, weil

$$\psi_* X_i(x) = \sum_{j=1}^m X_{ij}(x)\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = D\psi(x)\left[\sum_{j=1}^m X_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}|_x\right]$$

$$= \sum_{j,k=1}^m X_{ij}(x)\frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}|_{\underbrace{\psi(x)}_{=:y}} = \sum_{k=1}^m \left(\underbrace{\sum_{j=1}^m X_{ij}\frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}}_{\in C^\infty(U)}\right)(\psi^{-1}(y))\frac{\partial}{\partial y_k}|_y$$

Bemerkung

$$\mathrm{Alt}^k(V,W) = \left\{\phi : V^k \to W; \phi \ \text{ multilinear und alternierend } \right\}$$
$$\mathrm{Symm}^k(V,W) = \left\{\phi : V^k \to W; \phi \ \text{ multilinear und symmetrisch } \right\}$$

4.5.8 Hilfssatz

Sei $\omega \in \Omega^k(U)$, dann definiert ω für jedes $x \in U$ ein Element $\omega(x) \in \mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ durch die Vorschrift

$$\omega(x)\left[\check{X}_1, \ldots, \check{X}_k\right] := \omega\left[X_1, \ldots, X_k\right](x)$$

für jede Wahl von Vektorfeldern $X_i \in \mathfrak{X}(U), X_i(x) = \check{X}_i$.

Beweis Es gibt natürlich immer Vektorfelder X_i mit $X_i(x) = \check{X}_i$, z.B. $X_i(x) \equiv \check{X}_i$. Wir müssen deshalb nur zeigen, dass $\omega(x)$ unabhängig von der Wahl der Vektorfelder X_i ist. Seien also $X_i, \tilde{X}_i \in \mathfrak{X}(U)$ mit $X_i(x) = \tilde{X}_i(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\omega[X_1, \ldots, X_k] - \omega[\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_k] \\
&= \omega[X_1 - \tilde{X}_1, X_2, \ldots, X_k] + \omega[\tilde{X}_1, X_2 - \tilde{X}_2, \ldots, X_k] + \ldots \\
&\quad + \omega[\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{k-1}, X_k - \tilde{X}_k] \\
&= \sum_{j=1}^k \omega\left[\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{i-1}, \underbrace{X_i - \tilde{X}_i}_{=0, \text{ bei } x}, X_{i+1}, \ldots, X_k\right]
\end{aligned}$$

Also genügt es zu zeigen, dass $\omega[X_1, \ldots, X_k](x) = 0$, wenn $X_i(x) = 0$ für ein i. O.B.d.A. $X_1(x) = 0$, dann gilt

$$X_1(x+z) = \sum_{i=1}^m z_i \underbrace{\tilde{X}_{1i}(x,z)}_{\in C^\infty(U)}$$

z.B. durch Taylorformel mit Integral-Restglied. Also gilt

$$\omega[X_1, \ldots, X_k](x+z) = \sum_{i=1}^m z_i \omega[\tilde{X}_{1i}(x,z), X_2, \ldots, X_k](x+z) = 0 \text{ für } z = 0$$

Operationen

VL: Mi, 2004-01-21

$\psi : V \ni x = (x_1, \ldots, x_m) \mapsto y = (y_1, \ldots, y_m) \in U$, $U, V \subset \mathbb{R}^m$, X_i, Y_i Vektorfelder.

$$(\star) \qquad \psi^*\omega[X_1, \ldots X_k](x) := \omega(\psi(x))\,[\psi_*(x)X_1, \ldots, \psi_*(x)X_k]$$

4.5.9 Satz

Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ und $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\psi \in C^\infty(V, U)$. Dann definiert $(\star)$ eine $k-$Form $\psi^*\omega \in \Omega^k(V)$ für jedes $\omega \in \Omega^k(U)$.

Beweis

Weil $\omega(y)$ wohldefiniert ist in $\mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ und weil $(\star)$ eine C^∞-Funktion in V definiert, folgt die Behauptung. $\square$

4.5.10 Hilfssatz

Es seien $V \subset \mathbb{R}^n, U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\psi \in C^\infty(V, U)$. Dann gilt für $\omega = \sum_{I \in I_m^k} \omega_I dy_I$:

$$\psi^*\omega = \sum_{I \in I_m^k} \omega_I \circ \psi \,(d(y_{i_1} \circ \psi) \wedge d(y_{i_2} \circ \psi) \wedge \ldots \wedge d(y_{i_k} \circ \psi))$$

Dabei ist $y_i(y) := \langle y, e_i \rangle$, also $y_i \circ \psi = \psi_i$ und $d(y_i \circ \psi)|_x = \sum_k \frac{\partial \psi_i}{\partial x_k}(x) dx_k$.

Beweis

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
&\psi^*\omega[X_1, \ldots, X_k](x) \\
&\quad = \omega(\psi(x))[\psi_* X_1, \ldots \psi_* X_k] \\
&\quad = \sum_{I \in I_m^k} \omega_I(\psi(x)) dy_I \Big|_{\psi(x)} [\psi_* X_1, \ldots \psi_* X_k] \\
&\quad = \sum_{I \in I_m^k} \omega_I(\psi(x)) \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \, dy_{i_1}[\psi_* X_{\sigma(1)}] \cdots dy_{i_k}[\psi_* X_{\sigma(k)}] \\
&\quad \overset{\text{s.o.}}{=} \sum_{I \in I_m^k} \omega_I(\psi(x)) \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \, d(y_{i_1} \circ \psi)|_x [\psi_* X_{\sigma(1)}] \cdots d(y_{i_k} \circ \psi)|_x [\psi_* X_{\sigma(k)}] \\
&\quad = \sum_{I \in I_m^k} \omega_I(\psi(x)) d(y_{i_1} \circ \psi) \wedge \ldots \wedge d(y_{i_k} \circ \psi)|_x [X_1, \ldots, X_k] \\
&\quad = \sum_{I \in I_m^k} \omega_I \circ \psi (d\psi)_I [X_1, \ldots, X_k]
\end{aligned}$$

(Dabei ist $(d\psi)_j = d\psi_j$.)

4.5.11 Hilfsatz

Für $\omega_j \in \Omega(U)$, $j = 1,2$, gilt $\psi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \psi^*\omega_1 \wedge \psi^*\omega_2$, d.h. ψ^* ist ein *Algebra-Homomorphismus*. (ψ^* wird *pull back* genannt.)

Beweis

Es genügt, $\omega_j = \omega_{I_j} dy_{I_j}$ für $I_1, I_2 \subset \{1, \ldots, m\}$ zu betrachten. Dann ist

$$\begin{aligned}\omega_1 \wedge \omega_2 &= \omega_{I_1} dy_{I_1} \wedge \omega_{I_2} dy_{I_2} \\ &= \omega_{I_1} \omega_{I_2} dy_{I_1} \wedge dy_{I_2} \\ &= \pm \omega_{I_1} \omega_{I_2} dy_{I_1 \cup I_2}\end{aligned}$$

Dann wird

$$\begin{aligned}\psi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \pm(\omega_{I_1} \cdot \omega_{I_2}) \circ \psi (d\psi)_{I_1 \cup I_2 = \left\{i_1, \ldots, i_{k_1+k_2}\right\}} \\ &= \pm(\omega_{I_1} \cdot \omega_{I_2}) \circ \psi \left(dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_{k_1+k_2}}\right) \\ &= \omega_{I_1} \circ \psi \cdot \omega_{I_2} \circ \psi (d\psi)_{I_1} \wedge (d\psi)_{I_2} \\ &= \psi^* \omega_1 \wedge \psi^* \omega_2\end{aligned}$$

□

Integration von Differentialformen

Spezielle Differentialformen:

$$\begin{aligned}\Omega^0(U) &= C^\infty(U) \\ \Omega^1(U) &= \left\{ \sum_{i=1}^m \omega_i dx_i \;\middle|\; \omega_i \in C^\infty(U) \right\} \\ \Omega^m(U) \ni \omega &= \omega_{1,\ldots,m} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \leftrightarrow C^\infty(U) \\ w_{1,\ldots,m} &= \omega \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right] \\ \Omega^{m-1}(U) \ni \omega &= \sum_{i=1}^m \omega_i dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_m \leftrightarrow \Omega^1(U).\end{aligned}$$

4.5.12 Definition

Seien $U \subset \mathbb{R}^m, \omega \in \Omega^m(U)$. Wir definieren:

$$\int_U \omega := \int_U \omega \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right] (x) dx \quad \text{(falls existent.)}$$

Dies ist endlich z.B. für $\omega \in \Omega_0^m(U)$!

Erinnerung $\mathbb{R}^2$

regulärer $\mathcal{C}^\infty$ Bogen $= c(I), c'(t) \neq 0, c \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^2),\ \psi = c$

$$\left(\psi^* \omega = \omega(\psi(t)) \left[\psi_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \right] = \omega(\psi(t))[c'(t)]dt \right)$$

Ich kann definieren:

$$\int_I \psi^*\omega := \int \omega(\psi(t))[c'(t)]dt$$

Aber wir wollen definieren $\int_{\psi(U)} \omega$, unabhängig von ψ. Also brauchen wir ein Analogon für reguläre C^∞ Bögen in $\mathbb{R}^2$.

Betrachte eine zusammenhängende Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^m$. Wir nehmen an, dass jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung $B_{\varepsilon(p)}(p)$ bestitzt, mit der Eigenschaft:

1) Es gibt eine offene Menge $V_p \subset \mathbb{R}^k$, $0 \in V_p$, und eine differenzierbare Abbildung $\psi : V_p \to R^m$ mit $\psi(V_p) = B_{\varepsilon(p)}(p) \cap M$.

2) ψ ist eine reguläre Parametrisierung (oder $B_{\varepsilon(p)}(p) \cap M$ ist ein regulär parametrisiertes „Flächen"stück), d.h. ψ ist eine injektive und eigentliche Immersion. (vgl. 4.3.10)

4.5.13 Definition

Jedes $M \subset \mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft, dass M lokal regulär parametrisierbar über $\mathbb{R}^k$ ist, heißt eine *$k-$dimensionale Untermannigfaltigkeit* des $\mathbb{R}^m$.

Beispiele:

1) Regulär parametrisierte C^∞ Bögen sind *lokal* $1-$dimensionale Untermannigfaltigkeiten.
   Beweis: Implizite Funktionen (bzw. der Rangsatz)!
   Global können Probleme auftreten!

2) $f \in C^\infty(\underset{\subset \mathbb{R}^k \text{ offen}}{V}, \mathbb{R}^l)$, setze $\psi : V \ni x \to (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{k+l} \Rightarrow \psi$ ist eine injektive, eigentliche Immersion. D.h. $\mathcal{G}(f)$, der Graph von f, ist regulär parametrisierbar.
   Beweis: Sei $P : \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^k$ die Projektion auf die ersten k Koeffizienten.
   $\Rightarrow\ P \circ \psi(x) = x$, also ist ψ injektiv und eigentlich:
   Ist $K \subset \mathbb{R}^{k+l}$ kompakt, dann

   $$x \in \psi^{-1}(K) \iff \psi(x) \in K \iff x \in P(K) \text{ kompakt}$$

   ψ ist Immersion wegen $\operatorname{rg}_x \psi = k\ \forall x \in V$.

4.5.14 Definition

Wir definieren eine lineare Abbildung $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$ mit $d\big(\Omega^k(U)\big) \subset \Omega^{k+1}(U)$ durch:

$$d(\omega_I dx_I) = dw_I \wedge dx_I$$

wobei $d\omega_I = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx_i$

VL: Mo, 2004-01-26

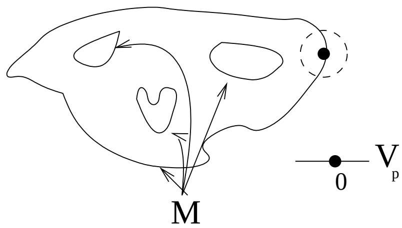
$\Omega(U) \ni \omega = \sum_{I \in I_m^k} \omega_I (df)_I$, wobei $f_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $(df)_I = df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_k}$

Dann wird $\psi^*\omega = \sum_I \omega_I \circ \psi d(f \circ \psi)_I$.

Für $g \in \mathcal{C}^\infty(U) = \Omega^0(U)$ schreiben wir $\psi^* g := g \circ \psi$ (in der Definition enthalten), sodass $\psi^*\omega = \sum_I \psi^*\omega_I (d\psi^* f)_I$, wobei gilt $d\psi^* g = \psi^* dg$, also auch

$$(d\psi^* f)_I = (\psi^* df)_I = \psi^* df_{i_1} \wedge \ldots \wedge \psi^* df_{i_k}$$

$U \subset \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt, $\partial U = m-1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$, kompakt.



Erinnerung Jeder Punkt p von M besitzt eine offene Umgebung U_p in $\mathbb{R}^m$, so dass $U_p \cap M = \psi(V_p)$, wobei gilt

1) V_p ist offen in $\mathbb{R}^{m-1}$, $V_p \ni 0 \overset{\psi}{\mapsto} p \in M$

2) ψ ist eine injektive eigentliche Immersion.

Beispiele

1) Regulär parametrisierte $\mathcal{C}^\infty$-Bögen (-Kurven)

2) Regulär parametrisierte Flächenstücke

4.5.15 Hilfssatz

Es sei $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-m})$ und y_0 sei ein regulärer Wert von F. Dann ist $F^{-1}(y_0)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ der Dimension m.

Beweis

y_0 ist regulärer Wert $\iff \forall p \in F^{-1}(y_0):\ DF(p):\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ ist surjektiv.

Fixiere $p \in F^{-1}(y_0),\ p =: x_0 = (x_0', x_0'')$ mit einer Zerlegung $x = (\underbrace{x'}_{m}, \underbrace{x''}_{n-m})$ so, dass $D_2F(x_0', x_0'')$ invertierbar ist. Das kann erreicht werden durch eine Umnummerierung der Variablen, allgemeiner dadurch, dass ich F durch $F \circ \psi_0$ ersetze mit ψ_0 Diffeomorphismus bei p.

Dann ist der Satz über implizite Funktionen anwendbar (auf $\tilde{F}(x', x'') := F(x', x'') - y_0$). Also gibt es offene Umgebungen V_p von x_0' in $\mathbb{R}^m$ und W_p von x_0'' in $\mathbb{R}^{n-m}$ und eine differenzierbare Abbildung $g:\ V_p \to W_p$ so, dass

$$F^{-1}(y_0) \cap \underbrace{V_p \times W_p}_{=:U_p \text{ Umgebung von } p} = \{(x', g(x')) \in \mathbb{R}^n;\ x \in V_p\}$$

D.h. mit $\psi(x') := (x', g(x'))$ ist $\psi:\ V_p \to F^{-1}(y_0) \cap U_p$ eine injektive und eigentliche Immersion mit Bild $F^{-1}(y_0) \cap U_p$. $\square$

Bemerkungen und Beispiele

1) S^m ist eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{m+1}$: $S^m = F^{-1}(1)$ für $F(x) = |x|^2$, d.h. wir müssen zeigen, dass 1 ein regulärer Wert ist. Nun ist
$$Df(x) = \operatorname{grad} F(x) = 2x \neq 0 \text{ für } |x| = 1$$
$S^m = \partial B_1^m(0)$ ist also gut für partielle Integrationen.

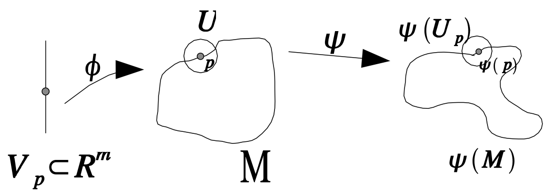
2) Streng genommen haben wir den Hauptsatz bewiesen für $\tilde{F} = F \circ \psi_0$, so dass $\tilde{F}^{-1}(y_0) = \psi_0(\tilde{F}^{-1}(y_0))$.

   Also benötigen wir:

4.5.16 Hilfssatz

Ist $M^m \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit und $\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus, so ist auch $\psi(M^m)$ eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Beweis



Integration $\underset{\text{iterierte 1-dim. Integrale}}{dx_1 \cdots dx_m} \leftrightarrow \underset{m-\text{Form}}{dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m}$

$$\Omega^m(U) \ni \omega = \omega_{1,\ldots,m} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$$
$$\omega_{1,\ldots,m}(x) = \omega\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right]$$
$$\int_U \omega = \int_U \omega\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right](x)dx$$

Zur Erinnerung: Im $\mathbb{R}^2$ gilt $\int_U d\omega(x)dx = \int_{\partial U} \omega$, wobei die *Orientierung von* ∂U wichtig ist!

a) Differentialformen ω ✓

b) Untermannigfaltigkeiten ✓

c) Integration über Untermannigfaltigkeiten mit Orientierung ?

d) $\omega \mapsto d\omega$

4.5.17 Hilfssatz

$$\psi \circ \phi : \underset{\subset \mathbb{R}^k}{W} \xrightarrow{\phi} \underset{\subset \mathbb{R}^n}{V} \xrightarrow{\psi} \underset{\subset \mathbb{R}^m}{U}$$

Es gilt auf $\Omega(U)$:

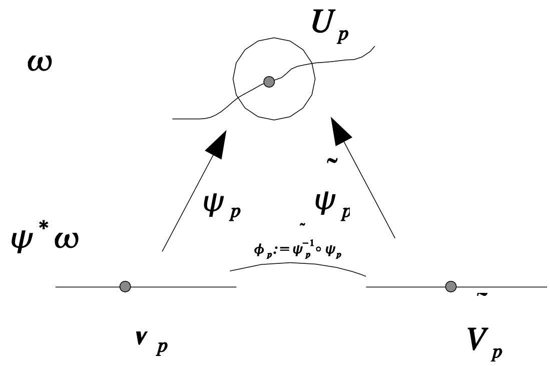
$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$$

Funktorielle Eigenschaft des pullback

$$\phi^* \circ \psi^* : \ \Omega(W) \xleftarrow{\phi^*} \Omega(V) \xleftarrow{\psi^*} \Omega(U)$$

Integration von k-Formen über k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$

1. Fall Betrachte ω mit $\operatorname{supp}\omega \subset U_p$



Versuch Wir definieren

$$\int_{U_p \cap M} \omega := \int_{V_p} \psi_p^* \omega$$

Wie unabhängig ist das von der Wahl von ψ_p? Ist $\tilde{\psi}_p : \ \tilde{V}_p \to U_p \cap M$ eine zweite injektive eigentliche Immersion, dann gilt

$$\int_{\tilde{V}_p} \tilde{\psi}_p^* \omega \overset{?}{\longleftrightarrow} \int_{V_p} \psi_p^* \omega$$

Linke Seite:

$$\int_{\tilde{V}_p} \tilde{\psi}_p^* \omega = \int_{\tilde{V}_p} \underbrace{\tilde{\psi}_p^* \omega \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_k} \right] (x)}_{=: h_p(x)} \, dx_1 \cdots dx_k$$

$$= \int_{\phi_p(V_p)} h_p(x) dx = \int_{V_p} h_p \circ \phi_p(x) \left| \det D\phi_p(x) \right| dx$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned}
\int_{V_p} \psi_p^* \omega &\overset{4.5.17}{=} \int_{V_p} \left(\tilde{\psi}_p^{-1} \circ \psi_p\right)^* \tilde{\psi}_p^* \omega \\
&= \int_{V_p} \left(\tilde{\psi}_p^{-1} \circ \psi_p\right)^* \underbrace{\tilde{\psi}_p^* \omega \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_k}\right](x)}_{h_p} dx_1 \cdots dx_k \\
&\overset{!}{=} \int_{V_p} h_p(\phi_p(x)) \det D\phi_p(x) dx
\end{aligned}$$

Dabei benutzt: Ist $\phi: \mathbb{R}^m \supset V \to U \subset \mathbb{R}^m$ ein Diffeomorphismus, dann ist für $\omega \in \Omega^m(U)$:

$$\begin{aligned}
(\phi^* \omega)(x) &= \omega_{1,\ldots,m} \circ \phi(x) d\phi_1(x) \wedge \ldots \wedge d\phi_m(x) \\
&= \omega_{1,\ldots,m} \circ \phi(x) \sum_{i_1,\ldots,i_m=1}^{m} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial \phi_m}{\partial x_{i_m}} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_m} \\
&= \omega_{1,\ldots,m} \circ \phi(x) \sum_{\sigma \in S^m} \operatorname{sgn} \sigma \frac{\partial \phi_1}{\partial x_{\sigma(1)}} \cdots \frac{\partial \phi_m}{\partial x_{\sigma(m)}} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m \\
&= \det D\phi(x) \omega_{1,\ldots,m} \circ \phi(x) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m
\end{aligned}$$

4.5.18 Definition

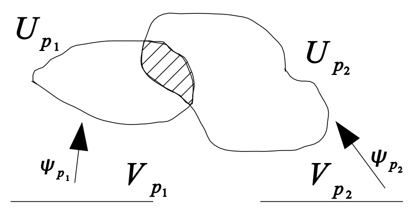
Es sei M^m eine m-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.

1) Jedes Paar (V_p, ψ_p) heißt eine *Karte von M*.

2) Eine Menge $\mathfrak{A} := (V_p, \psi_p)_{p \in M' \subset M}$ heißt ein *Atlas* von M, falls

$$\bigcup_{p \in M'} \psi_p(V_p) \supset M.$$

3) Die Funktionen $\psi_{p_1}^{-1} \circ \psi_{p_2} : \ \psi_{p_2}^{-1}(U_{p_1} \cap U_{p_2}) \to \psi_{p_1}^{-1}(U_{p_1} \cap U_{p_2})$ sind *Diffeomorphismen* (Festlegung auf Graphen, z.B. $\psi_p(x) = (x, g_p(x))$ macht das automatisch!), sie heißen die *Übergangsfunktionen* des Atlas $\mathfrak{A}$.



4) Der Atlas $\mathfrak{A}$ heißt *orientiert*, wenn $\det D(\psi_{p_1}^{-1} \circ \psi_{p_2}) > 0$.

4.5.19 Satz

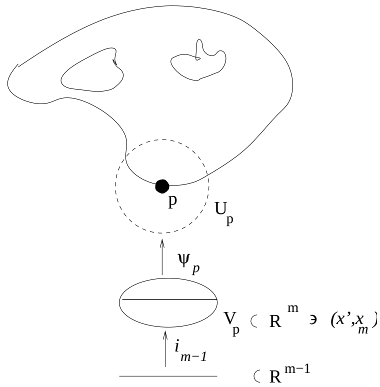
Sei $\mathfrak{A} = (v_{p_k}, \psi_p)_{p \in M'}$ ein orientierter Atlas von M, und es sei $(f_i)_{i=1}^N$ eine Zerlegung der Eins auf M mit $\operatorname{supp} f_i \subset V_{p_i}$ $\forall i$. Dann ist für $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$

$$\int_M \omega := \underbrace{\pm}_{\text{Wahl}} \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^k} \psi_{p_i}^*(f_i\omega).$$

Dieses Integral ist unabhängig von der Wahl der (f_i) und des Atlas $\mathfrak{A}$, solange

VL: Mi, 2004-01-28 für einen beliebigen anderen Atlas $\mathfrak{A}'$ $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{A}'$ orientiert ist.

Satz von Stokes



$$\psi_p(V_p \cap \mathbb{R}^{m-1}) = \partial M \cap U_p, \quad i_{m-1}(x') = (x',0)$$

1) $\partial\mathcal{M}$ ist eine $(m-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$, $\overline{\mathcal{M}}$ und damit $\partial\mathcal{M}$ sei kompakt (z.B. $\mathcal{M} = B_1^m(0)$).

2) Wähle einen endlichen Atlas $(U_{p_i}, \psi_{p_i})_{i=1}^L$ mit
   (a) $\det D\psi_{p_i}(x) > 0 \quad \forall x \in V_{p_i} \forall i$;
   (b) falls $U_{p_i} \cap \partial\mathcal{M} \neq \emptyset$, dann sei $\psi_{p_i}(x', t) \in \mathcal{M}$ für $0 < t < t_0 = t_0(x')$

3) Wähle zu der Überdeckung $(U_{p_i})_{i=1}^L$ von $\overline{\mathcal{M}}$ eine zugehörige Zerlegung der Eins $(f_i)_{i=1}^L$ (d.h. $f_i \in \mathcal{C}_0^\infty(U_{p_i})$ und $\sum f_i(x) = 1$ für x in einer Umgebung von $\overline{\mathcal{M}}$).

4) Für $\eta \in \Omega^m(\mathbb{R}^m)$ setzen wir

$$\int_{\mathcal{M}} \eta := \int_{\mathcal{M}} \eta \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right] dx_1 \cdots dx_m = \sum_{i=1}^L \int_{\mathcal{M}} f_i \eta$$

5) Für $\omega \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ setzen wir

$$\begin{aligned}\int_{\partial\mathcal{M}} \omega &= \sum_{i=1}^L \int_{\partial\mathcal{M}} \underbrace{f_i\omega}_{\operatorname{supp} \subset U_{p_i} = \psi_{p_i}(V_{p_i})} \\ &= \sum_{i=1}^L (-1)^m \int_{\mathbb{R}^{m-1}} i_{m-1}^* \psi_{p_i}^*(f_i\omega) \left[\frac{\partial}{\partial x_1'}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{m-1}'}\right] dx_1' \cdots dx_{m-1}'\end{aligned}$$

4.5.20 Satz

Unter diesen Voraussetzungen gilt für jedes $\omega \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^m)$

$$\int_{\partial\mathcal{M}} \omega = \int_{\mathcal{M}} d\omega \quad \text{mit } d\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^m).$$

Es bleibt noch d zu untersuchen.

Erinnerung (4.5.14) $d : \Omega(U) \to \Omega(U)$ ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit ($g, f_i \in \mathcal{C}^\infty(U)$, $1 \leqslant i \leqslant m$): $d(g(df)_I) = dg \wedge (df)_I \in \Omega^{k+1}(U)$, wenn $I \in I_m^k$.

Diskussion

1) Für $\omega \in \Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$ ist $d\omega = \sum \frac{\partial\omega}{\partial x_i} dx_i$.

2) Was ist $d^2 = d \circ d$?
Betrachte $\omega = g dx_I$, dann wird

$$\begin{aligned} d\omega = dg \wedge dx_I &= \sum_j \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_I \\ d(d\omega) = \sum_j d\frac{\partial g}{\partial x_j} \wedge dx_j \wedge dx_I &= \sum_{j,k} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_I \\ &= \left(\sum_{j<k} + \sum_{j>k} \right) \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k} dx_k \wedge dx_j \wedge dx_I \\ &= \sum_{j<k} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_k} dx_k \wedge dx_j - \frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_j} dx_k \wedge dx_j \right) \wedge dx_I = 0 \end{aligned}$$

3) $\omega \in \Omega^1(U)$, $\omega = \sum_i \omega_i dx_i \Rightarrow$

$$d\omega = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_j$$

Notwendig für $\omega = d\eta$ mit $\eta \in \Omega^0(U)$ ist also $d\omega = 0 \iff \frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}$ die Integrabilitätsbedingung.

4.5.21 Definition

$\omega \in \Omega(U)$ heißt *geschlossen* oder ein *Zykel*, falls $d\omega = 0$; ω heißt *exakt* oder ein *Rand*, falls $\omega = d\eta$ für ein $\eta \in \Omega(U)$. Insbesondere sind alle exakten Formen geschlossen.

Die Vektorräume $(\Omega^k(U))$ zusammen mit den Abbildungen $d_k := d|\Omega^k$ bilden also einen *Komplex*, d.h eine Sequenz von Vektorräumen und linearer Abbildungen mit $d_k \circ d_{k-1} = 0 \quad \forall k$.

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} \Omega^0(U) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(U) \xrightarrow{d_1} \cdots \xrightarrow{d_{m-2}} \Omega^{m-1}(U) \xrightarrow{d_{m-1}} \Omega^m(U) \xrightarrow{d_m} 0$$

Dann gilt im $d_{k-1} \subset$ ker d_k; der Komplex heißt *azyklisch*, wenn im $d_{k-1} =$ ker $d_k \quad \forall k$. Allgemeiner heißen die Vektorräume $H^k(\Omega, d) :=$ ker $d_k/$im d_{k-1} die Homologiegruppen des Komlexes.
Speziell heißt der Komplex $(\Omega(U), d)$ der *de Rahm - Komplex* von U, die (Ko-)Homologiegruppen werden mit $H^k_{\mathrm{dR}}(U)$ bezeichnet.

Bemerkung Die Form $\omega_{\mathrm{w}} = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2\backslash 0)$ ist geschlossen, aber nicht exakt. Denn dann wäre

$$2\pi = \int_{S^1} \omega = \int_{S^1} d\eta = \int_{\partial S^1} \eta = 0.$$

$$\Rightarrow H^1_{\mathrm{dR}}(\mathbb{R}^2\backslash\{0\}) \neq 0$$

4) Wie verhält sich d bezüglich des Wedge-Produktes?
Betrachte $\omega_1 = g_1 dx_{I_1}$, $\omega_2 = g_2 dx_{I_2}$, so dass

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = g_1 g_2 dx_{I_1} \wedge dx_{I_2}.$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= d(g_1 g_2) \wedge dx_{I_1} \wedge dx_{I_2} \\
&= (g_1 dg_2 + g_2 dg_1) \wedge dx_{I_1} \wedge dx_{I_2} \\
&= \sum_i \left(g_1 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + g_2 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} \right) dx_i \wedge dx_{I_1} \wedge dx_{I_2} \\
&= \sum_i \left(\frac{\partial g_2}{\partial x_i} dx_i \wedge g_1 dx_{I_1} \wedge dx_{I_2} + \frac{\partial g_1}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{I_1} \wedge g_2 dx_{I_2} \right) \\
&= (-1)^{\# I_1} \omega_1 \wedge d\omega_2 + d\omega_1 \wedge \omega_2
\end{aligned}$$

D.h für $\omega_i \in \Omega^{k_i}(U)$ gilt

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge d\omega_2.$$

5) Eigentlich müssten wir d definieren durch die Formel $d(g dx_I) = dg \wedge dx_I$, weil das eindeutig ist. Dann folgt

$$d(g df_I) = d(g df_{i_1} \wedge \cdots \wedge df_{i_k}) = dg \wedge (df)_I$$

Also ist das OK!

6) Sei $\psi \in \mathcal{C}^\infty(V, U)$ und $\omega \in \Omega^k(U)$, o.B.d.A. $\omega = g(df)_I$. Dann gilt:

$$\psi^* \omega = g \circ \psi d_V (f \circ \psi)_I = g \circ \psi (\psi^*(d_U f))_I.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
d_V \psi^* \omega &= d_V(g \circ \psi) \wedge d_V(f \circ \psi)_I \\
d_U \omega &= dg \wedge (df)_I \\
\psi^* d_U \omega &= \psi^*(d_U g) \wedge \psi^*(d_U f)_I = d_V(g \circ \psi) \wedge d_V(f \circ \psi)_I = d_V \psi^* \omega
\end{aligned}$$

d.h. $\psi^* d = d\psi^*$ d.h. jedes ψ^* ist eine Komplexabbildung

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^0(U) \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\psi^*"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \cdots \arrow[r, "d_{m-1}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Omega^m(U) \arrow[r] \arrow[d, "\psi^*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^0(V) \arrow[r, "d_0"] & \cdots \arrow[r, "d_{m-1}"] & \Omega^m(V) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Insbesondere induziert ψ^* Abbildungen

$$\begin{array}{ccc}
H^k_{\mathrm{dR}}(U) & \to & H^k_{\mathrm{dR}}(V) \\
\Cup & & \Cup \\
\omega + d\Omega^{k-1}(U) & \mapsto & \psi^*\omega + d\Omega^{k-1}(V)
\end{array}$$

$d\omega = 0$, $d\psi^*\omega = \psi^* d\omega = 0$.

4.5.22 Satz

Die Abbildung d (die Cartansche Abbildung) hat folgende Eigenschaften:

1) Für $\omega_i \in \Omega^{k_i}(U)$ gilt

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1}\omega_1 \wedge d\omega_2.$$

2) Für $\psi \in \mathcal{C}^\infty(V, U)$ gilt

$$d\psi^* = \psi^* d.$$

Beweis des Satzes von Stokes Es genügt, dass $\int_{U_p} d\omega = \int_{U_p \cap \partial\mathcal{M}} \omega$ für $\omega \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ mit $\operatorname{supp}\omega \subset U_p$.

1) Das ist sicher richtig, wenn $U_p \cap \partial\mathcal{M} = \emptyset$. Denn wir haben

$$\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m,$$

also

$$\begin{aligned}
d\omega &= \sum_{i=1}^m d\omega_i(x) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}(x) dx_i \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m \\
&= \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i}(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{U_p} d\omega = 0, \text{ wenn } U_p \cap \partial\mathcal{M} = \emptyset.$$

2) Sei $U_p \cap \partial\mathcal{M} \neq \emptyset$. Dann schreiben wir ($\mathbb{R}^m_+ = \{x \in \mathbb{R}^m | x_m \geqslant 0\}$)

$$\begin{aligned}\int_{U_p} d\omega &= \int_{V_p \subset \mathbb{R}^m} \psi_p^* d\omega = \int_{\mathbb{R}^m_+} d\psi_p^* \omega \\ &\stackrel{?}{=} \int_{V_p \cap \mathbb{R}^{m-1}} (-1)^m i_{m-1}^* \psi_p^* \omega = \int_{U_p \cap \partial\mathcal{M}} \omega\end{aligned}$$

Also betrachte $\tilde{\omega} \in \Omega_0^{m-1}(\mathbb{R}^m)$ und zeige, dass

$$\int_{\mathbb{R}^m_+} d\widetilde{\omega} = (-1)^m \int_{\mathbb{R}^{m-1}} i_{m-1}^* \widetilde{\omega}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}(x) &= \sum_{i=1}^m \widetilde{\omega}_i(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_m \\ d\widetilde{\omega}(x) &= \left(\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\partial \widetilde{\omega}_i}{\partial x_i}(x) \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m\end{aligned}$$

$i_{m-1}(x') = (x',0)$, d.h. $x_i \circ i_{m-1} = \begin{cases} x_i & 1 \leqslant i \leqslant m-1, \\ 0 & i = m \end{cases}$

$i^* \widetilde{\omega}(x') = \widetilde{\omega}_m(x',0) dx_1' \wedge \cdots \wedge dx_{m-1}'$

Also folgt endlich:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m_+} d\widetilde{\omega}(x) &= \int_{\mathbb{R}^m_+} \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \frac{\partial \widetilde{\omega}_i}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \cdots dx_m \\ &= (-1)^{m-1} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \widetilde{\omega}_m}{\partial x_m}(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \cdots dx_m \\ &= (-1)^m \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \widetilde{\omega}_m(x',0) dx_1' \cdots dx_{m-1}' \\ &= (-1)^m \int_{\mathbb{R}^{m-1}} i_{m-1}^* \widetilde{\omega}(x')\end{aligned}$$

VL: Mo, 2004-02-16

Differentialformen in $U \subset \mathbb{R}^m$

1)

$$\Omega(U) = \bigoplus_{k=0}^m \Omega^k(U)$$

$$\Omega^k(U) \ni \omega : \ \mathfrak{X}(U)^k \ni (X_1, \ldots, X_k) \mapsto \omega[X_1, \ldots, X_k] \in \mathcal{C}^\infty(U)$$

$\mathcal{C}^\infty(U)$-linear und alternierend, genauer:

$$\omega[X_1, \ldots, X_k](x) = \omega(x)[X_1(x), \ldots, X_k(x)] \text{ mit } \omega(x) \in \mathrm{Alt}^k(\mathbb{R}^m).$$

2) Ω ist eine graduierte $\mathbb{R}$-Algebra unter dem wedge-Produkt oder äußeren Produkt (Grassmann $\sim$ 1860), wobei für $\omega_i \in \Omega^1(U),\ 1 \leqslant i \leqslant k$:

$$\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k[X_1, \ldots, X_k] = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma \, \omega_1[X_{\sigma(1)}] \cdots \omega_k[X_{\sigma(k)}].$$

3) Es gibt eine lineare Abbildung, die *Cartansche* oder *äußere* Ableitung $d = d_k : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$, $d(\omega_I dx_I) = d\omega_I \wedge dx_I$, $d_0\omega_0 = \sum_i \frac{\partial \omega_0}{\partial x_i} dx_i$, $\omega_0 \in \Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$ *mit*

1) $d_{k+1} \circ d_k = 0$ (Komplexeigenschaft)

2) $d_{k+l}(\omega_k \wedge \omega_l) = d_k\omega_k \wedge \omega_l + (-1)^k \omega_k \wedge d_l\omega_l$ (Leibnizregel)

4) De Rham-Komplex

$$0 \stackrel{d_{-1}}{\to} \Omega^0(U) \stackrel{d_0}{\to} \Omega^1(U) \stackrel{d_1}{\to} \dots \stackrel{d_{m-1}}{\to} \Omega^m(U) \stackrel{d_m}{\to} 0$$

$$\text{de Rham-Cohomologie: } H^k_{dR}(U) = \ker d_k / \mathrm{im}\ d_{k-1}$$

topologische Invarianten
$\beta_k(U) := \dim H^k_{dR}(U)$ heißt die k-te Bettizahl von U.

Beispiel

1) Wir haben gesehen, dass $H^1_{dR}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \neq 0$:

$$\int_{S^1} \omega_W \neq 0, \text{, aber } d_1\omega_W = 0$$

(ω_W: Windungsform)

2) Was ist $H^0_{dR}(U)$?

$$\begin{aligned} H^0_{dR}(U) &= \ker d_0 / \mathrm{im}\ d_{-1} = \ker d_0 = \{f \in \mathcal{C}^\infty(U);\ df = 0\} \\ &= \{f \in \mathcal{C}^\infty(U);\ f \text{ konstant auf jeder Wegzusammenhangskomponente}\} \\ &= \mathbb{R}^{\#\text{ Zshgskomp.}} = \mathbb{R}^{\#\pi_0(U)} \end{aligned}$$

5) Transformationsverhalten

$$\psi \in \mathcal{C}^\infty(V,U),\ V \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^n,\ \omega \in \Omega^k(U) \Rightarrow$$

$$\psi^*\omega[X_1,\dots,X_k](x) = \omega(\psi(x))\,[D\psi(x)[X_1(x)],\dots,D\psi(x)[X_k(x)]]\,,$$

so dass $\psi^*\omega \in \Omega^k(V)$.

Also gibt es eine Abbildung $\psi^* : \Omega(U) \to \Omega(V)$, so dass

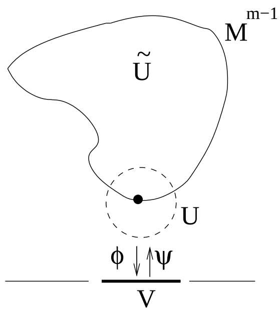
1) ψ^* ist ein graduierter Algebra-Homomorphismus.

2) $\psi^* d_U = d_V \psi^*$, d.h. $\psi^* \ker d_{U,k} \subset \ker d_{V,k}, \psi^* \mathrm{im}\ d_{U,k-1} \subset \mathrm{im}\ d_{V,k-1}$
$\Rightarrow \psi^*$ induziert einen Homomorphismus $H^k_{dR}(U) \to H^k_{dR}(V)$.

3) Ist $\psi' : \mathbb{R}^k \overset{\text{offen}}{\supset} W \to V$ eine weitere Abbildung, so gilt:

$$\psi'^*\psi^*\omega = (\psi \circ \psi')^*\omega \text{ (funktorielle Eigenschaft).}$$

6) Untermannigfaltigkeiten *Atlas* (U_i, ϕ_i)



$\psi \in \mathcal{C}^\infty(V, U)$ ist injektive und eigentliche Immersion, z.B. ein Graph, $\phi \in \mathcal{C}^\infty(U, V)$ mit $\phi \circ \psi = \mathrm{Id}_V$.

7) Differentialformen auf M

$f: \ M \to \mathbb{R}^N$ ist $\mathcal{C}^\infty \iff f \circ \psi \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}^N)$ für alle Karten ψ, also

$$\mathcal{C}^\infty(M) = \{f: \ M \to \mathbb{R}; \ f \circ \psi \in \mathcal{C}^\infty(V) \ \forall \text{ Karten } \psi\}$$
$$\begin{aligned} T_pM &= \{X \in \mathbb{R}^m; \ X = D\psi(\phi(p))[\tilde{X}] \text{ für ein } \tilde{X} \in \mathbb{R}^{m-1} \text{ und eine Karte } \phi \text{ mit } \phi^{-1} = \psi)\} \\ &= \operatorname{im} D\psi(\phi(p)) \end{aligned}$$

Das ist unabhängig von der Wahl der Karte, weil $\psi' = \psi \circ \psi^{-1} \circ \psi'$, also

$$\begin{aligned} D\psi'(\phi'(p))[\mathbb{R}^{m-1}] &= D\psi \circ \psi^{-1} \circ \psi'(\phi'(p))[\mathbb{R}^{m-1}] \\ &= D\psi(\psi^{-1} \circ \psi' \circ \phi'(p)) \left[D(\psi^{-1} \circ \psi')(\psi^{-1} \circ \psi' \circ \phi'(p))[\mathbb{R}^{m-1}]\right] \\ &= D\psi(\phi(p))[\mathbb{R}^{m-1}] \end{aligned}$$

Also setzen wir

$$\mathfrak{X}(M) = \{X \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}^m); \ X(p) \in T_pM \ \forall p \in M\}$$

und definieren

$$\begin{aligned} \Omega^k = \{\omega: \ \mathfrak{X}(M)^k \to \mathcal{C}^\infty(M); \ \omega \text{ ist } \mathcal{C}^\infty(M)\text{-linear u. alternierend}\} \\ \iff \psi^*\omega \in \Omega^k(V) \ \forall \text{ Karten } \psi \end{aligned}$$

8) Orientierbarkeit

M^{m-1} heiß orientierbar, wenn es $\omega \in \Omega^{m-1}(M)$ gibt mit $\omega(p) \neq 0 \ \forall p \in M$.

Sind $\omega_i \in \Omega^{m-1}(M)$ mit $\omega_1(p), \ \omega_2(p) \neq 0 \ \forall p$, so gibt es ein $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(M), \ \alpha(p) \neq 0 \ \forall p$, mit $\omega_1(p) = \alpha\omega_2(p)$. Denn lokal ist $\omega_i(x) = f_i(x)dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{m-1}, \ x_i(p) = \langle e_i, \phi(p)\rangle$ mit $f_i(x) \neq 0 \ \forall x \in V$.

$\Rightarrow \alpha(\psi(x)) := \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ unabhängig von der Wahl der Koordinaten. Jede solche $m-1$-Form wird mit vol_M bezeichnet, *wenn sie einmal gewählt ist.* Wenn M wegzusammenhängend ist, gibt es bis auf Multiplikation mit *positiven* $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen nur zwei Möglichkeiten.

Beispiel: $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^m} = \pm dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$ Die Wahl von vol_M im orientierbaren Fall bestimmt eine *Orientierung* durch Auszeichnung von Karten: wir lassen nur solche ψ zu, die $\psi^* \mathrm{vol}_M = \alpha_\psi \, \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^{m-1}}$ mit $\alpha_\psi > 0$ erfüllen.

Dafür gibt es zwei Möglichkeiten, die durch $\pm \mathrm{vol}_M$ charakterisiert werden.

9) Integration von $m-1$-Formen über M

$(U_i, \phi_i)_{i\in I}$ *orientierter* Atlas, $(f_i) \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ Zerlegung der Eins mit $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$, dann definiere für $\omega \in \Omega_0^{m-1}(M)$:

$$\int_M \omega := \sum_{i\in I} \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \psi_i^* f_i \omega$$

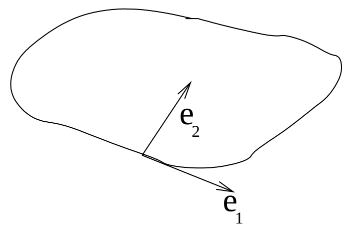
Das ist unabhängig von der Wahl der Zerlegung der Eins und des orientierten Atlas.

10) Randorientierung

$\tilde{U} \overset{\text{offen}}{\subset} \mathbb{R}^m$ orientiert durch $\mathrm{vol}_{\mathbb{R}^m} = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_m$. Wir brauchen aber auch eine Orientierung von $M = \partial\tilde{U}$:

Wir bezeichnen mit $N_a(p)$ die äußere Normale an M im Punkt p; es sei $\tilde{N}_a \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^m)$ ein Vektorfeld mit $\tilde{N}_a|_M = N_a$. Dann setzen wir

$$\mathrm{vol}_M[X_1, \ldots, X_{m-1}](p) := \mathrm{vol}_{\mathbb{R}^m}[\tilde{N}_a, \tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_{m-1}](p)$$



(e_1, e_2) richtig orientiert, also auch $(-e_2, e_1)$

Dann gilt $\boxed{\int_{\tilde{U}} d\omega = \int_{\partial\tilde{U}} i_M^* \omega}$ $i_M : \ M \hookrightarrow \mathbb{R}^m$

Noch zu tun

1) *Poincaré-Lemma:* Wenn $U \simeq \mathbb{R}^m$, dann ist $H^k_{dR}(U) = H^k_{dR}(*) = \begin{cases} 0, & k > 0 \\ \mathbb{R}, & k = 0 \end{cases}$
2) Die Lie-Ableitung und Cartans magische Formel
3) Der Hodge-Operator
4) Die Maxwell'schen Gleichungen der Elektrodynamik (aber vorher die Gleichungen der Mechanik)

   symplektische Form: $\omega \in \Omega^2(M^{2k}),\ d\omega = 0,\ \omega$ nicht entartet, d.h. $\omega^k = \underbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}_{k-\mathrm{mal}}$ ist eine Volumenform.
5) Spezielle Strukturen, die durch Differentialformen definiert werden

Kapitel 5

Gewöhnliche Differentialgleichungen (GDGL)

VL: Mo, 2004-02-02

5.1 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

5.1.1 Die Bewegungsgleichungen

Bewegt sich ein Massepunkt P der Masse m im $\mathbb{R}^3$, so bezeichnen wir die Ortskoordinaten des Massenpunktes zur Zeit t mit $x(t) \in \mathbb{R}^3$.
Geschwindigkeit $\dot{x}(t) := \frac{dx}{dt}(t)$
Beschleunigung $\ddot{x}(t) := \frac{d^2x}{dt^2}(t) \in \mathbb{R}^3$
P bewegt sich unter dem Einfluß einer Kraft $K : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
Die Bewegung wird durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$(1) \quad m\ddot{x}(t) = K(t, x(t), \dot{x}(t))$$

Die sogenannten Newtonschen Bewegungsgleichungen sind ein Beispiel für eine Differentialgleichung 2. Ordnung.

Beispiel (freier Fall) Ein Körper der Masse m fällt aus geringer Höhe P ohne Luftwiderstand auf die Erdoberfläche. Welchen Weg hat er in der Zeit t zurückgelegt? Der Körper habe im Punkt P die Geschwindigkeit v_0. Die Schwerkraft beträgt nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz $K = m \cdot g$ (g = Erdbeschleunigung $\cong 9{,}81 \frac{m}{s^2}$).

$$\begin{aligned} &(1) \quad m\ddot{x}(t) = -mg \\ &(2) \quad \ddot{x}(t) = -g \quad \text{(DGL des freien Falls)} \end{aligned}$$

Durch unbestimmte Integration findet man:

$$\begin{aligned} &(3) \quad \dot{x}(t) = v(t) = -gt + c_1, \quad \dot{x}(0) = c_1 = v_0 \\ &\quad \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + tv_0 + c_2 \quad x_0 = x(0) = c_2 \\ &(4) \quad x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + tv_0 + x_0 \end{aligned}$$

(3), (4) sind die Galileischen Fallgesetze.

5.1.2 Begriff der GDGL

$F : \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m}_{n+1-\text{mal}} \to \mathbb{R}^m$

Eine GDGL n-ter Ordnung:

$$(5) \quad F(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n)}) = 0$$

(n: die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung.) Als Lösung der Gleichung (5) bezeichnen wir eine n-mal differenzierbare Abbildung $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ mit

$$F(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)) = 0 \quad \forall t \in I$$

DGL in impliziter Form.
Explizite Form:

$$(6) \quad x^{(n)} = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)})$$

Eine DGL kann unendlich viele Lösungen haben (Lösungen mit freien Konstanten). Wir sondern eine bestimmte Lösung aus, indem wir zusätzliche Anfangsbedingungen festlegen.
Unter einem Anfangswertproblem versteht man folgendes System:

$$(7) \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)} \\ x^{(n)}(t_0) = f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}), \end{cases}$$

wobei $x_0, \dot{x}_0, \ldots, x_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}^m$ die gewählten Anfangswerte sind.

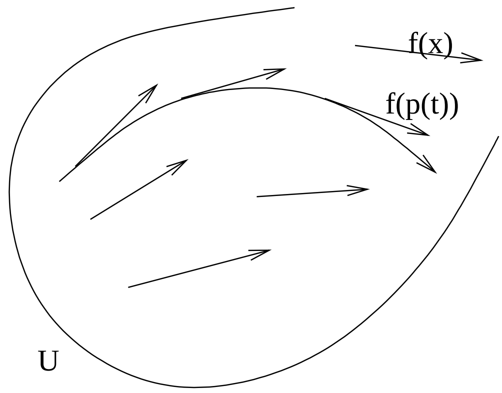
Bemerkung Eine DGL n-ter Ordnung kann durch ein Differentialgleichungssystem mit n Differentialgleichungen 1. Ordnung ersetzt werden. Sei $u_0, \ldots, u_{n-1} : I \to \mathbb{R}^m$.

$$(8) \quad \begin{cases} \dot{u}_0 = u_1 \\ \dot{u}_1 = u_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_{n-1} = u_n \\ \dot{u}_n = f(t, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \end{cases}$$

Ist u eine Lösung von (8), so ist u_0 eine Lösung von (6). Ist φ eine Lösung von (6), so ist $u = (\varphi, \dot{\varphi}, \ldots, \varphi^{(n-1)})$ eine Lösung von (8). Deshalb werden wir hauptsächlich Differentialgleichungen 1. Ordnung behandeln.

5.1.3 Vektorfelder und Integralkurven

Ein zeitunabhängiges Vektorfeld ist eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $f : U \to \mathbb{R}^m,\ U \subset \mathbb{R}^m$



Eine Lösung der DGL $\dot{x} = f(x)$ ist eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung $\varphi : I \to U$ mit $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t))$ (die Geschwindigkeit, d.h. der Tangentialvektor zu ϕ, ist durch das Vektorfeld zu jeder Zeit bestimmt).

Die Lösungen heißen *Integralkurven des Vektorfeldes.* Dieselbe Sprechweise gilt für zeitabhängige Vektorfelder $f : U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

Eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = f(t,x)$, d.h. $\varphi : I \to \mathbb{R}^m \quad (t, \varphi(t)) \subset U,\ \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in I$ heißt *Integralkurve des Vektorfeldes.*
U heißt *Phasenraum* das Vektorfeldes.

5.1.4 Definition

Sei $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m,\ (t,x) \in V.\quad f : V \to \mathbb{R}^m$ heißt *Lipschitz-stetig bezüglich x mit Lipschitz-Konstante L*, wenn

$$||f(t,x_1) - f(t,x_2)|| \leqslant L||x_1 - x_2|| \quad \forall (t,x_1),(t,x_2) \in V.$$

f heißt *lokal Lipschitz-stetig* bezüglich x, falls $f|_K$ für alle K (Kompaktum) $\subset V$ Lipschitz-stetig bezüglich x ist.

5.1.5 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

(Cauchy 1824, Picard 1890, Lindelöf 1894)
$f : K = [t_0 - a, t_0 + a] \times \bar{B}_r^m(x_0) \to \mathbb{R}^m$ sei stetig und Lipschitz-stetig bez. x mit Lipschitzkonstante $L > 0$. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$(9) \qquad \dot{x}(t) = f(t, x(t)),\ x(t_0) = x_0$$

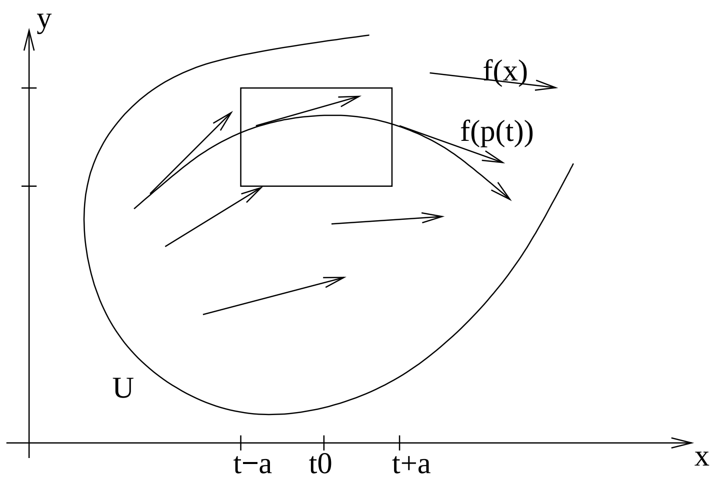
eine eindeutige Lösung auf

$$I = [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \quad \delta < \min\left\{a, \frac{r}{M}, \frac{1}{L}\right\}, \quad M = \sup_K ||f||$$

Die Lösung kann iterativ gewonnen werden:

$$\varphi_0 :\ I \to \mathbb{R}^m, \quad \varphi_0(t) = x_0;$$
$$\varphi_n :\ I \to \mathbb{R}^m, \quad \varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s))ds$$

$(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf I gegen die Lösung φ.



5.1.6 Korollar

$f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bez. x. Dann besitzt das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung auf einem Intervall I.

Lemma φ ist eine Lösung von $\dot{x}(t) = f(t, x(t)), x(t_0) = x_0$ auf $I \Longleftrightarrow \varphi \in C(I)$ und

$$(10) \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds,\ t \in I$$

Beweis von 5.1.5 $(C(I, \mathbb{R}^m), ||\cdot||_\infty)$ ist ein vollständiger, normierter metrischer Raum.

$$X = \{u \in C(I, \mathbb{R}^m) : u(t_0) = x_0,\ ||u - \varphi_0||_\infty \leqslant r\}$$

X ist ein abgeschlossener Unterraum und damit auch ein vollständiger metrischer Raum.
Wir definieren $T : X \to X$ durch

$$T(u)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))ds,\ t \in I$$

φ ist ein Fixpunkt von T $\Longleftrightarrow$ φ erfüllt (10) $\Longleftrightarrow$ φ ist eine Lösung von (9).
Bleibt zu zeigen:
a) T ist wohldefiniert, d.h. $T(X) \subset X$
b) T ist eine Kontraktion.

a) $t \in I, u \in X$

$$\begin{aligned}
\|T(u)(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) ds \right\| \\
&\leqslant |t - t_0| \sup_{s \in [t_0, t]} \|f(s, u(s))\| \\
&\leqslant |t - t_0| \sup_K \|f\|, \qquad (s, u(s)) \in I \times \bar{B}_r^m(x_0) \\
&\leqslant \delta M < r \quad \text{nach der Wahl von } \delta \\
\Rightarrow \|T(u) - \varphi_0\|_\infty &= \sup_{t \in I} \|T(u)(t) - x_0\| \leqslant r \\
\Rightarrow T(u) &\in X
\end{aligned}$$

b) $t \in I,\ u, v \in X$

$$\begin{aligned}
\|T(u)(t) - T(v)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} [f(s, u(s)) - f(s, v(s))]\, ds \right\| \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} \|f(s, u(s)) - f(s, v(s))\|\, ds \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} L \underbrace{\|u(s) - v(s)\|}_{\leqslant \|u - v\|_\infty} ds \\
&\leqslant |t - t_0| L \|u - v\|_\infty \\
&\leqslant \delta L \|u - v\|_\infty \\
\Rightarrow \|T(u) - T(v)\|_\infty &\leqslant \delta L \|u - v\|_\infty \quad \text{mit } \delta L < 1 \\
&\Rightarrow T \text{ Kontraktion}
\end{aligned}$$

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es genau einen Fixpunkt φ, das heißt, es gibt genau eine Lösung für die Differentialgleichung auf I.

VL: Mi, 2004-02-04

Bemerkungen zu 5.1.5

1) Es geht auch mit $\delta = \min\{a, \frac{r}{M}\}$, aber dann kann man den Fixpunktsatz nicht anwenden. Die Iteration von Picard-Lindelöf konvergiert trotzdem gleichmäßig gegen die Lösung.

2) 5.1.5 hat *lokalen* Charakter.

5.1.7 Globaler Eindeutigkeitssatz

Sei $f : I \times \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^m$ ein stetiges und bezüglich x lokal Lipschitzstetiges Vektorfeld. Sei $(t_0, x_0) \in U$ und $\varphi : I \to \mathbb{R}^m$, $\psi : I' \to \mathbb{R}^m$ (I, I' offen) Lösungen des Anfangwertproblems: $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. Dann ist

$$\varphi = \psi \text{ auf } I \cap I'$$

Beweis: Sei $(t_1, t_2) = I \cap I'$. Wir zeigen, dass φ und ψ auf $[t_0, t_2)$ übereinstimmen (analog $(t_1, t_0]$).

$$T := \sup\{\tau \in [t_0, t_2), \varphi = \psi \text{ auf } [t_0, \tau]\}$$

z.z.: $T = t_2$: Nehmen wir an, dass $T < t_2$. Da für alle $s \in [t_0, T)$ gilt $\varphi(s) = \psi(s)$ und φ und ψ stetig in T sind, ist auch $\varphi(T) = \psi(T)$.

$$\underbrace{\varphi(T - \frac{1}{n})}_{\stackrel{n\to\infty}{\to}\varphi(T)} = \underbrace{\psi(T - \frac{1}{n})}_{\stackrel{n\to\infty}{\to}\psi(T)}$$

Nach 5.1.5 (Eindeutigkeitsaussage) $\exists \delta > 0$, so dass $\varphi = \psi$ auf $[T - \delta, T + \delta]$. $\Rightarrow \varphi = \psi$ auf $[t_0, T + \delta]$. Widerspruch zur Wahl von T. □

5.1.8 Definition

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}^m$ ein Vektorfeld. Dann heißt $\varphi : I \to \mathbb{R}^m$ eine *maximale Lösung* von (9), wenn für jede weitere Lösung $\psi : J \to \mathbb{R}^m$ gilt $J \subset I$, $\psi|J = \varphi$.

5.1.9 Globaler Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Sei $f : I \times \mathbb{R}^m \supset U \to \mathbb{R}^m$ ein stetiges und bezüglich x lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld.

(a) Dann existiert zu jedem $(t_0, x_0) \in U$ eine maximale Lösung $\varphi = \varphi(\cdot, t_0, x_0) : I(t_0, x_0) \to \mathbb{R}^m$ des Anfangswertproblems (9). Das maximale Existenzintervall $I(t_0, x_0) = (t_0^-, t_0^+)$ ist offen.

(b) Ist $t_0^+ < \infty$, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und $K \subset U$ kompakt ein $\tau \in (t_0^+ - \varepsilon, t_0^+)$ mit $(\tau, \varphi(\tau)) \notin K$. Analog, wenn $t_0^- > -\infty$.

Kürzer: Ist die Lösung nicht auf eine Halbachse $(t_0, +\infty)$ oder $(-\infty, t_0)$ fortsetzbar, dann verlässt der Graph jede kompakte Menge von U.

Beweis Seien

$$\begin{aligned} t_0^+ &= \sup\{\tau \in \mathbb{R}, \text{ es existiert eine Lösung von (9) auf } [t_0, \tau]\} \\ t_0^- &= \inf\{\tau \in \mathbb{R}, \text{ es existiert eine Lösung von (9) auf } [\tau, t_0]\} \end{aligned}$$

Wir definieren $\varphi : (t_0^-, t_0^+) \to \mathbb{R}^m$, sei $t \in (t_0^-, t_0^+)$, o.B.d.A. $t \in [t_0, t_0^+)$. Wir wählen τ mit $t \in [t_0, \tau] \subset [t_0, t_0^+)$ und setzen $\varphi(t) := \varphi_2(t)$.
Wohldefiniert: weitere ϑ mit $t \in [t_0, \vartheta]$ folgt $\varphi_2(t) = \varphi_\vartheta(t)$ nach 5.1.7. Laut Definition ist φ eine maximale Lösung. Insbesondere kann φ nicht auf eine Lösung auf $[t_0, t_0^+]$ fortgesetzt werden:
Nehmen wir an, dass φ eine Lösung auf $[t_0, t_0^+]$ ist. Laut 5.1.5 gibt es eine lokale Lösung $\psi : (t_0^+ - \delta, t_0^+ + \delta)$ mit $\dot{\psi}(t) = f(t, \psi(t))$ und $\psi(t_0^+) = \varphi(t_0^+)$. Eindeutigkeitsaussage 5.1.5

$$\Rightarrow \psi = \varphi \text{ auf } [t_0^+ - \delta, t_0^+].$$

Wir können nun

$$\tilde{\varphi} : [t_0, t_0^+ + \delta] \to \mathbb{R}^m \quad \tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & t \in [t_0, t_0^+] \\ \psi(t) & t \in [t_0^+ - \delta, t_0^+ + \delta] \end{cases}$$

definieren. $\Rightarrow \tilde{\varphi}$ ist eine Lösung von (9). Widerspruch zur Maximalität von φ. Daraus schließen wir, dass $I(t_0, x_0)$ offen ist.
Nehmen wir an, dass $\exists \varepsilon > 0$, $\exists K \overset{\text{komp}}{\subset} U$ mit $(\tau, \varphi(\tau)) \in K \quad \forall \tau \in (t_0^+ - \varepsilon, t_0^+)$.

$$\begin{aligned} \|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\| &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(s, \varphi(s)) ds \right\| \\ &\leqslant |t_1 - t_2| \sup_{s \in [t_1, t_2]} \|f(s, \varphi(s))\| \\ &\leqslant |t_1 - t_2| \sup_K \|f\|_\infty < \infty \end{aligned}$$

Nach dem Cauchy-Kriterium:

$$\Rightarrow \exists \lim_{t \to t_0^+} \varphi(t) =: \varphi(t_0^+)$$

$$\Rightarrow \varphi : [t_0, t_0^+] \to \mathbb{R}^m \quad \text{stetig}$$

Wir zeigen, dass φ in t_0^+ differenzierbar und eine Lösung von (9) ist.
φ ist stetig auf $[t_0, t_0^+]$ und differenzierbar auf $[t_0, t_0^+)$
$\lim_{t \nearrow t_0^+} \dot{\varphi}(t) = \lim_{t \nearrow t_0^+} f(t, \varphi(t)) = f(t_0^+, \varphi(t_0^+))$, da f, φ stetig sind. Nach dem Mittelwertsatz ist φ in t_0^+ differenzierbar und

$$\dot{\varphi}(t_0^+) = f(t_0^+, \varphi(t_0^+)).$$

Widerspruch.

5.1.10 Satz

Sei $f : I \times V \to \mathbb{R}^m$, $I \subset \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^m$ mit den üblichen Voraussetzungen. Sei $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}_+$ stetig, so dass

$$\|f(t, x)\| \leqslant \alpha(t) \|x\| + \beta(t) \quad \forall (t, x) \in I \times V$$

$\Rightarrow$ Für alle $(t_0, x_0) \in I \times V$ hat $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ eine eindeutige Lösung auf I.

Beweis *Lemma von Gronwall*
Seien $n, \alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ stetig. Gilt $u(t) \leqslant \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)|u(s)|ds$, dann gilt

$$u(t) \leqslant \alpha(t) + \left| \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s) e^{\int_s^t \beta(o) do} ds \right|.$$

Nach Voraussetzung und Lemma von Gronwall folgt, dass u auf allen beschränkten Intervallen beschränkt sein muss. Nach 5.1.9 muss die Lösung auf I definiert sein. Sei φ eine Lösung

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

$$\|\varphi(t)\| = \|\varphi(t_0)\| + \int_{t_0}^t (\alpha(s) \|\varphi(s)\| + \beta(s)) ds$$

5.1.11 Definition

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $A: I \to M_n(\mathbb{R})$, $b: I \to \mathbb{R}^n$ stetig. Die DGL $\dot{x} = A(t)x + b$ (11) heißt die inhomogene *lineare DGL* (homogene DGL, wenn $b = 0$). Eine Lösung ist eine Abbildung $\phi: I \to \mathbb{R}^n$ mit $\dot{\phi} = A(t)\phi(t) + b(t)$

5.1.12 Korollar

Für $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ hat (11) eine eindeutig bestimmte Lösung auf I.

Beweis: Sei $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f(t,x) = A(t) \cdot x + b(t)$. f ist stetig und lokal Lipschitz-stetig bez. x und erfüllt die Voraussetzungen von 5.1.10.

5.2 Lineare Differentialgleichungen

VL: Mo, 2004-02-09

Sei $I \in \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in C(I, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)), b \in C(I, \mathbb{R}^m)$

$$(1) \quad \dot{x} = a(t)x + b(t)$$

ist eine *inhomogene* (falls $b \neq 0$) bzw. *homogene* (falls $b \equiv 0$) *lineare Differentialgleichung 1. Ordnung* im $\mathbb{R}^m$.
Lösung:

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^m \quad \dot{\varphi}(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$$

kanonische Basis:

$$a(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leqslant i,j \leqslant m} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\varphi}_1(t) = a_{11}(t)\varphi_1(t) + \ldots + a_{1m}(t)\varphi_m(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_m(t) = a_{m1}(t)\varphi_1(t) + \ldots + a_{mm}(t)\varphi_m(t) + b_m(t) \end{cases}$$

Wir wissen bereits, dass das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{a}(t)x + b(t) \\ x(\tau) = x_0 \end{cases}$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi(\cdot, \tau, x_0) : I \to \mathbb{R}^m$ besitzt.

5.2.1 Satz

Die Gesamtheit der Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung

$$(3) \quad \dot{x} = a(t)x$$

ist ein Untervektorraum $V \subset C^1(I, \mathbb{R}^m)$, $\dim V = m$. Die Abbildung

$$T_\tau : \mathbb{R}^m \to V : \quad T_\tau(\xi) = \varphi(\cdot, \tau, \xi) \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$$

(wobei τ fest) ist ein Isomorphismus.

Beweis

V **ist ein Vektorraum** (In der Physik wird die Eigenschaft, dass Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen sind, Superpositionsprinzip genannt.)

$$\varphi, \psi \in V : \quad \frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial t} = \dot{\varphi} + \dot{\psi} = a(t)\varphi + a(t)\psi = a(t)(\varphi + \psi)$$

T **ist linear** $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^m$

$$T(\lambda\xi + \mu\eta) = \lambda T(\xi) + \mu T(\eta) \Leftrightarrow \varphi(\cdot, \tau, \lambda\xi + \mu\eta) = \lambda\varphi(\cdot, \tau, \xi) + \mu\varphi(\cdot, \tau, \eta)$$

Auf beiden Seiten steht eine Lösung von (3) mit Anfangswert $\lambda\xi + \mu\eta$. Mit Satz 5.1.7 folgt die Gleichheit.

T **ist injektiv**

$$\eta \in \ker(T) \iff T(\eta) = 0 \iff \varphi(\cdot, \tau, \eta) = 0 \ \forall t \Rightarrow \eta = \varphi(\tau, \tau, \eta) = 0$$

T **ist surjektiv** Sei $\varphi \in V$ und $\eta = \varphi(\tau)$
$\Rightarrow \quad \varphi(\cdot, \tau, \eta)$
Die Bijektivität lässt sich auch direkt durch Angabe der Umkehrabbildung

$$T_\tau^{-1} : V \to \mathbb{R}^m \quad T_\tau^{-1}(\varphi) = \varphi(\tau) \in \mathbb{R}^m$$

zeigen.

5.2.2 Folgerungen

1) Sei $\varphi \in V$; $\varphi(\tau) = 0 \Rightarrow \varphi \equiv 0$

2) Eine Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ von V wird *Fundamentalsystem* genannt. Die dazugehörige Darstellungsmatrix

$$\Phi : I \to M_m(\mathbb{R}) : \quad \Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \quad \varphi_i : I \to \mathbb{R}^m,\ \varphi_i \in V$$

nennt man *Fundamentalmatrix* der Gleichung (3).
$\boxed{\dot{\Phi} = a(t)\Phi} \Leftrightarrow \dot{\varphi}_i = a(t)\varphi_i \quad i = 1, \ldots, m$

$$V = \{\Phi \cdot c |\ c \in \mathbb{R}^m\}\,; \ \Leftrightarrow \varphi = c_1\varphi_1 + \ldots + c_m\varphi_m$$

3) Eine Fundamentalmatrix mit der Eigenschaft $\Phi(\tau) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^m}$, heißt *Hauptfundamentalmatrix.*

$$\Phi_\tau \text{ erfüllt } \begin{cases} \dot{\Phi} = a(t)\Phi \\ \Phi(\tau) = \mathrm{Id} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\varphi}_i = a(t)\varphi_i \\ \varphi_i(\tau) = e_i \end{cases} \quad i = 1, \ldots, m$$

Jede Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = a(t)x$, $x(\tau) = \xi$ lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$\varphi(t, \tau, \xi) = \Phi_\tau(t)\xi \quad , t \in I$$

Allgemein heißt $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ mit $\varphi_i \in V$ (beliebige Lösung) *Lösungsmatrix.*
Die *Wronski-Determinante*: $W(t) := \det \Phi(t)$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ linear unabhängig $\Leftrightarrow (c_1\varphi_1 + \ldots + c_m\varphi_m = 0 \Rightarrow c_1 = \ldots = c_m = 0)$

5.2.3 Satz (Liouville)

Sei Φ eine Lösungsmatrix. Dann erfüllt die Wronski-Determinante die Gleichungen

$$(4) \quad \dot{x} = \operatorname{tr}(a(t)) \cdot x$$

und

$$(5) \quad x(t) = x(\tau) \exp\left(\int_\tau^t \operatorname{tr}(a(s)) ds\right)$$

Beweis: $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$

$$\begin{aligned}
\dot{W}(t) &= \frac{d}{dt}(\det \Phi(t)) \\
&= \sum_{j=1}^m \det(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}, \dot{\varphi}_j, \varphi_{j+1}, \ldots, \varphi_m)(t) \\
&= \sum_{j=1}^m \det(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{j-1}(t), a(t)\varphi_j(t), \varphi_{j+1}(t), \ldots, \varphi_m(t))
\end{aligned}$$

Sei $\Phi = \Phi_\tau$ Hauptfundamentalmatrix, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\dot{W}_\tau(\tau) &= \sum_{j=1}^m \det(\varphi_1(\tau), \ldots, \varphi_{j-1}(\tau), a(\tau)\varphi_j(\tau), \varphi_{j+1}(\tau), \ldots, \varphi_m(\tau)) \\
&= \sum_{j=1}^m \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & a_{1j}(\tau) & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & a_{2j}(\tau) & \ldots & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{mj}(\tau) & \ldots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^m a_{jj}(\tau) = \operatorname{tr}(a(\tau)) \cdot 1 = \operatorname{tr}(a(\tau)) W_\tau(\tau)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (6) \quad \dot{W}_\tau(\tau) = \operatorname{tr}(a(\tau)) W_\tau(\tau)$$

Zurück zu $\Phi : \exists C \in M_m(R) : \Phi = \Phi_\tau \cdot C$

$$\Rightarrow \underbrace{\det \Phi}_{=W} = \underbrace{\det \Phi_\tau}_{=W_\tau} \cdot \det C$$

$$\dot{W}(\tau) = (\dot{W})_\tau \det C \overset{(6)}{=} \operatorname{tr}(a(\tau)) \underbrace{W_\tau(\tau) \det C}_{W(\tau)} = \operatorname{tr} a(\tau) W(\tau)$$

Da τ beliebig gewählt war, erfüllt W die Gleichung (4).
Man verifiziert leicht, dass auch

$$\exp\left(\int_\tau^t \operatorname{tr}(a(s)) ds\right)$$

die Gleichung (4) erfüllt. Aus der Eindeutigkeit folgt: W erfüllt auch (5). □

5.2.4 Folgerung

Die Wronski-Determinante ist entweder $\neq 0$, oder $\equiv 0 \, \forall t \in I$
Φ ist eine Fundamentalmatrix $\Leftrightarrow W(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$

5.2.5 Satz

Die Gesamtheit der Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$(1) \quad \dot{x} = a(t)x + b(t)$$

ist ein affiner Raum $\varphi + V \subset C^1(I, \mathbb{R}^m)$, wobei φ eine beliebige Lösung von (1) und V der Lösungsraum des zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichungssystems $\dot{x} = a(t)x$ ist.

Beweis: Sind φ, ψ Lösungen von (1), so folgt $\varphi - \psi \in V$. □

5.2.6 Satz (Methode der Variation der Konstanten)

Das Anfangswertproblem

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x} = a(t)x + b(t) \\ x(\tau) = x_0 \end{cases}$$

hat die eindeutig bestimmte Lösung

$$\varphi(t, \tau, x_0) = \Phi_\tau(t)x_0 + \int_\tau^t \Phi_\tau(t)\Phi_\tau^{-1}(s)b(s)ds,$$

wobei Φ_τ die Hauptfundamentalmatrix ist.

$$\dot{\Phi}_\tau = a(t)\Phi_\tau \quad \Phi_\tau(\tau) = Id$$

Beweis: Wir bestimmen eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung $\dot{x} = a(t)x + b(t)$. Sei φ eine Lösung von $\dot{x} = a(t)x$, dann folgt:

$$\Rightarrow \varphi(t) = \Phi_\tau(t) \cdot c \qquad c = (c_1, \ldots, c_m)^T$$

Wir variieren die Konstante $\varphi(t) = \Phi_\tau(t) \cdot c(t)$ und setzen diesen Ansatz in

$$\dot{\varphi}(t) = a(t)\varphi(t) + b(t)$$

ein:

$$\Rightarrow \dot{\Phi}_\tau(t)c(t) + \Phi_\tau(t)\dot{c}(t) = a(t)\Phi_\tau(t)c(t) + b(t)$$
$$\overset{\dot{\varphi}=a(t)\varphi}{\Rightarrow} \Phi_\tau(t)\dot{c}(t) = b(t)$$
$$\Rightarrow \dot{c}(t) = \Phi_\tau^{-1}(t)b(t)$$
$$\Rightarrow c(t) = c_0 + \int_\tau^t \Phi_\tau^{-1}(s)b(s)ds$$
$$\Rightarrow \varphi(t) = \Phi_\tau(t)c(t) = \Phi_\tau(t)c_0 + \Phi_\tau(t)\int_\tau^t \Phi_\tau^{-1}(s)b(s)ds$$
$$\overset{t=\tau}{\Rightarrow} \varphi(\tau) = \Phi_\tau(\tau)c_0 + \Phi_\tau(\tau)\int_\tau^\tau \Phi_\tau^{-1}(s)b(s)ds = \mathrm{Id}c_0 = c_0$$
$$\overset{\varphi(\tau)=x_0}{\Rightarrow} c_0 = x_0$$

$$\Rightarrow \varphi(t,\tau,x_0) = \Phi_\tau(t)x_0 + \int_\tau^t \Phi_\tau(t)\Phi_\tau^{-1}(s)b(s)ds$$

□

Differentialgleichungen, Gewöhnliche

VL: Mi, 2004-02-11

(später auch Partielle (d, Δ))

$$\text{AWP}\begin{cases} y'(t) = f(t,y(t)), & t \in I \\ y(t_0) = y_0, & t_0 \in I \end{cases}$$

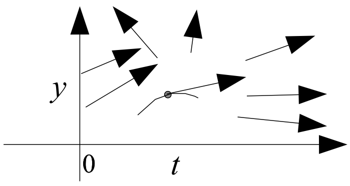
$f:\ I' \times \mathbb{R}^m \overset{\text{stetig}}{\rightarrow} \mathbb{R}^m$, d.h. $y:\ I \to \mathbb{R}^m$ $\mathcal{C}^1$-Weg,
besser: f Lipschitz-stetig in y

Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Wenn f stetig und bez. y lokal Lipschitz-stetig ist, dann gibt es zu $t_0 \in I,\ y_0 \in \mathbb{R}^m$ genau eine maximale Lösung $y:\ I' \to \mathbb{R}^m$ des AWP.

Beispiele

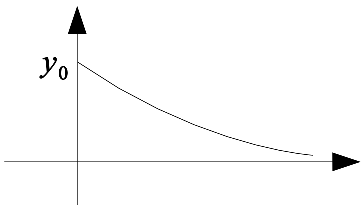
zunächst für $m = 1$
Richtungsfeld:



$y'(t) \equiv 0 \Rightarrow y(t) = \text{const}$
Es gibt immer eine "Integrationskonstante".

1) $y'(t) = \lambda y(t),\ y(t_0) = y_0 \Rightarrow y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}$

1b) $\lambda < 0,\ t_0 = 0$: Radioaktiver Zerfall: ${}_Z\mathrm{K}^{D=Z+N} \rightarrow_{Z-2} \mathrm{K}^{D-4} +_2 \mathrm{He}^4$



$$y(T_{\frac{1}{2}}) = y_0 e^{-|\lambda|T_{\frac{1}{2}}} = \frac{y_0}{2} \iff e^{-|\lambda|T_{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \iff T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log 2}{|\lambda|} \approx \frac{0{,}693}{|\lambda|}$$

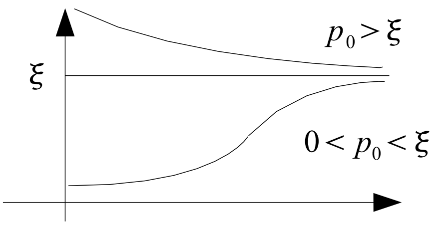
El.	${}_{92}U^{238}$	${}_{88}Ra^{226}$	${}_{82}Pb^{210}$	${}_{6}C^{11}$
$T_{\frac{1}{2}}$	$4{,}5 \cdot 10^9$ a	1622 a	22 a	20,4 min

1896 Becquerel
1898 Elser & Geitel
1903 Rutherford

1b) $\lambda > 0$: Exponenentielles Wachstum $p(t) = p_0 e^{\lambda t}$, $\lambda > 0$ – kommt nicht vor über längere Zeit

Realistischeres Modell

$$p'(t) = \underbrace{g(t, p(t))}_{\text{Geburtenrate}}\, p(t) - \underbrace{s(t, p(t))}_{\text{Sterberate}}\, p(t)$$



Kurve des logistischen Wachstums

Ansatz $r(t, p) = (g - s)(t, p)$ Reproduktionsrate

$$r(t, p) := \beta(\xi - p) \Rightarrow p'(t) = \beta(\xi - p)p = \underbrace{\beta\xi}_{\alpha}\, p - \beta p^2$$

$$\begin{cases} p'(t) = (\alpha - \beta p)p, \quad 0 < p < \xi,\ p > \xi \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{p'(t)}{p(\alpha - \beta p)} = \frac{d}{dt} \int_{p_0}^{p(t)} \frac{ds}{s(\alpha - \beta s)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow t &= \int_{p_0}^{p(t)} \frac{ds}{s(\alpha - \beta s)} = \int_{p_0}^{p} \frac{1}{\alpha} \left[\frac{1}{s} + \frac{\beta}{\alpha - \beta s} \right] ds \\ &= \frac{1}{\alpha} \left[\log \left| \frac{p}{p_0} \right| + \log \left| \frac{\alpha - \beta p_0}{\alpha - \beta p} \right| \right] \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{p}{p_0} \cdot \frac{\alpha - \beta p_0}{\alpha - \beta p} \right| \end{aligned}$$

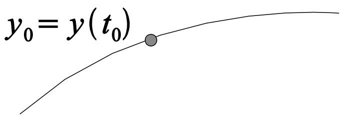
$$\Rightarrow e^{\alpha t} = \underbrace{\left|\frac{\alpha - \beta p_0}{p_0}\right|}_{\gamma} \left|\frac{p}{\alpha - \beta p}\right|$$

$$\Rightarrow p = (\alpha - \beta p)\frac{e^{\alpha t}}{\gamma}$$

$$\iff p + \frac{\beta}{\gamma} e^{\alpha t} p = \frac{\alpha}{\gamma} e^{\alpha t}$$

$$\iff p(t) = \frac{\frac{\alpha}{\gamma} e^{\alpha t}}{1 + \frac{\beta}{\gamma} e^{\alpha t}} \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} \frac{\frac{\alpha}{\gamma}}{\frac{\beta}{\gamma}} = \xi$$

2) Newton



$y'(t) =$ Momentangeschwindigkeit

$$\boxed{K(y(t)) = my''(t) = \frac{d}{dt} \underbrace{(my'(t))}_{\text{Impuls}}}$$

$$z(t) := y'(t),\ z'(t) = y'(t) = \frac{1}{m} K(y(t))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y'(t) &= z(t) \quad & y(t_0) &= y_0 \\ z'(t) &= K(y(t)) \quad & z(t_0) &= y'(t) \end{aligned}$$

$\boxed{y'(t) = f(y(t))}$ autonome Dgl. 1. Ordnung

Daraus resultiert das *geometrische Problem:* gegeben ein $\mathcal{C}^\infty$-Vektorfeld $f:\ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, finde $\mathcal{C}^\infty$-Wege $y:\ I \to \mathbb{R}^m$ mit

$$(**) \quad y'(t) = f(y(t)),\ y(t_0) = y_0$$

5.2.7 Definition

Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ ein $\mathcal{C}^\infty$-Vektorfeld in U. Eine Lösung des AWP (**) in U heißt *Integralkurve an f durch den Punkt* y_0. Die maximale Lösung des AWP in U heißt maximale Integralkurve durch y_0 und wird mit

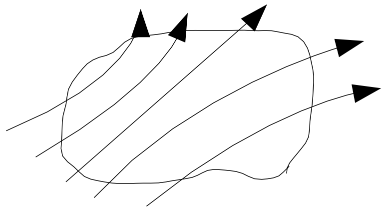
$$c_{y_0}:\ (a_{y_0}, b_{y_0}) \ni t \mapsto c_{y_0}(t) \in U$$

bezeichnet, wobei $-\infty \leqslant a_{y_0} < 0 < b_{y_0} \leqslant \infty$.

Das Vektorfeld heißt *vollständig*, wenn $a_{y_0} = -\infty,\ b_{y_0} = \infty\ \forall y_0 \in U$.

Bemerkungen

1) Übliches Bild:



2) Ist y eine Integralkurve an f durch y_0, $y:\ 0 \in I \to U$, $0 \neq \tau \in I$, so ist $\tilde{y}(t) := y(t+\tau)$ eine Integralkurve an f durch $y(\tau)$ für $|t| < \varepsilon \ll 1$.

   Denn $\tilde{y}'(t) = y'(t+\tau) = f(y(t+\tau)) = f(\tilde{y}(t))$.

Konkret lösbare Differentialgleichungen

1) Gleichungen mit *getrennten Variablen*:

Es sei $m = 1$ und $f(t,y) = g(y) \cdot f(t)$ für $t \in (a,b)$, $y \in (c,d)$, und es sei $g(y) \neq 0$, $f, g \in \mathcal{C}^1$;

AWP mit $y(t_0) = y_0$.

$$\textit{Dgl.:}\ \frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t) = \frac{d}{dt}\int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{g(s)} =: \frac{d}{dt} G_{y_0}(y(t))$$

$$\Rightarrow G_{y_0}(y(t)) = \int_{t_0}^{t} f(x)dx =: F_{t_0}(t)$$

Da G stetig und monoton ist, folgt

$$G_{y_0} : (\alpha, \beta) \to (\gamma, \delta);$$
$$G_{y_0}^{-1} : (\gamma, \delta) \to (\alpha, \beta)$$

$y(t) = G_{y_0}^{-1}(F_{t_0}(t))$, definiert für alle t mit $F_{t_0}(t) \in (\gamma, \delta)$.

5.2.8 Satz (DGl mit getrennten Veränderlichen)

f, g stetig in (a,b) bzw. (c,d), $g(y) \neq 0$. Wähle $t_0 \in (a,b)$, $y_0 \in (c,d)$ und bestimme

$$G_{y_0}(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} :\ (c,d) \to (\alpha(y_0), \beta(y_0)) \ni 0$$

und $G_{y_0}^{-1} :\ (\alpha(y_0), \beta(y_0)) \to (c,d)$.

Mit $F_{t_0}(t) := \int_{t_0}^{t} f(x)dx$ ist dann $y(t) = G_{y_0}^{-1} \circ F_{t_0}(t)$ eine Lösung des AWP für $t \in F_{t_0}^{-1}(\alpha(y_0), \beta(y_0)) \neq \emptyset$.

Die Eindeutigkeit der Lösungen folgt für y_0 mit $g(y_0) \neq 0$ (ohne Beweis).

Übung: Für $y'(t) = |y(t)|^{\frac{1}{2}}$ ergibt sich keine eindeutige Lösung.

VL: Mo, 2004-02-16

GDGL

$$\text{AWP}\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \quad t_0 \in (a,b), y_0 \in U \end{cases}$$

$f:\ (a,b) \times U \to \mathbb{R}^m$ stetig und lokal Lipschitz-stetig in y. Das AWP ist stets eindeutig und maximal lösbar.

Beispiele

Wachstums- und Zerfallsprozesse (Radioaktivität, Populationsdynamik – hier: Logistische Gleichung)
$\Rightarrow$ Gleichungen mit getrennten Veränderlichen ($m = 1$)

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = g(t)dt \textit{ formal}$$

Autonomer Fall $f(t, y(t)) \equiv \tilde{f}(y(t))$ keine explizite Abhängigkeit von der Zeit. Interpretation der Lösungen als Integralkurven von Vektorfeldern

Lineare Gleichungen, d.h. $f(t, y(t)) = A(t) \cdot y(t),\ A(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$
I.allg. schon behandelt:

- Fundamentalmatrix $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$
- Wronskideterminante $W(t) = \det Y(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds}$

Nachteil: Die Lösungen sind i.allg. nicht explizit berechenbar.

Spezialfall: f ist ein lineares Vektorfeld
$\Rightarrow$ Die Gleichung ist autonom.
$\Rightarrow$ $A(t) \equiv A(t_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$

$m = 1$

$$y'(t) = ay(t),\ y(t_0) = y_0 \rightsquigarrow y(t) = e^{a(t-t_0)} y_0 = \left(\sum_{j \geqslant 0} \frac{a^j (t-t_0)^j}{j!} \right) y_0$$

$m \geqslant 1$**: Formaler Ansatz**

$$y(t) = \sum_{j \geqslant 0} t^j B_j y_0,\ B_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m) \Rightarrow B_0 = I,\ y(0) = y_0$$

$$y'(t) = \sum_{j \geqslant 1} t^{j-1} B_j y_0 = \sum_{j \geqslant 0} (j+1) t^j B_{j+1} y_0 \overset{!}{=} \sum_{j \geqslant 0} t^j A B_j y_0$$

$$\text{d.h. } (j+1) B_{j+1} = A B_j \Rightarrow B_{j+1} = \frac{A B_j}{j+1} \Rightarrow B_j = \frac{A^j}{j!}$$

Also sollte die Lösung des AWP $(*)\begin{cases} y'(t) = a \cdot y(t), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ gegeben sein durch

$$y(t) = \sum_{j\geqslant 0} \frac{t^j}{j!} A^j \cdot y_0 =: e^{tA} y_0$$

5.2.9 Hilfssatz

1) Für $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ ist die Abbildung $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{At} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ wohldefiniert und unendlich oft differenzierbar mit

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^k e^{At} = A^k e^{At}$$

1') Das AWP $(*)$ wird gelöst durch $y(t) = e^{At} y_0$.

2) Es gilt (mit $\|A\| = \sup_{x\leqslant 1} |Ax|$)

$$\left\|e^{At}\right\| \leqslant e^{|t|\|A\|}.$$

3) Es gilt

$$e^{tA} \cdot e^{sA} = e^{(t+s)A}.$$

4) Wenn $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ mit $[A, B] := AB - BA = 0$, so gilt

$$e^{t(A+B)} = e^{tA} \cdot e^{tB}.$$

5)

$$\det e^{At} = e^{t \operatorname{tr} A} \quad \text{(Spezialfall von 5.2.3)}$$

Beweis 1) Wir müssen die Konvergenz der Folge $Y_n(t) := \sum_{j=0}^n \frac{t^j}{j!} A^j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$ zeigen.

Vorbemerkung: Für $x \neq 0$ ist $|Ax| = |x| \left|A\frac{x}{|x|}\right| \leqslant \|A\| \, |x|$ und $|A^2 x| = |A(Ax)| \leqslant \|A\| \, |Ax| \leqslant \|A\|^2 |x| \Rightarrow \left\|A^2\right\| \leqslant \|A\|^2$, induktiv $\left\|A^j\right\| \leqslant \|A\|^j$.

Nun schätzen wir ab:

$$\begin{aligned}\|Y_{n+k}(t) - Y_n(t)\| &= \left\|\sum_{j=n+1}^{n+k} \frac{t^j}{j!} A^j\right\| \leqslant \sum_{j=n+1}^{n+k} \left\|\frac{t^j}{j!} A^j\right\| = \sum_{j=n+1}^{n+k} \frac{|t|^j}{j!} \left\|A^j\right\| \\ &\leqslant \sum_{j=n+1}^{n+k} \frac{(|t| \, \|A\|)^j}{j!} < \varepsilon \text{ für } n \geqslant n(\varepsilon, |t|, \|A\|)\end{aligned}$$

D.h., die Folge konvergiert, und gleichmäßig in $[-T, T]$ $\forall T > 0$.
Es folgt, dass

$$\left\|e^{tA}\right\| = \lim_{n\to\infty} \left\|\sum_{j=0}^n \frac{(tA)^j}{j!}\right\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^n \frac{(|t| \, \|A\|)^j}{j!} \leqslant e^{|t|\|A\|} \Rightarrow \text{ 2)}$$

3)

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(t+s)^j}{j!}A^j=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}t^k s^{j-k}A^j=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j}\frac{(tA)^k}{k!}\frac{(sA)^{j-k}}{(j-k)!}$$
$$=\sum_{j,k\geqslant 0}\frac{(tA)^k}{k!}\frac{(sA)^j}{j!}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(tA)^j}{j!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(sA)^k}{k!}$$

wegen der “absoluten Konvergenz”

Was ist die Ableitung von e^{tA} im Punkte t_0?

$$e^{(t_0+h)A}-e^{t_0A}=e^{t_0A}e^{hA}-e^{t_0A}=e^{t_0A}(-I+e^{hA})$$
$$=e^{t_0A}\left(\sum_{j\geqslant 1}\frac{h^j}{j!}A^j\right)=e^{t_0A}(hA+R(h,A)),$$

wobei (mit $|h|\leqslant 1$): $\|R(h,A)\|\leqslant\sum_{j\geqslant 2}\frac{|h|^j}{j!}\|A\|^j\leqslant|h|^2e^{\|A\|}$.

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA}\overset{\text{ind.}}{\Rightarrow}\left(\frac{d}{dt}\right)^k e^{At}=A^ke^{At}$$

4) $[A,B]=0\Rightarrow[A^j,B]=0\ \forall j\in\mathbb{N}\Rightarrow[e^{tA},B]=0$

Dann wird das AWP $\begin{cases}\frac{d}{ds}y(s)=By(s)\\ y(0)=e^{tA}y_0\end{cases}$ gelöst von $y_1(s):=e^{tA+sB}y_0$ nach der Kettenregel und $y_2:=e^{tA}e^{sB}y_0$ wegen $[e^{tA},B]=0$.

Also haben wir eine “explizite” Lösungsformel $y(t)=e^{tA}y_0$, wenn e^{tA} berechenbar ist.

Ziel: Finde die Lösungsformel, aber unabhängig von der Basiswahl, für den linearen Operator $A\in\mathcal{L}(E)$, wobei E ein endlichdimensionaler Banachraum über $\mathbb{C}$, z.B. $E=(\mathbb{C}^n,|\cdot|)$, ist.

Methode: Spektraltheorie

Zu $\lambda\in\mathbb{C}$ setze $N_\lambda A:=\ker(A-\lambda I)=:\ker(A-\lambda)=$Eigenraum von A zum Eigenwert λ. Die Eigenwerte sind charakterisiert durch die Gleichung $\chi_A(\lambda)=\det(A-\lambda)=0$ (ist nach dem Multiplikationssatz invariant unter $A\mapsto T^{-1}AT$).

$$\chi(\lambda)=(-1)^m\det(\lambda-A)=(-1)^m\prod_{j=1}^{N}(\lambda-\lambda_j)^{\mu_a(\lambda_j)},$$

$\mu_a(\lambda_j)\in\mathbb{N}$ = algebraische Vielfachheit von λ_j

5.2.10 Anmerkung & Definition

Für $A\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ gilt

$$\det(1+\frac{\lambda i}{2\pi}A)=:\sum_{j=0}^{m}\lambda^jc_j(A),$$

wobei c_j ein homogenes invariantes Polynom in den Koeffizienten von A bezüglich einer beliebigen Basis ist. Diese Polynome heißen die *Chern-Klassen* von A. Insbesondere ist $c_1(A) = \frac{i}{2\pi} \operatorname{tr} A,\ c_m(A) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^m \det A$.

Beweis: Man rechnet in einer beliebigen Basis, das Ergebnis ist automatisch unabhängig von der Basis. □

5.2.11 Definition

Sei $A \in \mathcal{L}(E)$ und $\chi(\lambda) = (-1)^m \prod_{j=1}^N (\lambda - \lambda_j)^{\mu_a(\lambda_j)}$ das charakteristische Polynom. Dann heißt

$$\underset{\text{Spektrum}}{\operatorname{spec} A} := \{\lambda_j\}_{j=1}^N = \{\lambda \in \mathbb{C};\ A - \lambda \text{ nicht invertierbar}\}$$

Der Unterraum $N^g_{\lambda_j} := \ker(A - \lambda_j)$ heißt der *geometrische Eigenraum* zum Eigenwert λ_j, $\mu_g(\lambda_j) := \dim N^g_{\lambda_j}$ heißt die *geometrische Vielfachheit* von λ_j.

Der Unterraum $N^a_{\lambda_j} := \{x \in E;\ (A-\lambda_j)^l x = 0 \text{ für ein } l \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{l \geqslant 1} \ker(A-\lambda_j)^l$ heißt der *algebraische Eigenraum* von A zum Eigenwert λ_j, und es gilt

$$\mu_g(\lambda_j) = \dim \ker(A-\lambda_j) = \dim N^g(\lambda_j) \leqslant \dim N^a(\lambda_j) = \mu_a(\lambda_j),\ \sum_{j=1}^N \mu_a(\lambda_j) = m$$

($\mu_g \neq \mu_a$ möglich)

A heißt *halbeinfach* (oder semisimple) $:\iff \mu_g(\lambda_j) = \mu_a(\lambda_j)\ \forall j$

Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda) = (\lambda - 1)^2, \text{ d.h. } \operatorname{spec} A = \{1\},\ \mu_a(1) = 2$$

$$(A - 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff x_2 = 0$$

VL: Mi, 2004-02-18 Sei E ein Banach-Raum über $\mathbb{C}$ mit $\dim E < \infty$, sei außerdem $A \in \mathcal{L}(E)$.

Spektralzerlegung von A:

$$\begin{aligned} \operatorname{spec} A &= \{\lambda \in \mathbb{C}; \ker(A - \lambda) \neq 0\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}; (A - \lambda) \text{ nicht invertierbar }\} \\ &=: \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \text{ Eigenwert von } A\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C}; \det(A - \lambda) =: \chi_A(\lambda) = 0\} \\ &= \{\lambda_i \in \mathbb{C}; 1 \leqslant i \leqslant N \leqslant m\} \quad \text{(d.h. endlich)} \end{aligned}$$

Wobei

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^m \prod_{i=1}^{N} (\lambda - \lambda_i)^{\mu_a(\lambda_i)}$$

$$\mu_g(\lambda_i) := \dim\ker(A - \lambda_i) \leqslant \dim\ker(A - \lambda_i)^{\mu_a(\lambda_i)} = \mu_a(\lambda_i)$$

(geometrische bzw. algebraische Multiplizität)

$$\sum_i \mu_a(\lambda_i) = m$$

$$A \text{ halbeinfach} \iff \mu_g(\lambda_i) = \mu_a(\lambda_i)\ \forall i$$

5.2.12 Satz (Die $S + N$-Zerlegung)

Zu $A \in \mathcal{L}(E)$ existieren eindeutig bestimmte Operatoren $S, N \in \mathcal{L}(E)$ mit

1) $A = S + N$
2) S ist halbeinfach, N ist nilpotent.
3) $[S, N] = 0$

Folgerung: $\boxed{e^{tA} = e^{tS} e^{tN}}$, wobei $e^{tN} = \sum_{j=0}^{k_N} \frac{t^j}{j!} N^j$ ist ein Polynom, k_N der Nilpotenzgrad.

Beweis von 5.2.12

Faktum: Zu jedem $\lambda_j \in \operatorname{spec} A$ gehört eine Projektion $p_j \in \mathcal{L}(E)$, d.h. eine Indempotente, $P_j^2 = P_j$ (nicht notwendig orthogonal!) mit $[P_j, A] = 0$, d.h.

$$P_j A = A P_j = P_j A P_j \text{ und } P_j A P_j = \lambda_j P_j + N_j$$

wobei $P_j N_j = N_j P_j = P_j N_j P_j = N_j$ und $N_j^{\mu_a(\lambda_j)} = 0$.

Ferner gilt:

$$\sum_j P_j = I_E,\ P_j P_k = \delta_{jk} P_j \Rightarrow E = \bigoplus_{j=1}^{N} P_j(E)$$

Außerdem gilt $\dim P_j = \mu_a(\lambda_j)$ und, natürlich,

$$[P_j A, N_j] = [\lambda_j P_j + N_j, N_j] = 0$$

Dabei ist $P_j = \frac{1}{2\pi j} \int_{|z-\lambda_i|=\varepsilon} (A - z)^{-1} dz$ für ε hinreichend klein.

Wir setzen

$$S := \sum_j \lambda_j P_j \text{ und } N := \sum_j N_j$$

und finden

$$\begin{aligned}
[S, N] &= \sum_j \lambda(P_j N_j - N_j P_j) + \sum_{j \neq k} (\lambda_j P_j N_k - N_j \lambda_k P_k) \\
&= 0 + \sum_{j \neq k} (\lambda_j P_j P_k N_k - \lambda_k N_j P_j P_k) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nilpotenz:

$$N^2 = \sum_{j,k} N_j N_k = \sum_{j,k} N_j P_j P_k N_k = \sum_j N_j P_j N_j = \sum_j N_j^2$$

$$\overset{\text{ind.}}{\Rightarrow} \quad N^k = \sum_j N_j^k \;\Rightarrow\; N^k = 0 \text{ für } k \geqslant \max_j \mu_a(\lambda_j)$$

S **halbeinfach:**

$$Sx = \lambda x \iff \lambda P_j x = P_j S x = \sum_k P_j \lambda_k P_k x = \lambda_j P_j x$$

$$\Rightarrow\; \lambda = \lambda_j, x \in P_j(E)$$

$$\Rightarrow \dim\ker(S - \lambda_j) = \dim P_j = \mu_a(A, \lambda_j) = \mu_g(S, \lambda_j)$$

Weiter berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\chi_S(\lambda) &= \det(S - \lambda) = \prod_{i=1}^N \det(\lambda_i P_i - \lambda P_i) \\
&= \prod_{i=1}^N (\lambda_i - \lambda)^{\dim P_i} = \prod_{i=1}^N (\lambda - \lambda_i)^{\mu_a(A,\lambda_i)} (-1)^{\mu_a(A,\lambda_i)} \\
&= (-1)^m \prod_{i=1}^N (\lambda - \lambda_i)^{\mu_a(A,\lambda_i)} = \chi_A(\lambda) \\
&\quad \Rightarrow\; \mu_a(S, \lambda_i) = \mu_a(A, \lambda_i) = \mu_g(S, \lambda_i) \quad \square
\end{aligned}$$

Autonome lineare Gleichung: $(*)$ $y'(t) = Ay(t), A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m)$. Wir identifizieren A mit $A \otimes I$ in der Komplexifizierung

$$\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^m \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \text{ und } (A \otimes I)\omega = \sum A y_i \otimes z_i$$

$\omega = \sum y_i \otimes z_i$ bzw. als Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} = \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\omega_j \right)$$

Ich kann die DGL auch im Komplexen lösen:

$$(\tilde{*}) \qquad \omega'(t) = (A \otimes I)\omega(t), \quad \omega(t_0) = \omega_0 = y_0$$

$\Rightarrow$ $y(t) := \operatorname{Re}\omega(t)$ löst die Differentialgleichung.

$$(\operatorname{Re}\omega)'(t) = \operatorname{Re}(A \otimes I)\omega(t) = A \operatorname{Re}\omega(t)$$

$$\operatorname{Re}\omega(t_0) = \operatorname{Re} y_0 = y_0$$

$$\Rightarrow\; y(t) = \operatorname{Re}\omega(t)$$

Also bestimmen wir die Lösungen von $(\tilde{*})$ mit

$$\tilde{A} := A \otimes I \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$$

5.2.13 Satz

$(\tilde{*})$ hat die Lösung

$$\omega(t) = e^{\tilde{A}t}\omega_0 = e^{(\tilde{S}+\tilde{N})t}\omega_0 = e^{\tilde{S}t}e^{\tilde{N}t}\omega_0$$

Beweis: ✓ □

Was ist $e^{\tilde{S}t} = e^{(\sum \lambda_i P_i)t}$?

$$\begin{aligned}
e^{\tilde{S}t} &= e^{(\sum \lambda_i P_i)t} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}\left(\sum_i \lambda_i P_i\right)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \sum_i \lambda_i^j P_i = \sum_i e^{\lambda_i t} P_i \\
e^{\tilde{N}t} &= e^{(\sum_i N_i)t} = \sum_{j\geqslant 0} \frac{t^j}{j!}\left(\sum_i N_i\right)^j = \sum_{j\geqslant 0} \frac{t^j}{j!}\left(\sum_i N_i^j\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \tilde{\mu}=\max \mu_a(\lambda_k)\rfloor -1} \frac{t^j}{j!}\left(\sum_i N_i^j\right)
\end{aligned}$$

Dies ist ein Polynom.

5.2.14 Folgerung

Jede Lösung des Problems $(*)$ ist eine Linearkombination der Funktionen

$$\begin{aligned}
&\{t^k \operatorname{Re} e^{\lambda_i t}, t^l \operatorname{Im} e^{\lambda_i t}; l,k \leqslant \tilde{\mu}, \lambda_i \in \operatorname{spec} \tilde{A}\} \\
&\quad = \{t^k e^{(\operatorname{Re}\lambda)t}\cos(\operatorname{Im}\lambda t), t^l e^{\operatorname{Re}\lambda t}\sin(\operatorname{Im}\lambda t);\ l,k \leqslant \tilde{\mu}, \lambda \in \operatorname{spec}\tilde{A} \overset{!}{=} \operatorname{spec} A\}
\end{aligned}$$

5.2.15 Folgerung

Ist $\operatorname{Re}\lambda < 0\ \forall \lambda \in \operatorname{spec} A$, so gilt $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ für alle Lösungen von $(*)$, unabhängig von y_0.

Beispiel: $y'(t) = -y(t)$

$$\Rightarrow\ y(t) = e^{(-I)t}y_0 = e^{-ty_0} \to 0$$

$\operatorname{spec} A = \{-1\}$ mit Vielfachheit m, A halbeinfach.

Bemerkung: Wenn A normal ist ($\iff$ $[A, A^*] = 0$ für $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m, \langle\cdot,\cdot\rangle)$), dann ist A halbeinfach.

Beispiel 2: Betrachte $(*)$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda) &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 4 & -3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-1)(\lambda+3)+4 \\ &= \lambda^2+2\lambda+1 = (\lambda+1)^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{spec} A = \{-1\}, \mu_a(-1) = 2$

$$0 = (A+1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

also z.B. $x_1 = 1, x_2 = 2$. D.h. $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \ker(A+1) \;\Rightarrow\; \mu_g(-1) = 1.$

Weitere Lösungen (automatisch linear unabhängig von $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} = y_1$) durch den Ansatz

$$y_2(t) = \begin{pmatrix} a+bt \\ c+dt \end{pmatrix} e^{-t}$$

Einsetzen in die Gleichung ergibt: $2a = 1+c, 4a = 2(1+c), b = 1, d = 2.$

Kapitel 6

Maßtheorie

VL: Mi, 2004-04-14

6.1 Problemstellung

Rückblick: Integration im $\mathbb{R}^m$

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m) \ni f \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} \cdots \int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, \ldots, x_n)dx_n \cdots dx_1$$

Die Reihenfolge der Integration ist beliebig.

Eigenschaften des Integrals

1) $I: \ \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m) \ni f \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f \in \mathbb{C}$ ist linear

2) I ist monoton, d.h. $f(x) \geqslant 0 \ \forall x \Rightarrow I(f) \geqslant 0$

3) Fundamentale Abschätzung: $|\int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx| \leqslant \|f\|_\infty d(\operatorname{supp} f)^m$

$U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f \in \mathcal{C}(U)$

$$\int_U f = \sup_{\psi \in \mathfrak{C}(U)} \int_{\mathbb{R}^m} \psi f, \ \mathfrak{C}(U) = \{\psi \in \mathcal{C}_0(U) : 0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1 \ \forall x\}$$

für $f \geqslant 0$.
Dann gibt es eine Folge $(\psi_n) \in \mathfrak{C}(U)$ so, dass

$$\int_U f = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^m} \psi_n f \leqslant \infty$$

für alle $f \geqslant 0, f \in \mathfrak{C}(U)$.
Ist $f \not\geqslant 0$, so zerlegen wir $f = f_+ - f_-$ mit

$$f_+(x) = \max\{0, f(x)\}, \ f_-(x) = -\min\{0, f(x)\} \in \mathcal{C}(U),$$

so dass $|f| = f_+ + f_-$.
Dann

$$\int_U f := \int_U f_+ - \int_U f_-,$$

falls beide endlich. Wir setzen

$$L^1\mathcal{C}(U) := \{f \in \mathcal{C}(U) : \int_U |f| < \infty\}$$

Dann gilt wieder:

1) $L^1\mathcal{C}(U) \ni f \mapsto I_U(f) := \int_U f \in \mathbb{C}$ ist linear.
2) I_U ist monoton.
3) $|\int_U f| \leqslant \|f\|_\infty \underbrace{\int_U 1dx}_{=:\mathrm{vol}\, U}$

1. Problem: Inhaltsproblem

Gibt es eine Inhaltsfunktion μ auf $\mathbb{R}^m$, d.h. eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \ni A \mapsto \mu(A) \in [0, \infty]$ mit den Eigenschaften:

1) Additivität: Sind $A, B \subset \mathbb{R}^m$ mit $A \cap B = \emptyset$, dann ist $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$; $(\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx)$;
2) Ist $g \in E(m)$ eine euklidische Bewegung, so $\mu(g(A)) = \mu(A)$;
3) $\mu(Q(1)) = 1$, wobei $Q(1)$ der Würfel mit der Kantenlänge 1 ist?

Antwort

1) Das Inhaltsproblem ist genau für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ lösbar.
2) (Banach & Tarski): Gegeben seien beliebige Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^m, m \geqslant 3$. Dann gibt es paarweise disjunkte Mengen $C_i, 1 \leqslant i \leqslant k$ und eine euklidische Bewegung g so, dass

$$A = \bigcup_{i=1}^k C_i \text{ und } B = \bigcup_{i=1}^k g(C_i).$$

(Seminarvortrag)

Gäbe es μ, so wäre $\mu(A) \overset{1.}{=} \sum_{i=1}^k \mu(C_i) \overset{2.}{=} \sum_{i=1}^k \mu(g(C_i)) \overset{1.}{=} \mu(B)$.

1'. Problem: Ersetze die Forderung 1 durch
1') (σ-Additivät) Ist $(A_i)_{i \geqslant 1} \subset \mathbb{R}^m$ und paarweise disjunkt, so gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{i\geqslant 1} A_i\right) = \sum_{i \geqslant 1} \mu(A_i)$$

Antwort: (Vitali) Dieses Problem ist niemals lösbar. Auch hier gibt es eine Banach-Tarski-Version.

Analytische Annäherung

$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, aber auch normiert durch $\|f\|_1 = \int_{R^m} |f(x)|dx$

Betrachte nur den Fall: $\|f\|_1 = 0$. Wäre $f \neq 0$, dann $|f(x_0)| > 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}^m \Rightarrow |f(x)| \geqslant \frac{1}{2}|f(x_0)| > 0$ für $x \in B_\varepsilon(x_0), \varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|dx &\geqslant \sup_{\psi \in \mathfrak{C}(B\varepsilon(x_0))} \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x)|f(x)|dx \\ &\geqslant \frac{1}{2}|f(x_0)| \sup_{\psi \in \mathfrak{C}(B\varepsilon(x_0))} \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x)dx \\ &= \frac{1}{2}|f(x_0)| \operatorname{vol} B_\varepsilon(x_0) > 0 \end{aligned}$$

6.1.1 Satz

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\hat{X}, \hat{d})$ und eine Isometrie

$$\phi : \ (X, d) \to (\hat{X}, \hat{d})$$

so, dass $\phi(X)$ dicht ist in $\hat{X}$, d.h. $\overline{\phi(X)} = \hat{X}$.

Diskussion: Die Idee ist die folgende:
Sei $\tilde{X} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}};\ (x_n) \subset X$ Cauchy-Folge$\}$ mit der Äquivalenzrelation

$$(x_n) \sim (y_n) \iff (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots) \text{ Cauchy-Folge}$$

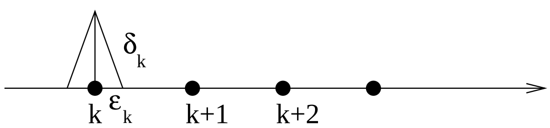
Ist (x_n) konvergent gegen x_0, so ist $(y_i = x_0) \in [(x_n)]$. Dann wird $\hat{X} = \tilde{X}/\sim$, aber es bleibt noch viel zu zeigen ...

Also prüfen wir zunächst, wie sich L^1-Cauchy-Folgen verhalten!

Road map

1) Die Vervollständigung enthält "alle" integrierbaren Funktionen.
2) $A \subset \mathbb{R}^m$ ist endlich messbar $\iff$ χ_A integrierbar.
3) Charakterisiere diese A's und dieses μ.
4) Entwickle eine *abstrakte Integrationstheorie auf Maßräumen* mit befriedigenden Konvergenzsätzen. $\boxed{\lim_n \int f_n = \int f}$
   bisher nur gleichmäßige Konvergenz auf beschränkten Mengen

Beispiel: $m = 1$



$$\delta_{kn} = n \quad \varepsilon_{kn} = \frac{1}{n^2 k^2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \varepsilon_{kn}\delta_{kn} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{nk^2} = \frac{\pi^2}{3n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

6.1.2 Fundamentallemma

Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ eine Cauchy-Folge bezüglich der $\|\cdot\|_1$-Norm (L^1-Norm). Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\geqslant 1}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge V_ε so, dass:

1) $\operatorname{vol} V \leqslant \varepsilon$
2) (f_{n_k}) ist in $\mathbb{R}^n \setminus V_\varepsilon$ gleichmäßig konvergent

Beweis: 1. Wir wählen die Teilfolge so, dass

$$\left\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\right\|_1 \leqslant \frac{1}{2^{2k}}.$$

Zu $\frac{1}{2^2}$ gibt es ein n_1 so, dass

$$\|f_n - f_m\|_1 \leqslant \frac{1}{2^2} \ \forall n, m \geqslant n_1;$$

dann wähle n_1. Setze $g_k := f_{n_k}$.

2. Konvergenzansatz: Die Reihe

$$g(x) := g_1(x) + \sum_{k\geqslant 1}(g_{k+1}(x) - g_k(x))$$

soll konvergieren. Betrachte deshalb die "böse Menge"

$$W_k := \left\{x \in \mathbb{R}^m;\ |g_{k+1}(x) - g_k(x)| > \frac{1}{2^k}\right\} = \left(\|g_{k+1} - g_k\|_1\right)^{-1}\left(\frac{1}{2^k}, \infty\right)$$

$\Rightarrow W_k$ ist offen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^{2k}} \geqslant \|g_{k+1} - g_k\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^m} |g_{k+1} - g_k|(x)dx \\
&\geqslant \int_{W_k} |g_{k+1} - g_k|(x)dx \geqslant \frac{1}{2^k}\int_{W_k} dx \\
&= \frac{1}{2^k}\operatorname{vol} W_k \ \Rightarrow \operatorname{vol} W_k \leqslant \frac{1}{2^k}
\end{aligned}$$

3. Nun bilden wir $V_k := \bigcup_{j\geqslant k} W_j$ offen mit

$$\operatorname{vol} V_k \leqslant \sum_{j\geqslant k} \operatorname{vol} W_j \leqslant \sum_{j\geqslant k} 2^{-j} = 2^{1-k}$$

Für $x \notin V_k$ und $j \geqslant k$ gilt $|g_{j+1}(x) - g_j(x)| \leqslant \frac{1}{2^j}$, d.h., die Reihe $g(x)$ wird majorisiert durch $\sum 2^{-j}$, d.h., (g_k) ist gleichmäßig konvergent. $\square$

VL: Mo, 2004-04-19

Erinnerung $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_1) \subset \left(L^1\mathcal{C}(\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_1\right)$ (nicht vollständig!), $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|dx = \int |f|$

Ziel Das Integral auf eine allgemeine Klasse von Funktionen erweitern. Der Raum dieser Funktionen wird im wesentlichen die Vervollständigung von $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ oder $L^1\mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$. Deshalb studieren wir L^1-Cauchy-Folgen auf $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$.

Wunsch (f_n) Cauchy-Folge $\to f$ $\quad \int f := \lim \int f_n$

Bemerkung: $\widehat{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)} = \widehat{L^1\mathcal{C}(\mathbb{R}^m)}$, weil nach Definition ist $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ dicht in $L^1\mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$. Ist $(f_n) \subset L^1\mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$ eine Cauchy-Folge, $\exists (g_n) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ $\|f_n - g_n\|_1 \leqslant \frac{1}{n} \Rightarrow (g_n)$ Cauchy-Folge und $(g_n) \sim (f_n)$.

Fundamentallemma: $(f_n) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ Cauchy-Folge $\Rightarrow \exists (f_{n_k})$ Teilfolge so, dass $\forall \varepsilon > 0 \exists V_\varepsilon$ offen, $\operatorname{vol} V_\varepsilon < \varepsilon$ und f_{n_k} konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}^m \setminus V_\varepsilon$.
Bemerkung: Im allgemeinen ist es nicht richtig, dass (f_n) punktweise konvergiert.
$n \in \mathbb{N}$, $n = 2^s + r$, $0 \leqslant r < 2^s$

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f_n = \chi_{[\frac{r}{2^s}, \frac{r+1}{2^s}]}$$

L^1-Cauchy-Folge, aber $(f_n(x))$ konvergiert nicht für $x \in [0,1]$.

"Böseste Menge": $V_\infty = \bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon$
$x \notin V_\infty \Rightarrow \exists \varepsilon : \ x \notin V_\varepsilon \Rightarrow (f_{n_k}(x))$ konvergiert.

$$(*) \quad f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C} \quad f(x) = \begin{cases} \lim f_{n_k}(x) & x \notin V_\infty, \\ 0 & x \in V_\infty \end{cases}$$

6.1.3 Definition

$A \subset \mathbb{R}^m$ heißt Menge vom Maß Null (Nullmenge) im Sinne von Lebesgue, wenn $\forall \varepsilon > 0$ $\exists V_\varepsilon$ offen, $\operatorname{vol} V_\varepsilon < \varepsilon$ mit $A \subset V_\varepsilon$.

6.1.4 Hilfssatz

1) A Nullmenge, $B \subset A \Rightarrow B$ Nullmenge,
2) $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$, A_i Nullmenge $\Rightarrow \bigcup_{i \geqslant 1} A_i$ Nullmenge,
3) $U, V \subset \mathbb{R}^m$ offene Mengen, $h : U \to V$ $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus, $A \subset U$ Nullmenge $\Rightarrow h(A)$ Nullmenge.

Beweis

1) klar!
2) Sei $\varepsilon > 0$. $\exists V_i$ offen $A_i \subset V_i$, $\operatorname{vol} V_i < \frac{\varepsilon}{2^i}$, $V_\varepsilon = \bigcup_{i \geqslant 1} V_i$ offen,
$\bigcup_{i \geqslant 1} A_i \subset V_\varepsilon$, $\operatorname{vol} V_\varepsilon = \operatorname{vol} \bigcup_{i \geqslant 1} V_i \leqslant \sum_{i \geqslant 1} \operatorname{vol} V_i < \sum_{i \geqslant 1} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$
3) Übung

Sprechweise: Ist eine Eigenschaft, welche die Punkte einer Menge M betrifft, für alle Punkte aus M mit Ausnahme einer Nullmenge wahr, so sagt man, dass die Eigenschaft *fast überall* gilt.
Z.B. $f = 0$ fast überall $\iff$ $\exists A \subset \mathbb{R}^m$ Nullmenge mit $f = 0$ auf $\mathbb{R}^m \setminus A$.

Zusatz zu 6.1.2 (f_{n_k}) konvergiert fast überall (außerhalb von V_∞ gegen f aus $(*)$).

Beispiele von Nullmengen

1) $\{P\} \subset \mathbb{R}^m$ ist Nullmenge
   $P \in V_\varepsilon$ =Würfel mit Seitenlänge $\sqrt[m]{\varepsilon}$, $\operatorname{vol} V_\varepsilon = \varepsilon$
2) Abzählbare Mengen sind Nullmengen, $\Rightarrow \mathbb{Q}^m \subset \mathbb{R}^m$ ist Nullmenge. Insbesondere können Nullmengen dicht liegen.
3) die Cantormenge, insbesondere können Nullmengen überabzählbar sein
4) Hyperebenen im $\mathbb{R}^m$
5) Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^m$, von Dimension $< m$

Hauptfrage Inwieweit bestimmt eine Äquivalenzklasse von $[(f_n)]$, $(f_n) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ eine Funktion f?
Wir versuchen es mit der Funktion f aus $(*)$. Ist es wohldefiniert? D.h. $(g_n) \subset [(f_n)] \Rightarrow \exists (g_{n'_k})$ mit $g_{n'_k} \to g$ fast überall.
Was ist die Beziehung zwischen f und g? Antwort: $f = g$ fast überall. Da $(f_{n_k}) \sim (f_n) \sim (g_n) \sim (g_{n'_k})$, reicht es zu zeigen:

6.1.5 Hilfssatz

Sind $(g_n), (h_n) \subset [(f_n)]$ und $g_n \to g$, $h_n \to h$ fast überall $\Rightarrow g = h$ fast überall.

Beweis Da $\|g_n - h_n\|_1 \to 0$ reicht es zu zeigen (wenn wir $e_n = g_n - h_n$ setzen):

6.1.6 Hilfssatz

Ist $(e_n) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ Cauchy-Folge und $\|e_n\|_1 \to 0$, so gibt es eine Teilfolge (e_{n_k}) : $\forall \varepsilon > 0\ \exists V_\varepsilon$, $\operatorname{vol} V_\varepsilon < \varepsilon$: (e_{n_k}) konvergiert gleichmäßig gegen 0 außerhalb von V_ε. Insbesondere konvergiert (e_{n_k}) fast überall gegen 0.

Beweis Einfache Adaptation von 6.1.2: Wir finden (e_{n_k}) mit $\|e_{n_k}\| < \frac{1}{2^{2k}}$.

$$W_k = \{x \in \mathbb{R}^m : |e_{n_k}(x)| > \frac{1}{2^k}\}$$

Aus 6.1.2 folgt, dass $\operatorname{vol} W_k < \frac{1}{2^k}$; und e_{n_k} konvergiert gleichmäßig gegen 0 außerhalb von $V_l = \bigcup_{k \geqslant l} W_k$, $\operatorname{vol} V_l < \frac{1}{2^{l-1}}$. Insbesondere konvergiert (e_{n_k}) punktweise gegen 0 außerhalb von $\bigcap V_l$ - Nullmenge. □

6.1.7 Definition

$\widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m) = \{f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C} | \exists (f_n) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)\ L^1\text{−Cauchy-Folge, } (f_n) \to f \text{ fast überall}\}$

Wir möchten $\int f := \lim \int f$. Das folgende Lemma zeigt, dass es erlaubt ist.

6.1.8 Hilfssatz

Seien $(f_n), (g_n) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ zwei Cauchy-Folgen und $f_n \to f$, $g_n \to f$ fast überall. Dann existieren die folgenden Grenzwerte und sind gleich:

$$\lim \int f_n = \lim \int g_n$$

und $(f_n) \sim (g_n)$, d.h. $\|f_n - g_n\|_1 \to 0$.

Beweis $(\int f_n), (\int g_n)$ sind Cauchy-Folgen in $\mathbb{C} \Rightarrow$ konvergieren.

$$\left| \int f_n - \int f_m \right| \leqslant \int |f_n - f_m| = \|f_n - f_m\|_1$$

Da (f_n) Cauchy-Folge in $\|\cdot\|_1$ ist $\Rightarrow$ $(\int f_n)$ ist Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$. Setzen wir $h_n := f_n - g_n \Rightarrow h_n$ Cauchy-Folge und $h_n \to 0$ fast überall. Zu zeigen:

$$\underbrace{\int h_n}_{=\int f_n - \int g_n} \to 0, \qquad \underbrace{\int |h_n|}_{=\|f_n - g_n\|_1} \to 0$$

Sei $\varepsilon > 0$. Weil (h_n) Cauchy-Folge $\exists N = N(\varepsilon)$ fest, $\forall m, n \geqslant N : \|h_n - h_m\|_1 < \varepsilon$.
Sei $E' \subset E$ offen mit $\operatorname{supp} h_N \subset E'$, so dass $h_N = 0$ auf $\mathbb{R}^m \backslash \overline{E}'$ und $\operatorname{vol}(E) < \infty$.

(a) $\int_{\mathbb{R}^m \backslash \overline{E}'} |h_n| = \int_{\mathbb{R}^m \backslash \overline{E}'} |h_n - h_N| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} |h_n - h_N| = \|h_n - h_N\|_1 < \varepsilon$.

Nach 6.1.2 $\exists (h_{n_k})$ Teilfolge $\exists V_\varepsilon \subset \mathbb{R}^m$ so, dass h_{n_k} konvergiert gleichmäßig gegen Null auf $\mathbb{R}^m \setminus V_\varepsilon$ und $\operatorname{vol}(V_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{\|h_N\|_\infty}$.

(b) $\int_{E \backslash \overline{V}_\varepsilon} |h_{n_k}| \leqslant \sup_{E \backslash \overline{V}_\varepsilon} |h_{n_k}| \operatorname{vol} E < \varepsilon$ für k hinreichend groß (weil $\operatorname{vol} E < \infty$).

Sei $V_{2\varepsilon} \supset V_\varepsilon$ mit $\operatorname{vol}(V_{2\varepsilon}) < \frac{2\varepsilon}{\|f_{2N}\|_\infty}$ (existiert wegen 6.1.2).

(c) $\int_{V_{2\varepsilon}} |h_{n_k}| = \int_{V_{2\varepsilon}} |h_{n_k} - h_N + h_N| \leqslant \int_{V_{2\varepsilon}} |h_{n_k} - h_N| + \int_{V_{2\varepsilon}} |h_N| \leqslant \|h_{n_k} - h_N\|_1 + \int_{V_{2\varepsilon}} |h_N| \leqslant \varepsilon + \|h_N\|_\infty \operatorname{vol} V_{2\varepsilon} \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon$ für k groß.

$\mathbb{R}^m = (\mathbb{R}^m \setminus \overline{E}') \cup (E \setminus \overline{V}_\varepsilon) \cup V_{2\varepsilon} \Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^m} |h_{n_k}| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m \backslash \overline{E}'} |h_{n_k}| + \int_{E \backslash \overline{V}_\varepsilon} |h_{n_k}| + \int_{V_{2\varepsilon}} |h_{n_k}| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon = 5\varepsilon$$

für $k \geqslant k(\varepsilon)$. $\Rightarrow \underbrace{\int |h_{n_k}|}_{\to 0}$ konvergiert. Aber $(\int |h_n|)$ ist Cauchy-Folge.

$\Rightarrow \int |h_n| \to 0$ und weil $|\int h_n| \leqslant \int |h_n|$, folgt $\int h_n \to 0$. $\square$

Endlich: Für $f \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ ist $\int f := \lim \int f_n$, wobei (f_n) Cauchy-Folge $\subset (\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_1)$ mit $f_n \to f$ fast überall. Elemente aus $\widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ heißen *integrierbare* Funktionen.
$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m) \subset L^1\mathcal{C}(\mathbb{R}^m) \subset \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$
Wir wollen die Norm $\|\cdot\|_1$ auf $\widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ erweitern.

6.1.9 Hilfssatz

Sei $f \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ und $(f_n) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ Cauchy-Folge mit $f_n \to f$ fast überall. Dann ist $|f| \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ und $(|f_n|)$ ist eine approximierende Folge für $|f| : (|f_n|)$ Cauchy-Folge und $|f_n| \to |f|$ fast überall.

Beweis $\|(|f_n| - |f_m|)\|_1 = \int |(|f_n| - |f_m|)| \leqslant \int |f_n - f_m| = \|f_n - f_m\|_1$ □

6.1.9 erlaubt: $f \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ $\quad \|f\|_1 := \int |f| = \lim \|f_n\|_1$.
Problem: $\|\cdot\|_1$ ist eine Halbnorm aber keine Norm.

6.1.10 Hilfssatz

Für $f \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ gilt: $\|f\|_1 = 0 \iff f = 0$ fast überall.

Beweis $\Rightarrow$: Sei $(f_n) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ Cauchy-Folge, $f_n \to f$ fast überall. Aus 6.1.9 $\Rightarrow \|f_n\|_1 \to \|f\|_1 = 0$; 6.1.6 $\Rightarrow \exists (f_{n_k})$ Teilfolge mit $f_{n_k} \to 0 \Rightarrow f = 0$ fast überall.

6.1.11 Definition

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ mit $f \sim g$, wenn $f = g$ fast überall.
$L^1(\mathbb{R}^m) = \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)/\sim$
$[f] \in L^1(\mathbb{R}^m) \quad \|[f]\|_1 = \|f\|_1 = \lim \|f_n\|_1$
$\big(L^1(\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_1\big)$ normiert und es existiert eine bijektive Isometrie

$$L^1\widehat{\mathcal{C}(\mathbb{R}^m)} = \widehat{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)} \ni [(f_n)] \overset{\Phi}{\mapsto} [f] \in L^1(\mathbb{R}^m)$$

$$f = \begin{cases} \lim f_{n_k}(x) & x \notin V_\infty, \\ 0 & x \in V_\infty \end{cases}$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^m) \ni f \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f \in \mathbb{C}$$

VL: Mi, 2004-04-21

1. Erweiterung

χ_V für V offen und beschränkt (z.B. $V = B_1^m(0)$)

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^m} \chi_V = \int_V 1 = \sup_{\psi \in \mathfrak{C}(V)} \int_{\mathbb{R}^m} \psi = \operatorname{vol} V$$

$$\left[= \lim_{\overrightarrow{\psi \in \mathfrak{C}(V)}} \int_{\mathbb{R}^m} \psi, \text{ wobei } \psi_1 \leqslant \psi_2 \iff \psi_2\psi_1 = \psi_1 \right]$$

2. Erweiterung (L^1-Vervollständigung)

$$\widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m) = \widetilde{L^1_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}^m) + i\widetilde{L^1_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}^m)$$
$$\widetilde{L^1_{\mathbb{R}}}(\mathbb{R}^m) \ni f : \ \mathbb{R}^m \to [-\infty, \infty] =: \overline{\mathbb{R}}$$

und es gibt eine L^1-Cauchyfolge $(f_n) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}^m \setminus A$, wobei A eine Menge vom Maß 0 ist.

Dann ist (?) $\int_{\mathbb{R}^m} f := \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} f_n$ (evtl.) wohldefiniert.

Bemerkungen

1) $\int_{\mathbb{R}^m} f$ existiert, weil
$$\left|\int_{\mathbb{R}^m} (f_n - f_m)\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} |f_n - f_m| = \|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon \ \forall n, m \geqslant n(\varepsilon)$$
(Monotonie, $-|g| \leqslant g \leqslant |g|$)

2) Mengen vom Maß 0: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists V_\varepsilon$ offen: $\operatorname{vol} V_\varepsilon \leqslant \varepsilon$ und $A \subset V_\varepsilon$

z.B. A abzählbar
$$\Rightarrow A \subset \bigcup_{A=(a_i)_{i\in\mathbb{N}}} B_{\frac{\varepsilon}{2^i}}(a_i) =: V_\varepsilon$$
$$\Rightarrow \operatorname{vol} V_\varepsilon \leqslant \sum_i \operatorname{vol} B_{\frac{\varepsilon}{2^i}}(a_i) \leqslant \sum_{i\geqslant 1} C\left(\frac{\varepsilon}{2^i}\right)^m = C'\varepsilon^m$$
$\Rightarrow \mathbb{Q}$ hat Maß 0, d.h. Mengen vom Maß 0 können dicht sein!

C =Cantormenge hat Maß 0.

3) (f_n) L^1-Cauchyfolge (CF) $\Rightarrow \exists\,(f_{n_k})$ & A vom Maß 0 : $f_{n_k}(x) \to f(x)$ für $x \notin A$

Also sollte man jeder CF (f_n) ein $f \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ zuordnen können.

a) (g_n) L^1-CF, $(g_n) \sim (f_n) \iff (g_n - f_n)$ L^1-Nullfolge $\Rightarrow$ (g_n) bestimmt Teilfolge (g_{n_l}) mit
$$g_{n_l}(x) \to g(x) \ \forall x \notin B, B \text{ vom Maß 0 und } f(x) = g(x) \text{ für } x \notin A \cup B,$$
d.h. $f \sim g$ in $\widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$, $f(x) = g(x)$ fast überall,

d.h. $\underbrace{[(f_n)]}_{L^1\text{-CF}/\sim} \mapsto [f] \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)/\sim$

b) Diese Abbildung ist bijektiv und sogar isometrisch.
$$\|[f]\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^m} |f| = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} |f_n| = \|[(f_n)]\|_{L^1}$$

Nächste Fragen

1) Wie können wir $\widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ unabhängig von Cauchy-Folgen beschreiben?

2) Welcher Inhaltsbegriff lässt sich aus $\widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ ableiten?
$$V \text{ offen } \Rightarrow \operatorname{vol} V = \int_V 1 = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_V$$

d.h. ist $\operatorname{vol} V < \infty$, so ist $\chi_V \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$.

Beweis: Explizite Konstruktion einer L^1-CF $(\psi_n) \subset \mathfrak{C}(V)$ mit $\psi_n(x) \to \chi_V(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^m$.

Wenn $\operatorname{vol} V = \infty$, dann gilt $\operatorname{vol} V = \lim_{R\to\infty} \operatorname{vol}(V \cap B_R(0))$; das gilt aber auch für endliches Volumen.

6.1.12 Hilfssatz

Für $V \subset \mathbb{R}^m$ offen gilt

$$\operatorname{vol} V = \lim_{R\to\infty} \operatorname{vol}(V \cap B_R(0)) \left(= \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{V\cap B_R(0)} \right).$$

Beweis: Übung

Deshalb folgende Definition

6.1.13 Definition

$A \subset \mathbb{R}^m$ heißt *messbar*, wenn $\chi_{A\cap B_R(0)} \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ $\forall R > 0$. In diesem Fall definieren wir das *Maß* von A als

$$\lambda(A) := \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{A\cap B_R(0)}.$$

$$\mathcal{L} := \{A \subset \mathbb{R}^m;\ A \text{ messbar}\}$$

heißt das System der *Lebesgue-messbaren Mengen*; λ heißt das *Lebesgue-Maß auf* $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \supset \mathcal{L} \xrightarrow{\lambda} \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, \infty]$$

Welche Eigenschaften haben $\mathcal{L}$ und λ?

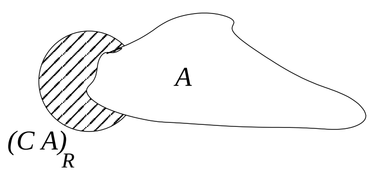
1) $\emptyset, \mathbb{R}^m$:

$$\chi_\emptyset(x) = 0\ \forall x,\ \chi_\emptyset \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)\ (\mathbb{C} - \text{Vektorraum})$$

Mit $A_R := A \cap B_R(0)$ ist $\chi_{\mathbb{R}^m{}_R} = \chi_{B_R(0)} \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ nach 6.1.12
$\Rightarrow \emptyset, \mathbb{R}^m \in \mathcal{L}$

2) $\chi_{(\mathcal{C}A)_R} = \chi_{B_R(0)} - \chi_{A_R} \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$, d.h.

$$A \in \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{C}A = \mathbb{R}^m \setminus A \in \mathcal{L}$$



3) $V \subset \mathbb{R}^m$ offen $\Rightarrow V \in \mathcal{L}$ nach 6.1.12

4) $A_1, A_2 \in \mathcal{L} \Rightarrow A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2 \in \mathcal{L}$

Beweis: $\mathcal{C}(A_1 \cap A_2) = \mathcal{C}A_1 \cup \mathcal{C}A_2 \Rightarrow$ Es genügt, die Vereinigung zu behandeln.

$$\begin{aligned}\chi_{(A_1\cup A_2)_R} &= \chi_{A_{1R}\cup A_{2R}} = \chi_{A_{1R}} + \chi_{A_{2R}} - \chi_{A_{1R}\cap A_{2R}} \\ &= \underbrace{\chi_{A_{1R}}}_{\in\widetilde{L^1}} + \underbrace{\chi_{A_{2R}}}_{\in\widetilde{L^1}} - \underbrace{\chi_{A_{1R}}\chi_{A_{2R}}}_{?}\end{aligned}$$

Allgemeiner: $f_1, f_2 \in \widetilde{L^1} \Rightarrow \exists (f_{1n}), (f_{2n})$ L^1-CF mit $f_{in}(x) \to f_i(x)$ für $x \notin A_i,\ \lambda(A_i) = 0$

$$f_{1n}(x) f_{2n}(x) \to f_1(x) f_2(x) \text{ für } x \notin A_1 \cup A_2$$

$$\|f_{1n}f_{2n} - f_{1m}f_{2m}\|_1 \leqslant \|f_{1m}\underbrace{(f_{2n} - f_{2m})}_{o.k.}\|_1 + \|f_{2n}\underbrace{(f_{1n} - f_{1m})}_{o.k.}\|_1$$

Gegenbeispiel: In (0,1) sei $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \in L^1$, aber $f(x)^2 = \frac{1}{x} \notin L^1$.

Problem: $(f_n) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ L^1-CF $\not\Rightarrow \|f_n\|_\infty \leqslant C\ \forall n \geqslant n_0$

6.1.14 Hilfssatz

Es sei $f \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ und $|f(x)| \leqslant C\ \forall x \in \mathbb{R}^m$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine L^1-Cauchy-Folge $(f_n) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ mit $f_n(x) \to f(x)$ fast überall (f.ü.) und $|f_n(x)| \leqslant C + \varepsilon\ \forall x$.

Beweis: $(f_n^0) \subset \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m)$ L^1-CF, $f_n^0(x) \to f(x)$ f.ü. (für $x \notin A$)
o.B.d.A. f_n^0 reellwertig

$$f_n(x) = \begin{cases} C + \varepsilon, & f_n^0(x) \geqslant C + \varepsilon \\ -C - \varepsilon, & f_n^0(x) \leqslant -C - \varepsilon \\ f_n^0(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

□

Mit 6.1.14 dürfen wir annehmen, dass $\|f_{in}\|_\infty \leqslant 2 \Rightarrow (f_{1n}f_{2n})$ L^1-CF $\Rightarrow$ Behauptung (4).

5) $(A_i)_{i\geqslant 1} \subset \mathcal{L},\ A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$

$$\Rightarrow \bigcup A_i \in \mathcal{L} \text{ und } \lambda\left(\bigcup A_i\right) = \sum_{i\geqslant 1} \lambda(A_i)$$

Beweis:

$$\chi_{(\bigcup A_i)_R} = \chi_{\bigcup A_{iR}} = \sum_i \chi_{A_{iR}}, \quad \sum_{i=n}^{n+k} \|\chi_{A_{1R}}\|_1 \leqslant \operatorname{vol} B_R(0),$$

d.h. $(\sum_1^n \chi_{A_{iR}})$ ist L^1-Cauchy-Folge. *VL: Mo, 2004-04-26*

6.1.15 Hilfssatz

Es sei $(f_n) \subset \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ eine L^1-Cauchyfolge. Dann gibt es ein $f \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ und eine Teilfolge $(f_{n,k})$, die fast überall gegen f konvergiert.

Beweis: Zu f_n gibt es eine L^1-Cauchyfolge $(f_{n,l})_{l\in\mathbb{N}} \subset C_0(\mathbb{R}^m)$ mit $f_{n,l}(x) \to f_n(x)$ für $x \notin A_n$, A_n vom Maß 0. Wähle $l = l(n)$ so, dass

$$\|f_{n,l(n)+k} - f_{n,l(n)}\|_1 \leqslant \frac{1}{n} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Dann folgt für $g_n := f_{n,l(n)}$

$$\begin{aligned}
\|g_{n+k} - g_n\|_1 &= \left\|f_{n+k,l(n+k)} - f_{n,l(n)}\right\|_1 \\
&\leqslant \left\|f_{n+k,l(n+k)} - f_{n+k}\right\|_1 + \|f_{n+k} - f_n\|_1 + \left\|f_n - f_{n,l(n)}\right\|_1 \\
&\leqslant \frac{1}{n} + \|f_{n+k} - f_n\|_1 + \frac{1}{n} \\
&\leqslant \frac{2}{n} + \varepsilon \qquad \text{für } n \geqslant n(\varepsilon)
\end{aligned}$$

Also ist $(g_n) \subset C_0(\mathbb{R}^m)$ eine L^1-Cauchyfolge, die in L^1 gegen f konvergiert. Dann existiert eine Teilfolge (g_{n_k}) nach 6.1.2 (Fundamentallemma) die fast überall konvergiert. Der Grenzwert muss dann mit f fast überall übereinstimmen, das heißt $f \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$. □

Wir sagen jetzt: $A \subset \mathbb{R}^m$ ist messbar $\Leftrightarrow \chi_{A\cap B_R(0)} \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m) \quad \forall R > 0$.
$\mathcal{L}$ bezeichnet die Menge der Lebesgue-messbaren Mengen ($\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$). Weiter setzen wir

$$\lambda(A) := \lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{A\cap B_R(0)} = \lim_{R\to\infty} \|\chi_{A\cap B_R(0)}\|_1$$

Dies nennen wir das *Lebesgue-Maß von A*.

Die Eigenschaften von $\mathcal{L}$ und λ:

1) $\emptyset, \quad \mathbb{R}^m \in \mathcal{L}; \quad \lambda(\emptyset) = 0; \quad \lambda(\mathbb{R}^m) = \infty$

2) $A \in \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{C}A \in \mathcal{L}$ und $\lambda(\mathcal{C}A) + \lambda(a) = \infty$

3) $A, B \in \mathcal{L} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{L}, A \cap B \in \mathcal{L}$

   Problem: $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$

   Achtung: Aus $f_i \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ folgt nicht $f_1 \cdot f_2 \in \widetilde{L^1}$, es sei denn f_1 oder f_2 ist beschränkt.

4)
$$(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \Rightarrow A := \bigcup_{i=1} A_i \in \mathcal{L} \text{ und } \lambda(A) = \sum_{i\geqslant 1} \lambda(A_i)$$

   (*σ-Additivität*)

Erinnerung an das Argument

$$\chi_A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}(x), \quad \chi_{A_i} \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m) \text{ nach Voraussetzung}$$

Wenn ein $A_i \quad \lambda(A_i) = \infty$ erfüllt, dann ist $\chi_A \geqslant \chi_{A_i}$.

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int \chi_{A\cap B_R(0)} = \infty$$
$$\lambda(A) = \infty$$

Also können wir uns beschränken auf $\lambda(A_i) < \infty$. Einfacher:

$$\chi_{A\cap B_R(0)} = \sum_{i\geqslant 1} \chi_{A_i\cap B_R(0)} \text{ und } \lambda(A_i \cap B_R(0)) < \infty$$

und

$$\bigcup A_i \cap B_R(0) \subset B_R(0) \Rightarrow \chi_{A\cap B_R(0)} \leqslant \chi_{B_R(0)}$$

das heißt, es genügt zu zeigen, dass $\sum_{i=1}^{n} \chi_{A_i\cap B_R(0)} =: g_n^R$ eine $\widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$-Cauchyfolge definiert, weil

$$g_n^R(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \chi_{A\cap B_R(0)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

$$\begin{aligned}
\|g_{n+k}^R - g_n^R\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^m} |g_{n+k}^R(x) - g_n^R(x)| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \sum_{n+1}^{n+k} \chi_{A_i\cap B_R(0)}(x) dx \\
&= \sum_{i=n+1}^{k+n} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{A_i\cap B_R(0)} \leqslant vol B_R(0)
\end{aligned}$$

das heißt, die Reihe $\sum_{i\geqslant 1} \lambda(A_i \cap B_R(=))$ konvergiert. $\Rightarrow$ (g_n^R) ist $L^1 - CF$ in $\widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$.
Also gilt

$$\chi_{A\cap B_R(0)} \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m) \text{ und } \sum_{i\geqslant 1} \lambda(A_i \cap B_R(0)) = \sum_{i\geqslant 1} \chi(A_i \cap B_R(0))$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\lambda(A) &= \lim_{R\to\infty} \lambda(A \cap B_R(0)) \\
&\geqslant \sum_{i=1}^{N} \lim_{R\to\infty} \lambda(A_i \cap B_R(0)) \\
&= \sum_{i=1}^{N} \lambda(A_i) \Rightarrow \lambda(A) \geqslant \sum_{i\geqslant 1} \lambda(A_i)
\end{aligned}$$

Ist $\lambda(A_i) = \infty$ für ein i oder, allgemeiner,

$$\sum_{i \geqslant 1} \lambda(A_i) = \infty,$$

so gilt $\infty = \lambda(A) = \sum_{i\geqslant 1} \lambda(A_i)$.
Es bleibt also nur der Fall, dass $\sum_{i\geqslant 1} \lambda(A_i) < \infty$. Dann ist aber $\chi_{A_i} \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m) \forall i$ und $g_n := \sum_{i=1}^n \chi_{A_i} \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ definiert eine L^1-Cauchyfolge, die gegen χ_A konvergiert

$$\Rightarrow \lambda(A) = \int \chi_A = \lim_{n\to\infty} \int g_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\geqslant 1} \lambda(A_i)$$

5) Es sei $A \in \mathcal{L}$ eine Menge vom Maß 0. Dann ist $A \in \mathcal{L}$ und $\lambda(A) = 0$. Dies beschreibt genau alle Mengen vom Maß 0.

Beweis: Sei A eine Menge vom Maß 0

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \,\exists\, V_\varepsilon \text{ offen: } A \subset V_\varepsilon, \lambda(V_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Also gibt es eine Folge V_n von offenen Mengen mit $A \subset V_{n+1} \subset V_n$ und $\lambda(V_n) \leqslant \frac{1}{n}$.
Es ist zu zeigen: $\chi_A \in \widetilde{L^1}$. Wähle dazu die approximierende Folge $(f_n(x) = 0)_{n\in\mathbb{N}}$! Weiter ist $\chi_A \leqslant \chi_{V_n}$ und

$$\lambda(A) = \int \chi_A \leqslant \int \chi_{V_n} \leqslant \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \lambda(A) = 0$$

Umgekehrt sei $A \in \mathcal{L}$ mit $\lambda(A) = 0$
$\overset{\text{Ü}}{\Rightarrow}$ A hat das Maß 0 (im alten Sinn).

Erinnerung an das Maßproblem: Gegeben sei eine Funktion ($m \geqslant 1$).

$$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^m) \ni X \mapsto \mu(X) \in [0, \infty] = \bar{\mathbb{R}}_+$$

mit den Eigenschaften

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $(X_i) \subset \mathcal{P}(X)$ disjunkt, so ist $\mu(\bigcup_{i\geqslant 1} X_i) = \sum_{i\geqslant 1} \mu(X_i)$
- ist g eine Euklidische Bewegung, so gilt $\mu(g(X)) = \mu(X)$.

Dann gilt $\mu(X) = 0 \ \forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$.

6) Sei $A \in \mathcal{L}$ und g eine euklidische Bewegung, d.h. $g(x) = O_g x + a_g$ mit $a_g \in \mathbb{R}^m, O_g \in O(m)$.
Frage: Ist $g(A) \in \mathcal{L}$ und $\lambda(g(A)) = \lambda(A)$?
Wir müssen untersuchen, ob $\chi_{g(A)\cap B_R(0)} \in \widetilde{L^1}$, und wir müssen

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \chi_{g(A)\cap B_R(0)}$$

bestimmen. Wir müssen benutzen, dass g ein C^1-Diffeomorphismus $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ist!

$$\chi_{g(A)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in g(A) \Leftrightarrow g^{-1}(x) \in A \\ 0, & x \notin g(A) \Leftrightarrow g^{-1}(x) \notin A \end{cases} = \chi_A \circ g^{-1}(x)$$

Für $f \in C_0(\mathbb{R}^m)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx = \int_{g^{-1}(\mathbb{R}^m)} f(x)dx|^{x=g^{-1}(y)} = \int_{\mathbb{R}^m} f \circ g^{-1}(y)|\det Dg^{-1}(y)|dy$$

$$g(x) = y \Rightarrow O_g x = y - a_y \Rightarrow x = O_g^t y - O_g^t a_g = g^{-1}(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} f \circ g^{-1}(y)dy$$

Das heißt: Ist $(f_n)\ L^1 - CF \subset C_0(\mathbb{R}^m)$ mit $f_n(x) \to \chi_A(x)$ fast überall, so ist $(f_n \circ g^{-1})L^1 - CF \subset C_0(\mathbb{R}^m)$, die fast überall gegen $\chi_A \circ g^{-1}$ konvergiert. $\chi_A \circ g^{-1} = \chi_{g(A)}$ (beachte, dass $g(B)$ das Maß 0 hat für g C^1-Diffeomorphismus.)
Also ist $\chi_{g(A)} \in \tilde{L}^1$ und, falls $\lambda(A) < \infty$, so gilt

$$\|\chi_{g(A)}\|_1 = \|\chi_A \circ g^{-1}\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|f_n \circ g^{-1}\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = \|\chi_A\|_1$$

Andernfalls betrachte $A \cap B_R$ (!).

6.1.16 Satz

Es gibt eine Menge $B \subset \mathbb{R}^1$, die nicht in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^1)$ ist, das heißt $\mathcal{L}(\mathbb{R}^1) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^1)$.

Beweis Betrachte $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ und zerlege I in die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}, I = \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$. Nun benutzen wir das Auswahlaxiom. Es gibt eine Menge $B \subset I$ mit $B \cap I_\alpha = \{x_\alpha\}\,\forall \alpha \in A$.
Wir schreiben jetzt $[-1{,}1] \cap \mathbb{Q} = (r_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Dann betrachten wir

$$(1) \quad B_k := B + r_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

Weiter ist für $k \neq l$ $B_k \cap B_l = \emptyset$, denn sonst gäbe es $x_\alpha, x_\beta \in B$ mit

$$x_\alpha + r_k = x_\beta + r_l \quad \Rightarrow x_\alpha - x_\beta \in \mathbb{Q}$$

Schließlich gilt

$$(2) \quad \bigcup_{k\geqslant 1} B_k \supset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \ni x = x_\alpha + \underbrace{(x - x_\alpha)}_{\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]}$$

Wenn nun $B \in \mathcal{L}$ wäre, so wäre $\lambda(B_k) = \lambda(B)$, und wegen der σ-Additivität gilt

$$\lambda(\bigcup_{k\geqslant 1} B_k) \leqslant \lambda\left(\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = 3$$

$$\geqslant N\lambda(B) \quad \forall N \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \lambda(B) = 0$$

$\Rightarrow \lambda\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) = 0$ - Widerspruch. $\square$

VL: Mi, 2004-04-28

Erinnerung

In $\mathbb{R}^m$: $\widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m) \ni f \mapsto \int f$
Für Messbare Mengen $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ gilt:

$$A \in \mathcal{L} \Leftrightarrow \forall R > 0 : \chi_{A \cap B_R(0)} \in \widetilde{L^1} \;\; ; \lambda(A) := \lim_{R \to \infty} \|\chi_{A \cap B_R(0)}\|$$

Aber: $\mathcal{L} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ (Auswahlaxiom!)

Abstraktion: Allgemeine Integrationstheorie

6.2 Abstrakte Integration

Daten: Es sei X eine Menge, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und μ eine Abbildung:

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+} = [0, \infty]$$

Wir benötigen außerdem Axiome für $\mathcal{A}$ und μ

Motivation: Algebra auf $\mathcal{P}(X)$

$$\mathcal{P}(X) \ni A \longmapsto \chi_A \in \mathcal{M}(X, \{0,1\})$$

ist bijektiv, denn $A = \chi_A^{-1}(1)$
$\{0,1\} \simeq \mathbb{Z}_2$ Körper (beachte $1 + 1 = 0$!)
Also äquivalent:

$$\mathcal{P}(X) \ni A \longmapsto \widehat{\chi}_A \in \mathcal{M}(X, \mathbb{Z}_2) =: \widehat{X}$$

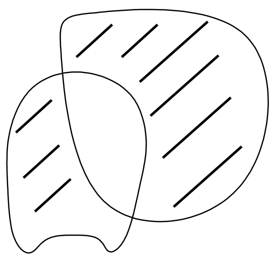
Dann ist $\widehat{X}$ ein kommutativer Ring:

$$(\widehat{\chi}_A + \widehat{\chi}_B)(x) := \widehat{\chi}_A(x) + \widehat{\chi}_B(x)$$
$$(\widehat{\chi}_A \cdot \widehat{\chi}_B)(x) := \widehat{\chi}_A(x) \cdot \widehat{\chi}_B(x)$$

Das Nullelement ist $\widehat{\chi}_\emptyset$ und das Einselement ist $\widehat{\chi}_X$.

- "Produkt" von zwei Mengen $A, B \subset X$: $\widehat{\chi}_{A \cdot B}(x) = \widehat{\chi}_A(x) + \widehat{\chi}_B(x) = \widehat{\chi}_{A \cap B}(x)$
- "Summe" von $A, B \subset X$:

$$\widehat{\chi}_{A+B} = \widehat{\chi}_A + \widehat{\chi}_B = \begin{cases} 0, & \widehat{\chi}_A(x) = \widehat{\chi}_B(x) = 0 \text{ oder } \widehat{\chi}_A(x) = \widehat{\chi}_B(x) = 1 \\ 1, & \widehat{\chi}_A(x) = 0, \widehat{\chi}_B(x) = 1 \text{ oder } \widehat{\chi}_A(x) = 1, \widehat{\chi}_B(x) = 0 \end{cases}$$
$$= \widehat{\chi}_{A \cup B \setminus A \cap B}(x) = \widehat{\chi}_{A \triangle B}(x)$$



A ΔB

Also ist z.B.

1) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$

2) $A \cap (B \triangle C) = A \cap B \triangle A \cap C$

6.2.1 Definition

Ein Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt ein Ring, falls $\mathcal{A}$ ein Unterring von $\mathcal{P}(X)$ bez. $\cap$ und Δ ist. $\mathcal{A}$ heißt eine (Unter-)Algebra, falls $X \in \mathcal{A}$.

Eine Algebra $\mathcal{A}$ heißt eine σ-Algebra, falls aus $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ auch $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathcal{A}$ folgt.

6.2.2 Hilfssatz

Für $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1) $\mathcal{A}$ ist ein Ring

2) $\emptyset \in A$ und $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \triangle B, A \cap B \in \mathcal{A}$

3) $\emptyset \in A$ und $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \triangle B, A \cup B \in \mathcal{A}$

4) $\emptyset \in A$ und $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cup B, A \setminus B \in \mathcal{A}$

6.2.3 Hilfssatz

Für $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1) $\mathcal{A}$ ist eine Algebra

2) $X \in \mathcal{A}$ und $\forall A, B \in \mathcal{A}$ ist $\mathcal{C}A$ und $A \cup B \in \mathcal{A}$

3) $X \in \mathcal{A}$ und $\forall A, B \in \mathcal{A}$ ist $\mathcal{C}A$ und $A \cap B \in \mathcal{A}$

Bemerkungen

1) $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ σ-Algebra $\Rightarrow \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ ist σ-Algebra.

2) $\{\emptyset, X\}$ ist eine σ-Algebra.

3) $\mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{L}$ sind σ-Algebren.

6.2.4 Definition

Es sei $\mathcal{A}_0 \in \mathcal{P}(X)$ beliebig. Dann definieren wir die von $\mathcal{A}_0$ erzeugte σ-Algebra als

$$\bigcap_{\substack{\mathcal{A}\sigma\text{-Alg.,} \\ \mathcal{A} \supset \mathcal{A}_0}} \mathcal{A}.$$

(Auch ein beliebiger Durchschnitt von σ-Algebren ist eine σ-Algebra.)

6.2.5 Definition

Es sei (X,d) ein metrischer Raum. Die von $\{O \subset X, \text{O offen}\}$ erzeugte σ-Algebara heißt die σ-Algebra der Borel-Mengen (nach Emile Borel): $\mathcal{B}(X)$

Bemerkung: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{L}$ (!), aber $\mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \neq \mathcal{L}$

6.2.6 Definition

Es sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Algebra. Ein *positives Maß* auf $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}_+}$ mit

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, wenn $A, B \in \mathcal{A}$ und $A \cap B = \emptyset$

μ heißt σ-additiv, wenn außerdem gilt: Ist $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine disjunkte Familie mit $A_i \in \mathcal{A}\ \forall i$ und $A := \bigcup A_i \in \mathcal{A}$, dann gilt:

$$\mu(\bigcup_{i \geqslant 1} A_i) = \sum_{i \geqslant 1} \mu(A_i)$$

Bemerkungen

1) λ ist ein σ-additives Maß auf $\mathcal{L}$

2) $\mu(A) = 0\ \forall A \in \mathcal{L}$ ist das triviale Maß,
Nichttrivialität bedeutet: Es gibt $A \in \mathcal{A} : \mu(A) > 0$

3) Positive nichttrivale Maße auf $\mathcal{P}(X)$:

   (a) Für $x_0 \in X$ definiere $\mu_{x_0}(A) := \begin{cases} 1, & x_0 \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$.
   (Dirac-Maß, σ-additiv)

   (b) $\mu(A) := \begin{cases} \#A, & \text{falls A endlich} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$
   Dieses μ heißt das Zählmaß und ist σ-additiv.

4) Auf $\mathcal{L}$ können wir ein Maß μ_f definieren für jedes $0 \leqslant f \in \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ durch

$$\mu_f(A) = \int_A f = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_A \cdot f \quad \text{(Übung!)}$$

6.2.7 Definition

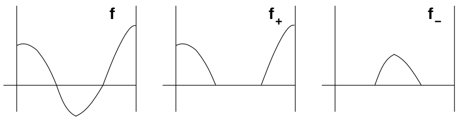
Ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt ein Maßraum, wenn X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und μ ein positives σ-additives Maß ist.

Wesentliches Beispiel: $(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}, \lambda)$

6.2.8 Definition

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt ein Wahrscheinlichkeitsraum, wenn $\mu(X) = 1$.

Beispiel $\#X < \infty$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, $\mu = \frac{\text{Zählmaß}}{\#X}$
Mit diesen Daten wollen wir integrieren.



Idee der Treppenfunktionen / Riemannsche Summen

6.2.9 Definition

Eine Abbildung $f : X \mapsto \mathbb{R}_+$ heißt Treppenfunktion, wenn es paarweise disjunkte Mengen $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant N} \in \mathcal{A}$ gibt mit $\mu(A_i) < \infty$ und $f(x) = \sum\limits_{i=1} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$, wir definieren dann

$$\int_X f d\mu = \int_X f(x) d\mu(x) := \sum_1^N \alpha_i \mu(A_i) \in \mathbb{R}$$

Raum der Treppfunktionen: $\mathcal{T}(X, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{T}$

Bemerkungen

1) Die Forderung $\alpha_i \geqslant 0$ ist unnötig, von nun an $\alpha_i \in \mathbb{C}$ i. allg.

2) Das Integral ist linear in $\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned}
f_j &= \sum_{i=1}^{N_j} \alpha_{ji} \chi_{A_{j\,i}} \\
\Rightarrow f_2 &= \sum \alpha_{2i} \chi_{A_{2_i}} = \sum_i \alpha_{2i} \sum_k \chi_{A_{2_i} \cap A_{i_k}} \\
\Rightarrow f_j &= \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant N_1 \\ 1 \leqslant k \leqslant N_2}} \alpha_{ji} \chi_{A_{1_i} \cap A_{2_k}} \\
\Rightarrow \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 &= \sum_{i,k} (\beta_1 \alpha_{1i} + \beta_2 \alpha_{2k}) \chi_{A_{1\,i} \cap A_{2\,k}} \\
\Rightarrow \int (\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2) d\mu &= \sum_{i,k} (\beta_1 \alpha_{1i} + \beta_2 \alpha_{2k}) \mu(A_{1i} \cap A_{2k}) \\
&= \beta_1 \int f_1 d\mu + \beta_2 \int f_2 d\mu
\end{aligned}$$

Dabei nehmen wir an, dass $\bigcup A_{1_i} = \bigcup A_{2_i} = X$, wobei α_{ji} auch den Wert 0 annehmen kann.
$\int : \quad \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$

VL: Mo, 2004-05-03

Fundamentale Eigenschaften

(F1) $\int$ ist linear

(F2) $\int$ ist monoton

(F3) $|\int f| \leqslant \int |f| \leqslant \|f\| \, C_m d(\operatorname{supp} f)^m$

Fundamentallemma

$(f_n) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^m)$ L^1-Cauchy-Folge $\Rightarrow \exists (f_{n_k})$ mit

1) $f_{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\to} f(x)$, für fast alle $x \in \mathbb{R}^m$

2) $\|f - f_n\|_1 \underset{n\to\infty}{\to} 0$, wenn $\|f\|_1 := \lim_{k\to\infty} \|f_{n_k}\|_1$.

Bemerkung: Der Beweis benutzt nur (F1-3) und die Definition von $\int_V f$ für offene $V \subset \mathbb{R}^m$. Genauer brauchen wir, dass $\int_V |f| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} |f| = \|f\|_1$.

Damit haben wir den Raum $\widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ mit dem zugehörigen Integralbegriff:

$$\int : \quad \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$$

Messbare Mengen: $A \subset \mathbb{R}^m$, $\chi_{A\cap B_R(0)} \in \widetilde{L^1}$; Gesamtheit $\mathcal{L}$ Lebesgue-messbare Mengen.
Maß: $\lambda(A) = \lim_{R\to\infty} \left\|\chi_{A\cap B_R(0)}\right\|_1$ das Lebesgue-Maß

$$\int : \quad \mathcal{T}(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$$

(F1) erledigt

(F2) $f(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \chi_{A_i}(x) \geqslant 0 \iff \alpha_i \geqslant 0 \ \forall i \Rightarrow \int_X f d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(A_i) \geqslant 0$

(F3) $|f| = \sum_i |\alpha_i| \chi_{A_i} \Rightarrow$

$$\int |f| d\mu \leqslant \sum_i \|f\|_\infty \mu(A_i) = \|f\|_\infty \mu\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \|f\|_\infty \mu(\operatorname{supp} f)$$

6.2.10 Definition

Es sei $A \in \mathcal{A}$ und $f \in \mathcal{T}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dann setzen wir $\int_A f d\mu := \int_X \chi_A f d\mu$.

Bemerkung Das ist wohldefiniert, weil $f = \sum_i \alpha_i \chi_{A_i} \Rightarrow$

$$\chi_A f = \sum_i \alpha_i \chi_A \chi_{A_i} = \sum_i \alpha \chi_{A\cap A_i} \in \mathcal{T}(X, \mathcal{A}, \mu)$$

$$\text{mit } \int_A f d\mu = \sum_i \mu(A \cap A_i) \in \mathbb{R}.$$

6.2.11 Hilfssatz (F4)

Für $f \in \mathcal{T}(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$, folgt

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu.$$

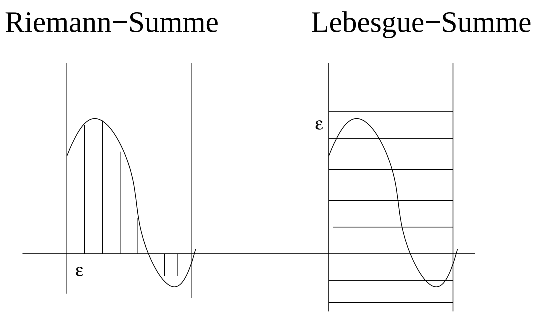
Bemerkungen

1) Also ist das Integral von $f \in \mathcal{T}$ eine Funktion $\mathcal{A} \ni A \mapsto \int_A f d\mu \in \mathbb{R}$. Ist $f \geqslant 0$, so ist $A \mapsto \int_A f d\mu$ ein positives Maß.

2) Beispiel: Das Gauß- Maß auf $\mathbb{R}^m$ ist definiert durch $g(A) := \int_A e^{-|x|^2} \frac{dx}{(2\pi)^{m/2}}$, (kleiner Vorgriff) wobei $\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2} \frac{dx}{(2\pi)^{m/2}} = 1$, d.h. $(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}, g)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum.

3) Für $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, $a < c < b$ hatten wir $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Frage: Ist $\mathcal{T}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}, \lambda) \subset \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$? Ja!
$f(x) = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$;
$\mathrm{im} f = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_N\}$, Annahme $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j \Rightarrow A_i = f^{-1}(\alpha_i)$.



Riemann-Summe:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_i \varepsilon f(\mathfrak{z}_i)$$

Lebesgue-Summe:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_i f(\mathfrak{z}_i)\lambda(f^{-1}(x_i, x_{i+1}))$$

$$f: \quad (X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) \to (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$$

6.2.12 Definition

f heißt *messbar bezüglich* $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, wenn $f^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1\ \forall A_2 \in \mathcal{A}_2$. Im Spezialfall $X_2 = \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (und $\mu_2 = \lambda$) nennen wir f einfach *messbar*.

6.2.13 Hilfssatz

Sei $f : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent.

1) f ist messbar.
2) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(x > a) \in \mathcal{A}$.
3) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(x \geqslant a) \in \mathcal{A}$.
4) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(x < a) \in \mathcal{A}$.
5) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(x \leqslant a) \in \mathcal{A}$.

Beweis z.B.: 1 $\iff$ 2
$\{x > a\}$ ist offen, also in $\mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(x > a) \in \mathcal{A}$, wenn f messbar ist.
Sei $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ offen $\Rightarrow U$ ist abzählbare Vereinigung von Mengen der Form $\{a < x < b\}$. Weiter ist $\{a < x < b\} = \{x > a\} \cap \{x < b\}$. Nun ist

$$\{x < b\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \leqslant b - \frac{1}{n}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}\{x > b - \frac{1}{n}\}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(a < x < b) = f^{-1}(x > a) \cap f^{-1}(x < b) = \underbrace{f^{-1}(x > a)}_{\in\mathcal{A}} \cap \bigcup \underbrace{\mathcal{C} f^{-1}(x > b - \frac{1}{n})}_{\in\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

Nun ist $f^{-1}(\mathcal{B})$ die kleinste σ-Algebra, die $f^{-1}(U)$, $U \subset \overline{\mathbb{R}}$ offen, enthält, aber $\mathcal{A} \ni f^{-1}(U)\ \forall U$ offen $\Rightarrow \mathcal{A} \supset f^{-1}(\mathcal{B}) \Rightarrow f$ messbar.

Bemerkungen

(1) In der Stochastik heißen messbare Funktionen *Zufallsvariablen*.

(2) $\mathcal{T}(X, \mathcal{A}, \mu) \subset \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A})$ =: messbare Funktionen von $(X, \mathcal{A})$. Denn für $f \in \mathcal{T}$ ist $f^{-1}(x > a) = \bigcup_{\alpha_i > a} A_i$.

6.2.14 Satz

Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A})$ mit $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x)$, $\forall x \in X$. Dann ist $f \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A})$.

Beweis 1. Schritt: Wir zeigen für beliebige Folgen, dass $\sup f(x) := \sup_n f_n(x)$ und $\inf f(x) := \inf_n f_n(x) \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A})$. Dann ist
$(\sup f)^{-1}\{x > a\} = \{p \in X; \sup_n f_n(p) > a\} = \bigcup_n \{p \in X; f_n(p) > a\} = \bigcup_n f_n^{-1}(x > a) \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$,
$(\inf f)^{-1}\{x \geqslant a\} = \{p \in X; \inf_n f_n(p) \geqslant a\} = \bigcap_n \{p \in X; f_n(p) \geqslant a\} = \bigcap_n f_n^{-1}(x \geqslant a) \in \mathcal{A} \quad \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$.

2. Schritt: Wir zeigen als nächstes, dass $\overline{\lim} f(x) := \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ und $\underline{\lim} f(x) := \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)$ ebenfalls messbar sind. Wir setzen $g_n := \sup_{k\geqslant n} f_k(x) \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A})\ \forall n$ (nach Schritt 1). Dann ist $g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)\ \forall n, x$ und $\lim_{n\to\infty} g(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} g_n(x) = \overline{\lim} f(x)$. $\Rightarrow \overline{\lim} f \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A})$ und $\underline{\lim} f$ analog (betrachte $-f$).

3. Schritt:
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \overline{\lim} f_n(x) \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A}).$$

□

6.2.15 Hilfssatz

1) Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A})$, so ist $g \circ f \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A})$ (wenn $f(x) \in \mathbb{R}\ \forall x$).
2) Ist $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ stetig und sind $f_i \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A})$ für $i = 1, \ldots, m$, so auch $g(f_1, \ldots, f_m)$ (eventuell mit $f_i(x) \neq \infty$).

Beweis: Übung

Anwendung: $f_1, f_2 \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A}) \Rightarrow \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A})$, weil $g : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto \alpha_1 x + \alpha_2 y \in \mathbb{R}$ stetig ist.

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum X, $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}, \lambda)$ Maßraum $\overline{\mathbb{R}}$ *VL: Mi, 2004-05-05*

$$X \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}} \text{ messbar } \iff f^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathcal{A}\ \forall B \in \mathcal{B}$$

Beispiel: Messbare Funktionen sind nicht unbedingt integrierbar, z.B. wenn $\mu(X) = \infty$, dann ist $f(x) = 1$ zwar messbar, hat aber kein endliches Integral.

Aber: $\widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m) \subset \mathrm{Mes}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}, \lambda)$

Denn zu $f \in \widetilde{L^1}$ gibt es eine Folge $(f_n) \subset C_0(\mathbb{R}^m)$, die fast überall gegen f konvergiert. Diese Folge besteht aus messbaren Funktionen, denn $f_n^{-1}(x > a)$ ist offen, also in $\mathcal{L}$.

Sei $A \in \mathcal{L}$, $\lambda(A) = 0$ die Ausnahmenmenge; dann ersetzen wir $f_{(n)}$ durch $\chi_{\complement A} f_{(n)} =: \tilde{f}_{(n)}$. Dann ist

$$\left(\tilde{f}_n\right)^{-1}(x > a) = \mathcal{A} \cap f_n^{-1}(x > a) \in \mathcal{L} \text{ und } \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x) = \tilde{f}(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^m$$

Nach dem Konvergenzsatz 6.2.14 ist $\tilde{f} \in \mathrm{Mes}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L})$.
Außerdem gilt folgendes: Ist $g :\ X \to \overline{\mathbb{R}}$ beliebig mit $\mathrm{supp}\, g := g^{-1}(\overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\})$ vom Maß 0, so gilt $g^{-1}(x \leqslant a) \subset \mathrm{supp}\, g$, d.h. hat Maß 0 oder $g^{-1}(x <= a) \subset \mathrm{supp}\, g$, d.h. ist Komplement einer Menge vom Maß 0 und ist also messbar.

Wie konstruieren wir das Integral – und damit $\widetilde{L^1}$ – ausgehend von $\mathcal{T}(X, \mathcal{A}, \mu)$?

6.2.16 Definition

Wir setzen
$$\mathcal{T}(X, \mathcal{A}) := \{f \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A});\ \ \mathrm{im}\, f \text{ endlich}\}$$
Dann ist für diese f
$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \chi_{f^{-1}(\alpha)}$$

Bemerkung: Dann wird

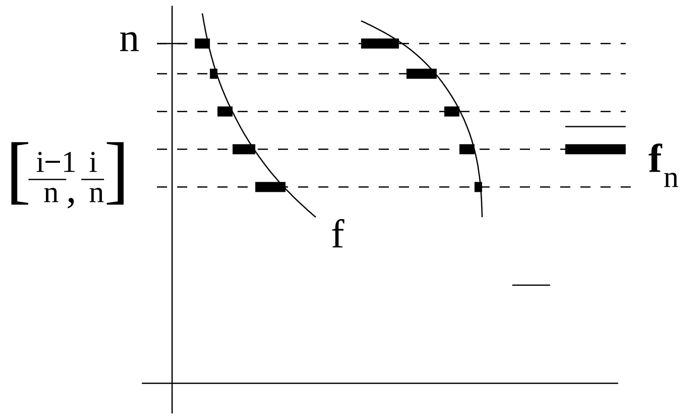
$\mathcal{T}(X,\mathcal{A},\mu) = \{f \in \mathcal{T}(X,\mathcal{A});\ \|f\|_1 < \infty\} = \{f \in \mathcal{T}(X,\mathcal{A});\ \mu(f^{-1}(\alpha)) < \infty\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$

6.2.17 Satz

Zu jedem $f \in \mathrm{Mes}(X,\mathcal{A})$ existiert eine Folge $(f_n) \subset \mathcal{T}(X,\mathcal{A})$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ \forall x \in X$.

Ist f beschränkt, so ist die Konvergenz sogar gleichmäßig.

Beweis: o.B.d.A. $f \geqslant 0$ (weil f messbar $\iff$ $f_\pm$ messbar)



Wir setzen jetzt

$$f_n = \sum_{i=1}^{n^2} \frac{i-1}{n} \chi_{f^{-1}[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}]} + n\chi_{f^{-1}(x \geqslant n)}$$

Konvergenz

1. Fall $f(x) < \infty \Rightarrow \exists n_0 > f(x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n}$ für $n \geqslant n_0$
2. Fall $f(x) = \infty \Rightarrow x \in f^{-1}(x > n)\ \forall n \Rightarrow f_n(x) = n \nearrow \infty$

Gleichmäßigkeit

$$0 \leqslant f(x) \leqslant C < \infty \Rightarrow f(x) \leqslant n\ \forall n \geqslant n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}\ \forall x \square$$

Konstruktion des Integrals durch L^1-Abschluss des Raumes $\mathcal{T}(X,\mathcal{A},\mu)$

Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{T}(X,\mathcal{A},\mu)$ haben wir (in 6.2.9) ein Integral definiert, das die Eigenschaften F1, F2 und F3 hat:

$$\int_X \sum_{\alpha\in\mathbb{R}} \alpha\chi_{f^{-1}(\alpha)} d\mu = \sum_{\alpha\in\mathbb{R}} \alpha\mu(f^{-1}(\alpha))$$

Damit erhalten wir den folgenden Satz, der genauso bewiesen wird wie für $C_0(\mathbb{R}^m)$ und sein Integral (vgl. 6.1.2)!

6.2.18 Satz

(1) Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(X,\mathcal{A},\mu)$ eine L^1-Cauchy-Folge. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die fast überall gegen eine Funktion $f \in \mathrm{Mes}(X,\mathcal{A})$ konvergiert

(2) Es sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(X,\mathcal{A},\mu)$ eine L^1-Cauchy-Folge, die fast überall gegen 0 konvergiert. Dann ist $\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_1 = 0$.

Wir definieren jetzt den Raum $\widetilde{L^1}(X,\mathcal{A},\mu)$.

6.2.19 Definition

$$\begin{aligned}\widetilde{L^1}(X,\mathcal{A},\mu) \quad := \quad & \{f \in \mathrm{Mes}(X,\mathcal{A});\ \text{es gibt eine } \widetilde{L^1}\text{-CF } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(X,\mathcal{A},\mu), \\ & \text{die f.ü. gegen } f \text{ konvergiert}\}\end{aligned}$$

Weiter definieren wir das Integral durch

$$\int_X f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

Bemerkungen

(1) Das Integral existiert, weil

$$\left| \int_X (f_n - f_{n+k} d\mu) \right| \underset{\text{F3}}{\leqslant} \int_X |f_n - f_{n+k}|\, d\mu = \|f_{n+k} - f_n\|_1 \leqslant \varepsilon \text{ für } n \geqslant n(\varepsilon).$$

(2) Das Integral ist unabhängig von der Auswahl der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sind $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ L^1-Cauchy-Folgen in $\mathcal{T}(X,\mathcal{A},\mu)$, die beide fast überall gegen $f \in \mathrm{Mes}(X,\mathcal{A})$ konvergieren, so definiert $h_n := f_n - g_n$ eine L^1-Cauchy-Folge in $\mathcal{T}(X,\mathcal{A},\mu)$, die fast überall gegen 0 konvergiert. Nach 6.2.18 (2) gilt dann

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X g_n d\mu \right| = \left| \int_X h_n d\mu \right| \leqslant \int_X |h_n|\, d\mu = \|h_n\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(3) Für $X = \mathbb{R}^m,\ \mathcal{A} = \mathcal{L},\ \mu = \lambda$, erhalten wir so den Raum $\widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$ zurück

(a) $f \in \widetilde{L^1}$, z.z.: es gibt eine approximierende L^1-Cauchy-Folge in $\mathcal{T}(\mathbb{R}^m,\mathcal{L},\lambda$. Zunächst gibt es eine L^1-CF $(f_n) \subset C_0(\mathbb{R}^m)$, die fast überall gegen f konvergiert. Als nächstes konstruieren wir Treppenfunktionen $g_n \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^m,\mathcal{L},\lambda)$ so, dass

$$\begin{aligned} &|g_n(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}\lambda(\operatorname{supp} f_n)^{-1} \quad (\|f_n\| \geqslant C > 0\ \forall n) \\ &\Rightarrow \|g_n - f_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}^m} |g_n - f_n|\, d\lambda \underset{\text{F3}}{\leqslant} \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow (g_n)\ \ L^1\text{-CF, die fast überall gegen } f \text{ konvergiert}\end{aligned}$$

(b) Es gilt auch $\widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m,\mathcal{L},\lambda) \subset \widetilde{L^1}(\mathbb{R}^m)$, aber das ist technisch etwas unangenehmer: s.u.

Wir haben das Integral $I : \widetilde{L^1}(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ konstruiert: *VL: Mo, 2004-05-10*

$$f \in \widetilde{L^1}(X, \mathcal{A}, \mu) \iff \exists (f_n) \in \mathcal{T}(X, \mathcal{A}, \mu)$$

mit

(1) (f_n) ist L^1-CF

(2) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ f.ü. für eine geeignete Teilfolge.
Dann ist: $I(f) = \int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$

6.2.20 Satz

Auf $\widetilde{L^1}$ hat das Integral die folgenden Eigenschaften:

F1) Linearität

F2) Monotonie

F3) $|\int_X f d\mu| \leqslant \int_X |f| d\mu \leqslant \|f\|_\infty \, \mu(\operatorname{supp} f)$

F4) Wird für $A \in \mathcal{A}$ $\int_A f d\mu$ definiert durch $\int_X f \chi_A d\mu$, so gilt für $A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \emptyset$:
$$\int_{A\cup B} d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

Beweis:

F1: $f_i \in \widetilde{L^1}(X, \mathcal{A}, \mu), \alpha_i \in \mathbb{R}$; wähle definierende Folgen $(f_{i,n}) \in \mathcal{T}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dann ist $(f_{i,n})$ L^1-CF und $f_{i,n_k}(x) \to f_i(x)$ fast überall (o.B.d.A.!). Dann ist auch $(\alpha_1 f_{1n} + \alpha f_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ L^1-CF und $(\alpha_1 f_{1n} + \alpha_2 f_{2n})(x) \to (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(x)$ f.ü. $\Rightarrow \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \widetilde{L^1}$ und

$$\begin{aligned}
\int_X (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X (\alpha_1 f_{1n} + \alpha_2 f_{2n}) d\mu \\
&\underset{\text{F3) für } \mathcal{T}}{=} \alpha_1 \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu + \alpha_2 \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \\
&= \alpha_1 \int_X f_1 d\mu + \alpha_2 \int_X f_2 d\mu
\end{aligned}$$

F2: $f \in \widetilde{L^1}, f \geqslant 0 \iff f = f_+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$. Wähle definierende Folge $(f_n) \in \mathcal{T} \Rightarrow f_{n+} = \frac{1}{2}(f_n + |f_n|) \in \mathcal{T}$ und $f_{n_+}(x) \to f_+(x)$ f.ü. Außerdem ist (f_{n+}) L^1-CF, denn

$$\begin{aligned}
\||f_n| - |f_m|\|_1 &= \int_X ||f_n| - |f_m|| \, d\mu \underset{\text{F2) für} \mathcal{T}}{\leqslant} \int_X |f_n - f_m| d\mu \\
&= \|f_n - f_m\|_1 \leqslant \varepsilon \text{ für } n, m \geqslant n(\varepsilon)
\end{aligned}$$

Also ist

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_{n_+} d\mu \underset{\text{F3) für} \mathcal{T}}{\geqslant} 0$$

F3: Die erste Ungleichung folgt aus F1), F2), weil $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$. Für die 2. Ungleichung benötigen wir eine Vorbemerkung:

Eine messbare Funktion $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *wesentlich beschränkt*, wenn es eine Menge $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ und eine Konstante $C = C(A, f)$ gibt mit: $|f(x)| \leqslant C$ für $x \notin A$. Wir setzen dann

$$\|f\|_\infty = \begin{cases} \inf\limits_{\substack{A\in\mathcal{A}\\ \mu(A)=0}} C(A, f), & \text{falls } f \text{ wesentlich beschränkt} \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiterhin setzen wir $\operatorname{supp} f = f^{-1}(\overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\})$.

Zur 2. Ungleichung: Sie ist trivial, wenn $\|f\|_\infty = \infty$ (dann ist automatich $\mu(\operatorname{supp} f) > 0$); also nehmen wir $\|f\| < \infty$ an. Sie ist ebenfalls trivial, falls $\mu(\operatorname{supp} f) = \infty$ (dann ist automatisch $\|f\|_\infty > 0$); also nehmen wir auch $\mu(\operatorname{supp} f) < \infty$ an. Wir wählen dann eine definierende Folge $(f_n = f_{n+})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}(X, \mathcal{A}, \mu)$ für $|f|$, und zwar so, dass $\|f_{n+}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \varepsilon$ für $\varepsilon > 0$ beliebig und $\operatorname{supp} f_{n+} \subset \operatorname{supp} |f|$. Dann ist

$$\int_X |f| d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_{n+} \underset{\text{F3) für}\mathcal{T}}{\leqslant} (\|f\|_\infty + \varepsilon)\mu(\operatorname{supp} f_{n+}) \leqslant (\|f\|_\infty + \varepsilon)\mu(\operatorname{supp} f)$$

Also folgt F3). Zur Konstruktion von (f_n): Wähle $A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0$ so, dass $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \varepsilon$ für $x \notin A$.

Dann konstruieren wir

$$g_n := \sum_{j=1}^{n^2} \frac{j-1}{n} \chi_{|f|^{-1}((\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}])}$$

und setzen $f_n := \chi_{\complement A} g_n$. Dann wird $\int_X f_n d\mu = \int_X g_n d\mu \leqslant (\|f\|_\infty + \varepsilon)\mu(\operatorname{supp} f)$

F4: $\int_{A\cup B} f d\mu = \int_X \underbrace{\chi_{A\cup B}}_{\in \widetilde{L^1}} f d\mu = \int_X (\chi_A + \chi_B) f d\mu \underset{\text{F1)}}{=} \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$

6.2.21 Satz

Es sei $(f_n) \subset \widetilde{L^1}(X, \mathcal{A}, \mu)$ eine L^1-CF. Dann gibt es $f \in \widetilde{L^1}$ mit $f = L^1 \lim f_n \iff \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$

Beweis Es sei $g_n \in \mathcal{T}(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\|f_n - g_n\|_1 \leqslant \frac{1}{n}$. Sei nämlich $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine definierende Folge in $\mathcal{T}(X, \mathcal{A}, \mu)$ für f_n. Dann wählen wir $k(n)$ so, dass für $k_1, k_2 \geqslant k(n)$ gilt: $\|g_{n_{k_1}} - g_{n_{k_2}}\|_1 \leqslant \frac{1}{n}$. Dann ist $(|g_{n_k} - g_{n_{k(n)}}|)_k$ eine definierende Folge für $|f_n - g_{n_{k(n)}}|$, sodass

$$\|f_n - g_{n_{k(n)}}\|_1 = \int_X |f_n - g_{n_{k(n)}}| d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X |g_{n_k} - g_{n_{k(n)}}| d\mu \leqslant \frac{1}{n},$$

setze $g_n := g_{n_{k(n)}}$. O.B.d.A. ist $(g_n) \subset \mathcal{T}$ die definierende Folge einer Funktion $f \in \widetilde{L^1}$ (denn (g_n) ist L^1-CF!). Dann ist $(|g_k - g_n|)_{k\in\mathbb{N}}$ eine definierende Folge für $|f - g_n|$ und daher $\|f - g_n\| \leqslant \varepsilon$ für $n \geqslant n(\varepsilon)$, also

$$\|f - f_n\|_1 \leqslant \|f - g_n\|_1 + \|g_n - f_n\|_1 \leqslant \varepsilon + \frac{1}{n}$$

Bemerkung: Nach dem Fundamentallemma besitzt auch die L^1-CF (f_n) eine fast überall gegen f konvergierende Teilfolge.

6.3 Konvergenzsätze

Simple Frage: $(f_n) \subset \widetilde{L^1}(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für ein $f \in \widetilde{L^1}(X, \mathcal{A}, \mu)$

$$\overset{?}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \int_x f_n d\mu = \int_x \lim_{n\to\infty} f_n d_\mu$$

Beispiel $X = [0{,}1]$, $\mathcal{L}_X$, λ_X

Dann ist für $f_n(x) = x^n$:

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} \Rightarrow x^n \to 0 \text{ fast überall}$$

$$\int_0^1 x^n = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ – prima!}$$

Für $g_n(x) = nx^{n-1}$ ist aber

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \infty, & x = 1 \end{cases} \Rightarrow f_n(x) \to 0 \text{ f.ü.}$$

$$\int_0^1 g_n(x)dx = x^n\Big|_0^1 = 1 \neq 0 \text{ – Warum?}$$

6.3.1 Satz (von Beppo Levi über monotone Konvergenz)

Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \widetilde{L^1}(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit

(1) $f_{n+1}(x) \overset{\geqslant}{\leqslant} f_n(x)\ \forall x \in X$,

(2) $\int_X f_n d\mu \overset{\leqslant}{\geqslant} \alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$

Dann ist die Funktion $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ in $\widetilde{L^1}(X, \mathcal{A}, \mu)$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_x f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

Beweis: (o.B.d.A. $\geqslant$ in (1), $\leqslant$ in (2)) Wir haben

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} \left(f_1(x) + \sum_{j=1}^{n} (f_{j+1}(x) - f_j(x)) \right).$$

Dann ist $0 \leqslant (f_{n+k} - f_n)(x) = \sum_{j=n}^{n+k-1} \underbrace{(f_{j+1}(x) - f_j(x))}_{\geqslant 0}$ und

$$\|f_{n+k} - f_n\|_1 = \int_X (f_{n+k} - f_n)\, d\mu = \sum_{j=n}^{n+k-1} \int_X (f_{j+1} - f_j)\, d\mu \leqslant \alpha - \int_X f_n d\mu.$$

Also ist $\sum_{i=1}^{\infty} \int_X (f_{i+1} - f_i) d\mu$ konvergent, also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon)$ so, dass $\|f_{n+k} - f_n\|_{L^1} \leqslant \varepsilon$ für $n \geqslant n(\varepsilon),\ k \in \mathbb{N}$. Also ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine L^1-Cauchy-Folge, die überall gegen f konvergiert, damit auch in L^1 gegen f konvergiert und deshalb $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$. □

Diskussion: Für $f \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A}),\ f(x) \geqslant 0$, dann $f \in \widetilde{L^1}$ oder nicht. Ist $f \in \widetilde{L^1}$, so gilt für die Standardapproximation (f_n) an f die Beziehung $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \infty(!)$. Also kann ich für solche $f(\geqslant 0)$ immer $\int_X f d\mu \in \overline{\mathbb{R}_+}$ definieren.
Damit können wir gewisse Sätze eleganter formulieren:

6.3.2 Satz (Lemma von Fatou)

Es sei $f_n \subset \widetilde{L^1}(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit $|f_n(x)| \leqslant |f(x)|$ für ein $f \in \widetilde{L^1}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Dann ist

$$\int_X \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int f_n d\mu \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leqslant \int_X \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu$$

Beweis der linken Ungleichung: Wegen $f_n(x) \geqslant -|f(x)|$ für alle x ist $\widetilde{f_n}(x) := f_n(x) + |f(x)| \geqslant 0$, also o.B.d.A. $f_n(x) \geqslant 0\ \forall x$

$$a_n := \int_X f_n d\mu,\ \alpha_n = \inf_{k\geqslant n} a_k \leqslant a_j\ \forall j \geqslant n,\ \alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$$

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \geqslant 0$$

$$g_n(x) := \inf_{k\geqslant n} f_k(x) \leqslant f_j(x)\ \forall j \geqslant n,\ g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x)$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) \geqslant 0$$

Wir wissen, dass $g_n \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A})$, und wegen $0 \leqslant g_n \leqslant f_n \leqslant |f|$ ist $g_n \in \widetilde{L^1}$. Weiter gilt

$$\int_X g_n d\mu \leqslant \inf_{k\geqslant n} \int_X f_k d\mu = \alpha_n \leqslant \int_X |f| d\mu < \infty.$$

Also ist $\lim_{n\to\infty} g_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n \in \widetilde{L^1}$ nach Beppo Levi, und

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n d\mu = \int_X \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n d\mu \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

Die dritte Ungleichung folgt wenn wir f_n durch $-f_n$ ersetzen; und die zweite ist trivial. □

6.3.3 Satz (von Lebesgue, über beschränkte Konvergenz)

Es sei $(f_n) \subset L^1(X, A, \mu)$ eine Folge mit

(i) $f_n(x) \to f(x)$ fast überall,

(ii) $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ für ein $g \in \widetilde{L^1}$ fast überall.

Dann ist $f \in \widetilde{L^1}$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

Beweis: Es ist

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Nach dem Lemma von Fatou sind $\underline{\overline{\lim}} f_n \in \widetilde{L^1}$, und es gilt die Ungleichung:

$$\int_X f d\mu \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leqslant \int_X f d\mu$$

6.4 Integration auf Produkträumen

VL: Mi, 2004-05-12

Wie definieren wir zu den zwei Maßräumen $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ einen zugehörigen Maßraum

$$(X \times Y, \underbrace{\mathcal{A} \times \mathcal{B}}_{?}, \underbrace{\mu \times \nu}_{?})$$

Grundlegende Forderung: Für $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ soll $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ sein mit $\mu \times \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Problem: Das Mengensystem $\{A \times B; A \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$ genannt $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) =$ die *Produktmengen* verhält sich "gut" unter

$$\cap : (*) A \times B \cap A' \times B' = A \cap A' \times B \cap B'$$

Aber: Wie steht es mit $A \times B \cup A' \times B'$?

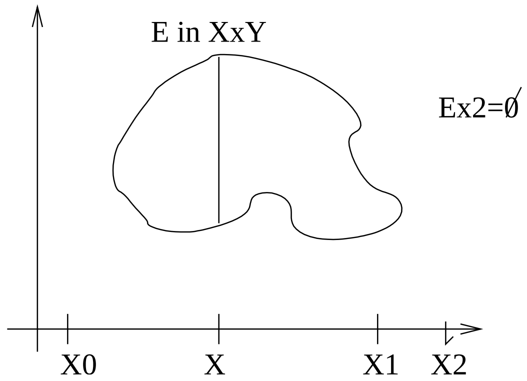
6.4.1 Definition

Sei Z eine beliebige Menge, $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Z)$ eine Teilmenge. $\mathcal{S}$ heißt ein π-*System*, wenn $S_1, S_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow S_1 \cap S_2 \in \mathcal{S}$

6.4.2 Definition

Wir bezeichnen mit $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ die kleinste σ- Algebra in $X \times Y$, die $\mathcal{P}$ enthält (= die von $\mathcal{P}$ erzeugte σ-Algebra, auch mit $\sigma(\mathcal{P})$ bezeichnet).

Was ist die Idee?



6.4.3 Definition

Für $E \subset X \times Y$ ist

$$E_x := \{y \in Y; (x,y) \in E\}$$

Äquivalent

$$X \overset{\pi_X}{\leftarrow} X \times Y \overset{\pi_Y}{\rightarrow} Y \qquad E_x = \pi_Y(\pi_X^{-1}(x) \cap E)$$

Dann sollte gelten

$$\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu \overset{Fubini}{=} \int_Y \mu(E_Y) d\nu = \mu \times \nu(E)$$

Vorläufige Annahme: $\mu(x) + \nu(x) < \infty$

6.4.4 Hilfssatz

Für $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist $E_x \in \mathcal{B}$ für alle $x \in X$.

Beweis: 1. Eigenschaften der Abbildung $E \mapsto E_x$: Ist $(E_i)_{i \in \mathcal{C}} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$, so gilt

$$\left(\bigcup_{i \in \mathcal{C}} E_i\right)_x \overset{?}{=} \bigcup_{i \in \mathcal{C}} E_{ix}$$

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{i \in \mathcal{C}} E_i\right)_x &= \{(x',y); (x',y) \in E_i \text{ für ein } i\}_x \\ &= \{y; (x,y) \in E_i \text{ für ein } i\} \\ &= \{y; y \in E_{ix} \text{ für ein } i\} = \bigcup_{i \in \mathcal{C}} E_{ix}\end{aligned}$$

Analog folgt

$$\left(\bigcap_{i \in \mathcal{C}} E_i\right)_x = \bigcap_{i \in \mathcal{C}} E_{ix}; \quad (\mathcal{C}E)_x = \mathcal{C}E_x$$

6.4.5 Definition

$\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Z)$ heißt ein λ-*System*, wenn folgendes gilt:

(λ1) $Z \in \mathcal{S}$;

(λ2) Ist $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ und $S_n \subset S_{n+1}$, so folgt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n \in \mathcal{S}$.

(λ3) $S_1, S_2 \in \mathcal{S}, S_1 \subset S_2 \Rightarrow S_2 \setminus S_1 \in \mathcal{S}$

6.4.6 Satz (λ-π-Satz)

Es sei $\mathcal{S}$ ein λ-System und $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ ein π-System. Dann gilt

$$\sigma(\mathcal{S}') \subset \mathcal{S}$$

Beweis

Malcolm Adams & Victor Guillemin: Measure Theory and Probability,
Monterey Ca. 1986, ISBN 0-534-06330-6

Wir betrachten jetzt das Mengensystem

$$\mathcal{S} := \{E \subset X \times Y; E_x \in \mathcal{B}\ \forall x \in X\}$$

Dann ist $\mathcal{S}$ eine σ-Algebra und $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$, denn für $E = A \times B, A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$ folgt:

$$E_x = \begin{cases} B, & x \in A, \\ \emptyset, & x \notin A \end{cases} \Rightarrow E_x \in \mathcal{B}\ \forall x \in X.$$

□

Wir haben $E_x \in \mathcal{B}\ \forall x \in X$, also $\nu(E_x) \leqslant \nu(Y) < \infty$. Damit definieren wir eine Funktion

$$X \ni x \mapsto \phi_E(x) = \nu(E_x) \in \mathbb{R}_+$$

z.z.: $\phi_E \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A})$.

6.4.7 Satz

Für $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist $\phi_E \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A})$.

Beweis: Wir setzen $\mathcal{S} := \{E \subset X \times Y; \phi_E \text{ messbar }\}$
Dann zeigen wir (mit dem λ-π-Satz!)

(1) $\mathcal{S}$ ist ein λ-System;

(2) $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$

Dann folgt $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \mathcal{S}$, also die Behauptung.

(1) $\mathcal{S}$ ist ein λ-System

(λ1) $X \times Y \in \mathcal{S}$:

$$\phi_{X\times Y}(x) = \nu((X \times Y)_x) = \nu(Y) \quad \forall x \in X$$

d.h. $\phi_{X\times Y} = \chi_X \cdot \nu(Y) \in \mathrm{Mes}(x, \mathcal{A})$

(λ2) $E_i \in \mathcal{S}, E_i \subset E_{i+1} \Rightarrow E := \bigcup E_i \in \mathcal{S}$.

$$0 \leqslant \phi_{E_i}(x) = \nu\left(E_{ix}\right) \leqslant \nu\left(E_{i+1,x}\right) = \phi_{E_{i+1}}(x)$$

d.h.

$$\phi_E(x) = \phi_{\bigcup E_i}(x) = \nu((\bigcup E_i)_x) = \nu(\bigcup E_{ix}) = \lim_{i\to\infty} \nu(E_{ix}) = \lim_{i\to\infty} \phi_{E_i}(x)$$

d.h. $\phi_E \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A})$

(λ3) $E_1, E_2 \in \mathcal{S} : E_1 \subset E_2 \Rightarrow E_2 \setminus E_1 \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}\phi_{E_2}(x) &= \nu(E_{2x}) = \nu((E_1 \cup E_2 \setminus E_1)_x) = \nu(E_{1x}) \cup (E_2 \setminus E_1)_x) \\ &= \nu(E_{1x} + \nu((E_2 \setminus E_1)_x) = \phi_{E_1}(x) + \phi_{E_2\setminus E_1}(x)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \phi_{E_2\setminus E_1} \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A}) \Rightarrow E_2 \setminus E_1 \in \mathcal{S}$

(2) $\mathcal{P} \subset \mathcal{S} \quad A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$,

$$\phi_{A\times B}(x) = \nu((A\times B)_x) = \begin{cases} \nu(B), & x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \phi_{A\times B} = \nu(B)\chi_A \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A})$$

□

Wir definieren jetzt das "Maß"

$$\pi' : \quad \mathcal{A} \times \mathcal{B} \ni E \mapsto \int_X \phi_E d\mu \in \mathbb{R}_+$$

wegen $0 \leqslant \phi_E(x) \leqslant \nu(y) \leqslant \infty$

6.4.8 Hilfssatz

π' ist ein positives Maß.

Beweis

1) $\pi'(\emptyset) = 0\checkmark$.

2) Sei $(E_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ disjunkt; z.z.:

$$\pi'\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \pi'(E_i)$$

$$\pi'\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right) = \int_X \phi_{\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i} d\mu = \int_X \nu\left(\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\right)_x\right) d\mu = \int_X \nu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_{ix}\right) d\mu$$
$$= \int_X \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu(E_{ix}) d\mu \overset{\text{Beppo-Levi}}{=} \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_X \nu(E_{ix}) d\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} \pi'(E_i).$$

□

6.4.9 Definition

Wenn wir die Rollen von X und Y vertauschen, so ensteht – nach denselben Argumenten – ein zweites Maß namens π'':

$$\pi''(E) = \int_Y \mu(E_y) d\nu(y)$$

6.4.10 Satz (Fubini I)

$\pi' = \pi''$.

Beweis: Wir setzen $\mathcal{S} := \{E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}; \pi'(E) = \pi''(E)\}$.
z.z.: (1) $\mathcal{S}$ ist ein λ-System (2) $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ (Übung!)
$\Rightarrow \pi' = \pi''$ auf $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. □

6.4.11 Definition

$\mu \times \nu := \pi' = \pi''$

VL: Mo, 2004-05-17

Erinnerung: $0 \leqslant f \subset \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A}) \Rightarrow \int_X f d\mu \in \overline{\mathbb{R}}_+$ benutze kanonische Approximation durch $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant f$, $f_n \in \mathcal{T}(X, \mathcal{A})$, dann gibt es zwei Fälle:

1)
$$0 \leqslant \int_X f_n d\mu := \sum_{j\geqslant 0} \frac{j-1}{2^n} \mu(f_n^{-1}[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n})) \leqslant C < \infty$$
$$\Rightarrow f \in \widetilde{L^1} \text{ und } \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

2)
$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \infty,$$
dann setzen wir
$$\int_X f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \infty$$
Dann gilt der Satz über monotone Konvergenz ohne die Voraussetzung: $\sup_n \int_X f_n d\mu \leqslant C < \infty$.

6.4.12 Satz (Fubini II)

Es sei $f : X \times Y \to \mathbb{R}_+$ messbar bezüglich $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Wir setzen

$$f_x(y) := f(x,y) =: f_y(x) \quad \forall (x,y) \in X \times Y.$$

Dann gilt:

1a) $X \ni x \mapsto f_x \in \mathrm{Mes}(Y, \mathcal{B})$,

1b) $Y \ni y \mapsto f_y \in \mathrm{Mes}(X, \mathcal{A})$

2) $\int_{X\times Y} f(x,y) d\mu{\times}\nu(x,y) = \int_X [\int_Y f_x(y) d\nu(y)] d\mu(x) = \int_Y [\int_X f_y(x) d\mu(x)] d\nu(y)$

Beweis

1a,b) ✓

2) Wir wissen, dass 2) richtig ist für $f = \chi_E$ mit $E \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ (Fubini I), und damit auch für $f \in \mathcal{T}(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$, $f \geqslant 0$ (Linearität der Integrale). Wir betrachten jetzt die kanonische Approximation $0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant f$, $f_n \in \mathcal{T}(X \times Y, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$, so dass (nach monotoner Konvergenz)

$$\int_{X\times Y} f d\mu \times \nu = \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} f_n d\mu \times \nu = \lim_{n\to\infty} \int_X \left[\int_Y f_{nx}(y) d\nu(x) \right] d\mu(x).$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\int_X \int_Y f_x(y) d\nu(y) d\mu(x) &= \int_X \int_Y \lim_{n\to\infty} f_{nx}(y) d\nu(y) d\mu(x) \\ &= \int_X \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_Y f_{nx}(y) d\nu(y)}_{\substack{F_n(x) \nearrow_{n\to\infty} \int f_x(y)d\nu(y) =: F(x) \\ \text{(Monotonie der Integrale)}}} \quad d\mu(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X \int_Y f_{nx}(y) d\nu(y) d\mu(x).\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Behauptung □

Generalvoraussetzung war $\nu(y) + \mu(x) \leqslant \infty$.

Grundsätzliche Aussage: Ist f integrierbar im Produktraum, so auch in den einzelnen Faktoren, wobei die Integrationsreihenfolge keine Rolle spielt.

6.4.13 Definition

Ein Maßraum $(Z, \mathcal{C}, \kappa)$ heißt *σ-endlich* bezüglich $\mathcal{C}, \kappa$, wenn es $C_i \in \mathcal{C}$ gibt mit

1) $Z \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} C_i$,

2) $\kappa(C_i) < \infty \ \forall i$.

6.4.14 Satz (Fubini allgemein)

Fubini I und II gelten auch, wenn X und Y σ-endlich sind.

Beweis Übung; Hinweis: Wir können annehmen, dass $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ disjunkt ist.

Anwendung Wenn wir den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{L}', \lambda')$ konstruiert haben, dann erhalten wir auch $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}' \times \mathcal{L}', \lambda' \times \lambda')$; es bedarf eines Beweises, dass $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}' \times \mathcal{L}'$ und $\lambda^2 = \lambda' \times \lambda'$.

6.5 Bericht über Maßerweiterung

6.5.1 Definition

Es sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ heißt *positives Maß* auf $\mathcal{R}$, wenn gilt

1) $\mu(\emptyset) = 0$,
2) wenn $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}$ disjunkt ist und $\bigcup_i A_i =: A \in \mathcal{R}$, dann gilt $\mu(A) = \sum_i \mu(A_i)$.

Beispiel $\mathcal{R}$ sei ein Ring, der von den halboffenen Intervallen $[a, b)$ in $\mathbb{R}$ erzeugt wird, $-\infty < a \leqslant b < \infty$. Dann besitzt jedes $A \in \mathcal{R}$ eine Darstellung

$$A = \bigcup_{i=1}^{N} [a_i, b_i) \text{ mit } -\infty < a_1 \leqslant b_1 \leqslant \cdots \leqslant b_N < \infty(!).$$

Weiter wird durch

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

ein positives Maß auf $\mathcal{R}$ definiert.

6.5.2 Satz (Hahn)

Es sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring und μ ein positives Maß auf $\mathcal{R}$. Dann lässt sich μ fortsetzen zu einem positiven Maß auf der σ-Algebra $\sigma(\mathcal{R})$.
Ist X σ-endlich bezüglich μ und $\mathcal{R}$, so ist $\overline{\mu}$ eindeutig bestimmt.

Beweis geschieht in zwei Schritten

Schritt 1: Wir definieren eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ durch

$$\mu^*(A) := \inf_{\substack{A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \\ A_i \in \mathcal{R}}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

6.5.3 Hilfssatz

μ^* hat die folgenden Eigenschaften

1) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
2) $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$;
3) Ist $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(X)$, $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, so gilt $\mu^*(A) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu^*(A_i)$.

6.5.4 Definition

Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mit den Eigenschaften 1,2,3 von 6.5.3 heißt ein *äußeres Maß auf* X.

Schritt 2: Wir nennen jetzt eine Menge $A \subset X$ μ^*-*messbar* (bezüglich eines äußeren Maßes μ^*), wenn gilt $\mu^*(Z) = \mu^*(Z \cap A) + \mu^*(Z \cap \complement A)\ \forall Z \subset X$.

6.5.5 Satz

Es sei μ^* ein äußeres Maß auf X und $\mathcal{A}$ die Menge der μ^*-messbaren Mengen. Dann ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra, und μ^* definiert ein positives Maß.

Bemerkung Für $\mathcal{R}$ wie im Beispiel erhalten wir $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\mu^*|_{\mathcal{A}} = \lambda'|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$.

6.6 Bericht über Maße und Funktionale

$I : \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^m) \ni f \mapsto I(f) = \int_{\mathbb{R}^m} f d\lambda^m = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx \in \mathbb{R}$ ist ein *positives lineares Funktional*, d.h. $I(f) \geqslant 0$ für $f \geqslant 0$.

6.6.1 Definition

X sei ein vollständiger metrischer Raum. X heißt *lokalkompakt*, wenn es zu jedem $x \in X$ ein $\varepsilon = \varepsilon(x) > 0$ gibt mit $\overline{B_\varepsilon(x)}$ kompakt.
Ist dann μ ein Borelmaß auf X, so definiert die Abbildung

$$\mathcal{C}_0(X) \ni f \mapsto \int_X f d\mu < \infty$$

ein lineares positives Funktional.

Idee (F. Riesz) Es gibt eine $1-1$ Korrespondenz zwischen Borelmaßen und positiven Funktionalen, gegeben durch

$$I_\mu(f) = \int_X f d\mu.$$

Wir können versuchen, ein äußeres Maß auf X zu erzeugen durch

1) $\mu^*(V) := \sup_{\psi \in \mathfrak{C}(V)} I_\mu(\psi), \quad \emptyset \neq V$ offen;

2)
$$\mu^*(A) := \inf_{A \subset V, V \text{ offen}} \mu^*(V).$$

6.6.2 Hilfssatz

μ^* ist ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(X)$.

Zum Beispiel Warum ist $\mu^*(\emptyset) = 0$?

$$\text{z.z.: } \inf_{V \text{ offen}} \mu^*(V) = 0.$$

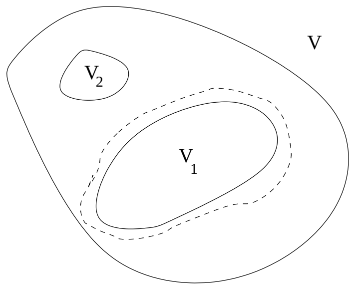
1) Es gibt V mit $\mu^*(V) < \infty$: wähle $\emptyset \neq V$ mit $\overline{V}$ kompakt, dann gibt es $\psi \in \mathcal{C}_0(X)$ mit $\psi|_{\overline{V}} = 1$ (denn jeder Punkt von $\overline{V}$ besitzt eine offene Umgebung mit kompaktem Abschluss und - nach dem Satz von Urysohn - können wir eine Zerlegung der Eins konstruieren wie im $\mathbb{R}^m$). Dann folgt

$$\mu^*(V) = \sup_{\psi \in \mathfrak{C}(V)} I_\mu(\psi) \leqslant I_\mu(\overline{\psi}) < \infty.$$

2) Wähle jetzt ψ_1 mit

$$I_\mu(\psi_1) \geqslant \frac{3}{4}\mu^*(V) \text{ und } \mu^*(V_1 \cup V_2) = \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2) \leqslant \mu^*(V)$$

$$\Rightarrow \mu^*(V_2) \leqslant \mu^*(V) - \frac{3}{4}\mu^*(V) = \frac{1}{4}\mu^*(V).$$



6.6.3 Satz

Es sei I_μ ein positives Funktional auf X. Wir setzen

$$\mathcal{R} := \left\{ A \subset X; \mu^*(A) < \infty \text{ und } \mu^*(A) = \sup_{K \subset A \text{ kompakt}} \mu^*(K) \right\}.$$

Dann ist $\mathcal{R}$ ein Ring, und $\mu^*|_{\mathcal{R}}$ ist ein positives Maß.

6.7 Einige Anwendungen der Integralrechnung

VL: Mi, 2004-05-19

(a) Die L^p–Räume

Wir haben die Funktionenräume

$$\widetilde{L^1}(X, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f \in \text{Mes}(X, \mathcal{A}); \|f\|_1 = \int_X |f| d\mu < \infty \right\}$$

$$(\int f = \int f_+ - \int f_-)$$

$$\widetilde{L^\infty}(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f \in \text{Mes}(X, \mathcal{A}); f \text{ wesentlich beschränkt } \}$$

$$\|f\|_\infty = \inf_{\substack{\mu(A)=0 \\ A\in\mathcal{A}}} C_A$$

Die Funktionen $f \mapsto \|f\|_1, f \mapsto \|f\|_\infty$ sind Halbnormen, aber im allgemeinen keine Normen. Deshalb setzen wir

$$L^{1/\infty}(X,\mathcal{A},\mu) := \widetilde{L}^{1/\infty}(X,\mathcal{A},\mu)/\sim\, = \widetilde{L}^{1/\infty}(X,\mathcal{A},\mu)/\mathfrak{N}$$

wobei $\mathfrak{N} = \left\{ f \in \widetilde{L}^{1/\infty}(X,\mathcal{A},\mu); f(x) = 0 \text{ f.ü. } \right\}$. $\mathfrak{N}$ ist abgeschlossen unter $L^{1/\infty}$-CF.

6.7.1 Definition

Es sei $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Dann setzen wir für $f \in \operatorname{Mes}(X,\mathcal{A})$

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

(so dass $0 \leqslant \|f\|_p, \|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p, \|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ f.ü.)
Weiter setzen wir

$$\widetilde{L}^p(X,\mathcal{A},\mu) = \{f \in \operatorname{Mes}(X,\mathcal{A}); \|f\|_p < \infty\}$$

und $L^p(X,\mathcal{A},\mu) := \widetilde{L}^p(X,\mathcal{A},\mu)/\mathfrak{N}$.

6.7.2 Hilfssatz

Es seien $f, g \in \operatorname{Mes}(X,\mathcal{A})$.

1) $\|f\cdot g\|_1 \leqslant \|f\|_p\|g\|_{p'}$, wenn $1 \leqslant p \leqslant \infty$ und für $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \Leftrightarrow p' = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}$.
   Für $p = 1$ setzen wir $p' = \infty$; für $p' = 1$ setzen wir $p = \infty$. p' heißt der zu p konjugierte Exponent. (*Höldersche Ungleichung*, für $p = 2$ *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*)

2) $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$, das heißt $\|\cdot\|_p$ ist eine Halbnorm auf $\widetilde{L^p}$ und eine Norm auf L^p. (*Minkowskische Ungleichung*)

Beweis

1) Wir erinnern uns an die verallgemeinerte AG-Ungleichung

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{p'}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{p'}, \qquad \text{für } a, b \geqslant 0$$

Wir setzen $a^{\frac{1}{p}} = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, b^{\frac{1}{p'}} = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}}$ und erhalten

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_{p'}} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p'}\frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}}$$

und integrieren

$$\frac{1}{\|f\|_p\|g\|_{p'}}\int_X |f\cdot g| d\mu \leqslant \frac{1}{p}\frac{1}{\|f\|_p^p}\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{p}{p}} + \frac{1}{p'}\frac{1}{\|f\|_{p'}^{p'}}\left(\int_X |g|^{p'} d\mu\right)^{\frac{p'}{p'}} = 1$$

2)

$$\begin{aligned}\int_X |f+g|^p d\mu &= \int_X |f+g|^{p-1}|f+g| d\mu \\ &\leqslant \int_X |f+g|^{p-1}|f|d\mu + \int_X |f+g|^{p-1}|g|d\mu \\ &\leqslant \left(\underbrace{\int_X |f+g|^{(p-1)p'} d\mu}_{(p-1)p'=p} \right)^{\frac{1}{p'}} (\|f\|_p + \|g\|_p)\end{aligned}$$

das heißt $\|f+g\|_p^p \leqslant \|f+g\|_p^{\frac{p}{p'}} (\|f\|_p + \|g\|_p)$

$\Rightarrow \|f+g\|_p^{p\ 1-\frac{1}{p'}} = \|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$

□

6.7.3 Satz (von Riesz-Fischer)

$L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist ein Banach-Raum und für $p = 2$ ein Hilbert-Raum.

Beweis Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine L^p-Cauchyfolge, $1 < p < \infty$. Dann ist für $n \geqslant n(1)$

$\|f_n\|_p = \|f_n - f_{n(1)} + f_{n(1)}\|_p \leqslant \|f_n - f_{n(1)}\|_p + \|f_{n(1)}\|_p \leqslant 1 + \|f_{n(1)}\|_p =: C < \infty$

Wir wollen zeigen, dass $(|f_n|^p)_{n\in\mathbb{N}}$ eine L^1-CF ist, so dass $|f_{n_k}|^p \to |f|^p$ f.ü. und $f_n \to f$ in L^p. Also betrachte

$$|\underbrace{|f_n(x)|^p}_{=:a>0} - \underbrace{|f_m(x)|^p}_{=:b;a\geqslant b\geqslant 0}| = a^p - b^p = \int\limits_a^b pt^{p-1}dt \leqslant (b-a)pb^{p-1}$$

also

$$\begin{aligned}\||f_n|^p - |f_m|^p\|_1 &\leqslant \int_X |f_n(x) - f_m(x)|(\max\{|f_n(x)|, |f_m(x)|\})^{p-1} d\mu \\ &\leqslant p \int_X |f_n(x) - f_m(x)|(|f_n(x) + |f_m(x)|)^{p-1} d\mu \\ &\leqslant p\,\|f_n - f_m\|_p \,\|f_n + f_m\|_p^{\frac{p}{p'}} \\ &\leqslant p(\|f_n\|_p + \|f_m\|_p)^{\frac{p}{p'}} \|f_n - f_m\|_p \\ &\leqslant \underbrace{p(2C)^{\frac{p}{p'}}}_{=:C'} \|f_n - f_m\|_p \leqslant \varepsilon C', \quad n, m \geqslant n(\varepsilon)\end{aligned}$$

Übung: Dann gilt tatsächlich, dass $f_n \to f$ in L^p. Für $p = 2$ entsteht die Norm aus dem Skalarprodukt

$$(f, g)_2 = \int_X f\bar{g} d\mu$$

(b) Faltungen

Für $f, g \in C_0(\mathbb{R}^m)$ bilden wir

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)g(x-y)dy \quad \in C_0(\mathbb{R}^m)(!)$$

Beispiel Der Glättungsoperator

$$J_\varepsilon f(x) := \int_{\mathbb{R}^m} j_\varepsilon(y) f(x-y)dy$$

$$j \in C_0^\infty(B_1(0)),\ j \geqslant 0,\ \int j = 1;\ j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^m} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

6.7.4 Hilfssatz

Es gilt für $f, g, h \in C_0(\mathbb{R}^m)$

1) $f * g = g * f$
2) $(f * g) * h = f * (g * h)$
3) $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$

"Faltungsgruppenalgebra"

Beweis

1) Substitution $y' = x - y$
2) Übung
3)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} |(f*g)(x)|dx &= \int_{\mathbb{R}^m} \left| \int_{\mathbb{R}^m} f(y)g(x-y)dy \right| dx \\
&\overset{F3}{\leqslant} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)||g(x-y)|dydx \\
&\overset{Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)||f(x-y)|dxdy \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1.
\end{aligned}$$

□

Jetzt können wir $*$ auf $L^1 \times L^1$ "durch Stetigkeit" fortsetzen: für $f, g \in L^1$ wähle definierende Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, (g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0(\mathbb{R}^m)$ und setze

$$f * g := L^1 \lim_{n\to\infty} f_n * g_n.$$

Das ist sinnvoll, weil

$$\begin{aligned}
\|f_m * g_m - f_n * g_n\|_1 &= \|(f_m - f_n) * g_m + f_n * (g_m - g_n)\|_1 \\
&\leqslant \|(f_m - f_n) * g_m\|_1 + \|f_n * (g_m - g_n)\|_1 \\
&\leqslant \|f_m - f_n\|_1 \|g_m\|_1 + \|f_n\|_1 \|g_m - g_n\|_1 \\
&\leqslant \varepsilon \qquad \text{für } n, m \geqslant n(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Die Definition ist auch unabhängig von der Wahl der definierenden Folgen; denn sind $(f'_n), (g'_n)$ andere definierende Folgen, so sind $(f_n - f'_n)$ und $(g_n - g'_n)$ L^1-Nullfolgen, dann argumentieren wir wie vorher.

6.7.5 Satz

6.7.4 gilt auch für $f, g \in L^1$.

(c) Integrale mit Parametern

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, Y ein metrischer Raum,

$$f : X \times Y \ni (x, y) \mapsto f(x, y) = f_x(y) = f_y(x) \in \mathbb{C}$$

$$F(y) := \int_X f(x, y) d\mu(x) = \int_X f_y d\mu$$

6.7.6 Satz

Es sei $y_0 \in Y$ und es gelte:

1) f_y ist in $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ für $y \in Y$;

2) f_x ist stetig in y_o für $x \in X$;

3) es gibt ein $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ mit

$$|f_y(x)| \leqslant g(x) \quad \text{für } y \in Y.$$

Dann ist F stetig in y_0.

Beweis Es sei $(y_n) \subset Y$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$, so dass für $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} f_{y_n}(x) = f_{y_0}(x) \quad \text{nach 2)}$$

Weiter ist nach 3)

$$|f_{y_n}(x)| \leqslant g(x) \quad \forall n \in N,$$

also nach beschränkter Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lim_{n\to\infty} \int_X f_{y_n} d\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_{y_n} d\mu = F(y_0)$$

□

$(*)$ Es sei jetzt $Y \subset \mathbb{R}^m$ offen und es sei f_x partiell differenzierbar in y_0 in alle Richtungen.

6.7.7 Satz

Es gelte $(*)$ und außerdem

1) $f_y \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$;
2) f_x ist partiell differenzierbar in Y in alle Richtungen;
3) es gibt ein $g \in L^1(X\mathcal{A}, \mu)$ so, dass
$$\left|\frac{\partial}{\partial y_j} f_x\right| \leqslant g(x) \quad \forall y \in Y.$$

Dann ist F partiell differenzierbar in alle Richtungen und
$$\frac{\partial}{\partial y_j} F(y) = \int_X \frac{\partial}{\partial y_j} f(x,y) d\mu(x)$$

Beweis Wir wählen eine Folge $0 < h_n \to 0$ und bilden
$$\begin{aligned} F_n(y) &= \frac{1}{h_n}(F(y_0 + he_j) - F(y_0)) \\ &= \int_X \frac{1}{h_n}(f(x, y_0 + he_j) - f(x, y_0)) d\mu(x) \\ &=: \int_X f_n(x) d\mu(x) \end{aligned}$$

Dann ist jedes $f_n \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\partial}{\partial y_j} f(x, y_0)$. Weiter ist
$$\left|\frac{1}{h_n}(f(x, y_0 + h_n e_j) - f(x, y_0))\right| = \left|\frac{1}{h_n}\int\limits_0^{h_n} \frac{\partial}{\partial y_j} f(x, y_0 + te_j) dt\right|$$
$$\leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant h_n} \left|\frac{\partial f}{\partial y_j}(x, y_0 + te_j)\right| \leqslant g(x).$$

Also ist beschränkte Konvergenz anwendbar. $\Rightarrow$ Behauptung. □

(d) Erinnerung: Dirac-Folgen

VL: 2004-05-24

6.7.8 Definition

$(\phi_n)_{\mathbb{N}} \subset C(\mathbb{R}^n)$ heißt Dirac-Folge, wenn gilt:

1) $\phi_n \geqslant 0$
2) $\int_{\mathbb{R}^m} \phi_n(x) dx = 1$
3) $\forall \varepsilon, \delta > 0$ gibt es ein $n(\varepsilon, \delta)$ so, dass für $n \geqslant n(\varepsilon, \delta)$ gilt $\int_{|x|\geqslant\delta} \phi_n(x) dx \leqslant \varepsilon$.

Beispiel: $\phi_n = j_{\frac{1}{n}}(x) = (\frac{1}{n})^{-m} j(nx)$. Dann sind alle Bedingungen erfüllt, weil $\operatorname{supp} j_{\frac{1}{n}} \in B_{\frac{1}{n}}(0)$.

6.7.9 Satz

Sei $(\phi_n)_{\mathbb{N}} \subset C(\mathbb{R}^m)$ eine Dirac-Folge und $f \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^m)$. Ferner sei $A \subset \mathbb{R}^m$ eine kompakte Menge, auf der f stetig ist. Dann gilt:

$$\phi_n * f(x) \longrightarrow f(x) \text{ gleichmäßig für } x \in A$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
|\phi_n * f(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} \phi_n(y)(f(x-y) - f(x)) \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \phi_n(y)|f(x-y) - f(x)|dy \\
&= \left(\int_{|y| \leqslant \delta} + \int_{|y| \geqslant \delta} \right) \phi_n(y)|f(x-y) - f(x)|dy \\
&[\varepsilon > 0, \delta = \delta(\varepsilon) \text{ so, dass } |f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon \text{ für } x \in A, |x - x'| \leqslant \delta \\
&\ \text{und } n \geqslant n(\varepsilon, \delta)] \\
&\leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^m} \phi_n + 2\varepsilon \|f\|_\infty = \varepsilon(1 + 2\|f\|_\infty)
\end{aligned}$$

Anwendungen: Weierstraß, Fejer

e) Fouriertransformation

Notation:

$$\mathbb{R}^m \ni x = (x_1, .., x_m);\ \xi = (\xi_1, ..\xi_m);\ \langle x, \xi \rangle = x_1\xi_1 + \ldots + x_m\xi_m$$

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j};\ \partial_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}};\ \frac{x^\alpha}{\alpha!} = \frac{x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m}}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!}$$

$$D_j = (-\sqrt{-1})\frac{\partial}{\partial x_j};\ D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_m^{\alpha_m}$$

Erinnerung: Fourierentwicklung in $\mathbb{R}$

Ist $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R})$, d.h. $f \in C^1(\mathbb{R})$ und $f(x + 2k\pi) = f(x)\ \forall k \in \mathbb{Z}$, dann haben wir geschrieben

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e_k(x) \text{ mit } e_k(x) = e^{ixk} \text{ und } \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iyk} dy$$

$(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ist eine orthogonale Familie von Funktionen in $L^2(S^1) = L^2(0{,}2\pi)$.

$(\frac{e_k}{\sqrt{2\pi}})$ ist eine Orthonormalbasis von $L^2(S)$, d.h. jedes $f \in L^2(S^1)$ erfüllt die Parsevalsche Gleichung: $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2$

Wir wollen ein beliebiges $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$ aus "einfachen" Funktionen durch Überlagung (Summenbildung) gewinnen. Die Funktionen e_k genügen der Funktionalgleichung:

$$e_k(x + y) = e_k(x)e_k(y);\ e_k(0) = 1$$

Wir versuchen, dieselbe Funktionalgleichung in $\mathbb{R}^m$ zu lösen:

(a) $e(x + y) = e(x)e(y)$

(b) $e(0) = 1$

(c) $e \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$

χ sei eine Lösung $\Rightarrow \chi(x_1e_1 + .. + x_me_m) = \chi(x_1e_1)\cdots\chi(x_me_m)$ d.h. es genügt, $\widehat{\chi}(t) = \chi(te_i)$ zu bestimmen. Dann wird

$$\frac{\partial}{\partial t}\chi(t+s) = \chi'(t+s) = \chi'(t)\chi'(s)$$

Mit $\frac{\partial}{\partial t}\chi(t+s) = \frac{\partial}{\partial s}\chi(t+s)$ folgt $\chi'(s) = \underbrace{\chi'(0)}_{a}\chi(s) \Rightarrow \chi(t) = e^{at}$, und dies ist beschränkt $\iff a = i\xi\,,\ \xi \in \mathbb{R}$

6.7.10 Hilfssatz

Die beschränkten Homomorphismen: $\chi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}^*$ haben die Form

$$\chi(x) = e^{i\langle x,\xi\rangle} \text{ mit } \xi \in \mathbb{R}^m,$$

sind also tatsächlich Homomorphismen $\mathbb{R}^m \to S^1$. Diese nennt man *die Charaktere von* $\mathbb{R}^m$.

Also suchen wir nach einer Darstellung der Form

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(\xi)e^{i\langle x,\xi\rangle}d\xi$$

analog zur Fourierreihe.

Wir müssen die besten Funktionenräume für diese Darstellung finden!

6.7.11 Definition (Der Schwartz-Raum)

Wir nennen

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^m) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^m) : \sup_{x\in\mathbb{R}^m} |x^\alpha D^\beta f(x)| =: p_{\alpha,\beta} < \infty\ \forall\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^m\}$$

den Schwartz-Raum von $\mathbb{R}^m$

Bemerkungen:

1) $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

2) $p_{\alpha,\beta} : \mathscr{S} \to \mathbb{R}_+$ ist eine Halbnorm auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$.

3) Konvergenz $f_n \to f$ auf $\mathscr{S}$ wird jetzt definiert durch:

$$p_{\alpha,\beta}(f - f_n) < \varepsilon \text{ für } n \geqslant n(\varepsilon,\alpha,\beta)\ \forall\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^m$$

Diese Konvergenz ist äquivalent zur Konvergenz bez. der Metrik

$$d(f,g) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^m} 2^{-(|\alpha|+|\beta|)}\frac{p_{\alpha,\beta}(f-g)}{1+p_{\alpha,\beta}}$$

4) Eine lineare Abbildung $T : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ ist genau dann stetig, wenn es zu $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+^m$ $\gamma,\delta \in \mathbb{Z}_+^m$ gibt mit

$$p_{\alpha,\beta}(Tf) \leqslant C_{\alpha,\beta}p_{\gamma,\delta}(f).$$

Z.B. ist D_j stetig auf $\mathscr{S}$.

6.7.12 Definition

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^m)$ definieren wir

$$Ff(\xi) := \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)dx$$

Wir untersuchen die Eigenschaften von F auf $\mathscr{S}$.

6.7.13 Hilfssatz

1) F bildet $\mathscr{S}$ in sich ab und ist stetig.

2) $\widehat{D_j f}(\xi) = \xi_j \widehat{f}(\xi)$

3) $\widehat{x_j f}(\xi) = -D_j \widehat{f}(\xi)$

Beweis: 1.) Wir haben zu untersuchen, ob

$$|\xi^\alpha D_\xi^\beta \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)dx| \leqslant C_{\alpha,\beta} < \infty$$

für $f \in \mathscr{S}$. Nun ist $D_\xi^\beta(e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)) = (-x)^\beta e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)$, also können wir unter dem Intergral differenzieren und finden

$$\begin{aligned}
\xi^\alpha D_\xi^\beta \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^m} \xi^\alpha e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-x)^\beta f(x)dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} D_x^\alpha(e^{i\langle x,\xi\rangle})(-x)^\beta f(x)dx
\end{aligned}$$

Beachte: Ist $f \in \mathscr{S}$, so gilt: $\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx = 0$.

Beweis

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)dx &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^{m-1}\ni(x_2,\ldots,x_m)} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,\ldots,x_m)dx_1\cdots dx_m \\
&= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x')dx_1 dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{T\to\infty} (f(T,x') - f(-T,x'))dx = 0 \text{ nach Lebesgue,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{denn } |f(T,x')| &= \frac{1}{(1+|x'|)^{m+1}}(1+|x'|)^{m+1}|f(T,x')| \\
&\leqslant C_m \left[\sup_{\mathbb{R}^m}(1+|x|^{m+1})|f(x)|\right] \frac{1}{(1+|x'|)^{m+1}} \\
&= C_m \left(p_{00}(f) + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{(m+1)!}{\alpha!} p_{\alpha,0}(f)\right) \frac{1}{(1+|x'|)^{m+1}}
\end{aligned}$$

Also gilt: $|\cdots| = \left|(-1)^{|\alpha|+|\beta|}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-1\langle x,\xi\rangle} D_x^\alpha(x^\beta f(x))dx\right|$

Beachte weiter: Die linearen Abbildungen $f \mapsto x^\alpha D_x^\beta f$ sind stetig in $\mathscr{S}$. Also wird auch

$$D_x^\alpha(x^\beta f(x)) \in \mathscr{S} \Rightarrow |''| \leqslant C_{\alpha,\beta} < \infty$$

Noch genauer: Wir haben (s.o.!): $|D_x^\alpha x^\beta f(x)| \leqslant C_{\alpha,\beta} p_{\gamma,\delta}(f) \frac{1}{(1+|x|)^{m+1}}$ für geeignete γ, δ. Also ist F stetig auf $\mathscr{S}$.

2.)

$$FD_j f(\xi) = \int e^{-i\langle x,\xi\rangle}(-i)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)dx = \int (i\frac{\partial}{\partial x_j}e^{-i\langle x,\xi\rangle})f(x)dx = \xi_j \widehat{f}(\xi)$$

3.) Ähnlich $\square$

Beispiel: $f(x) = e^{-|x|^2/2} = e^{-x_1^2/2} + .. + e^{-x_n^2/2}$

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i(x_1\xi_1 + .. x_m\xi_m)} e^{-x_1^2/2} \cdots e^{-x_n^2/2} dx \overset{\text{Fubini}}{=} \widehat{\phi}(\xi_1) \cdots \widehat{\phi}\xi_m \text{ mit } \phi(x) = e^{-x^2/2}$$

Dann ist $\phi'(x) = -xe^{-x^2/2} = -x\phi(x)$

$$x\phi(x) + \partial_x\phi(x) = 0$$

$$x\phi(x) + iD_x\phi(x) = 0$$

$$\phi \in \mathscr{S} \Rightarrow 0 = \widehat{x\phi}(\xi) + i\widehat{D_x\phi}(\xi) = -D_\xi\widehat{\phi}(\xi) + i\xi\widehat{\phi}(\xi)$$

$$\Rightarrow iD_\xi\widehat{\phi}(\xi) + \xi\widehat{\phi}(\xi) = 0 \Rightarrow \widehat{\phi}(\xi) = \widehat{\phi}(0)\phi(\xi)$$

Also bleibt zu berechnen

$$\widehat{\phi}(0) = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{2\pi}$$

d.h.

$$\widehat{\phi}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}, \quad \widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{m}{2}} f(\xi)$$

VL: Mi, 2004-05-26

$$f \in \mathscr{S} \iff \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^m : \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \left|x^\alpha D_x^\beta f(x)\right| =: p_{\alpha\beta}(f) < \infty$$

$$\int |f(x)|dx \leqslant \int (1+|x|)^{-m-1} \sup_{y\in\mathbb{R}^m} \left((1+|y|)^{m+1}|f(y)|\right) dx < \infty \Rightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \subset L^1(\mathbb{R}^m)$$

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \subset L^1(\mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\mathbb{R}^m)$$

$$Ff(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)dx$$

6.7.14 Satz (Fouriers Inversionsformel)

Für $f \in \mathscr{S}$ gilt

$$f(x) = (2\pi)^{-m}\hat{\hat{f}}(-x) = (2\pi)^{-m}\int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)d\xi.$$

D.h. F ist ein Isomorphismus auf $\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ mit $F^{-1} = (2\pi)^{-m}\check{F}$, wobei $\check{f}(x) := f(-x)$.

Beweis: Für $f \in \mathscr{S}$ ist $\check{f} \in \mathscr{S}$, und wir müssen berechnen

$$\begin{aligned}
\check{F}\hat{f}(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle x,\xi\rangle}\hat{f}(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} e^{i\langle x-y,\xi\rangle}f(y)dy\,d\xi
\end{aligned}$$

Integration darf nicht vertauscht werden!

$$= \lim_{0<\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^m}\psi(\varepsilon\xi)\underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}^m} f(y)e^{i\langle x-y,\xi\rangle}dy\right]}_{\hat{f}(\xi)\cdot e^{i\langle x,\xi\rangle}}d\xi,\ \text{wobei } \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m),\ \psi(0) = 1$$

zulässig, weil (1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\psi(\varepsilon\xi) = 1\ \forall\xi$, (2) $|\psi(\varepsilon\xi)\hat{f}(\xi)| \leqslant \|\psi\|_\infty |\hat{f}(\xi)|$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{0<\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m}\psi(\varepsilon\xi)f(y)e^{-i\langle\frac{y-x}{\varepsilon},\varepsilon\xi\rangle}\varepsilon^{-m}d(\varepsilon\xi)\,dy \\
&= \lim_{0<\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\hat{\psi}\overbrace{\left(\frac{y-x}{\varepsilon}\right)}^{=:z}\varepsilon^{-m}dy, \quad dz = \varepsilon^{-m}dy,\ y = \varepsilon z + x \\
&= \lim_{0<\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^m} f(x+\varepsilon z)\hat{\psi}(z)\,dz \\
&= f(x)\int_{\mathbb{R}^m}\hat{\psi}(z)dz,\ \text{denn (1)} \lim_{\varepsilon\to 0} f(x+\varepsilon z) = f(x)\ (2)|f(x+\varepsilon z)\hat{\psi}(z)| \leqslant \|f\|_\infty|\hat{\psi}(z)|
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \check{\hat{\hat{F}}}f(x) = cf(x), \quad c = \int_{\mathbb{R}^m}\widehat{\psi}(z)\,dz \text{ für jedes } \psi \in \mathscr{S} \text{ mit } \psi(0) = 1$$

Also wählen wir z.B. $\psi_0(x) = e^{-|x|^2/2} \Rightarrow \widehat{\psi_0}(z) = (2\pi)^{m/2}\psi_0(z)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^m}\widehat{\psi}(z)dz &= (2\pi)^{m/2}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-|x|^2/2}dx = (2\pi)^{m/2}2^{m/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^m \\
&= (2\pi)^m
\end{aligned}$$

□

6.7.15 Satz (Rechenregeln für F)

Für $\phi, \psi \in \mathscr{S}$ gilt:

(1) $\int\widehat{\phi}\psi = \int\phi\widehat{\psi}$

(2) $\int \phi\bar{\psi} = (2\pi)^{-m} \int \hat{\phi}\bar{\hat{\psi}}$

(3) $\widehat{\phi * \psi} = \widehat{\phi}\widehat{\psi}$

(4) $\widehat{\phi\psi} = (2\pi)^{-m}\widehat{\phi} * \widehat{\psi}$

(5) Für $\tau_a\phi(x) := \phi(x-a),\ a \in \mathbb{R}^m$, gilt $\widehat{\tau_a\phi}(\xi) = e^{-i\langle a,\xi\rangle}\widehat{\phi}(\xi)$

Beweis

(1)

$$\int \widehat{\phi}(x)\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle y,x\rangle}\phi(y)\psi(x)\,dy\,dx$$
$$\int \phi(y)\widehat{\psi}(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^m}\int_{R^m} \phi(y)e^{-i\langle y,x\rangle}\psi(x)\,dx\,dy$$

$\Rightarrow$ Behauptung nach Fubini

(2) Zu zeigen: $\int \chi\overline{\eta} = \int \hat{\chi}\overline{\hat{\eta}}\ \forall \chi,\eta \in \mathscr{S}$

$$\overline{\hat{\eta}}(\xi) = \overline{\int e^{-i\langle x,\xi\rangle}\eta(x)dx} = \int e^{i\langle x,\xi\rangle}\overline{\eta(x)}dx = \check{\bar{\eta}}(\eta)$$

Ich setze jetzt $\chi = \hat{\phi},\ \psi = \bar{\eta}$

$$\iff \check{\hat{\chi}} = \check{\hat{\hat{\phi}}} = (2\pi)^m\phi,\ \eta = \bar{\psi},\ \hat{\psi} = \hat{\bar{\eta}} = \check{\bar{\hat{\eta}}}$$

$$\int \chi\bar{\eta} = \int \hat{\phi}\psi \overset{(1)}{=} \int \phi\hat{\psi} = (2\pi)^{-m}\int \check{\hat{\chi}}\check{\bar{\hat{\eta}}}$$
$$= (2\pi)^{-m}\int \hat{\chi}(-\xi)\bar{\hat{\eta}}(-\xi)d\xi = (2\pi)^{-m}\int \hat{\chi}\bar{\hat{\eta}}$$

(3) $\phi * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \underbrace{\phi(y)\psi(x-y)}_{\in L^1} dy$ definiert. Dann wird

$$x^\alpha D_x^\beta(\phi * \psi)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \phi(y)(x-y+y)^\alpha(D^\beta\psi)(x-y)dy$$
$$= \sum_{\substack{\beta\leqslant\alpha \\ \beta\in\mathbb{Z}_+^m}} \binom{\alpha}{\beta}\int \phi(y)y^\beta(x-y)^{\alpha-\beta}(D^\beta\psi)(x-y)dy,$$

also (!) $\phi * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ und $|x^\alpha D_x^\beta \phi * \psi(x)| \leqslant C_{\alpha\beta} < \infty$.
Damit wird

$$\widehat{\phi * \psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\int_{\mathbb{R}^m}\phi(y)\psi(x-y)dy\,dx$$
$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle x-y,\xi\rangle}\psi(x-y)e^{-i\langle y,\xi\rangle}\phi(y)dx\,dy$$
$$= \hat{\psi}(\xi)\hat{\phi}(\xi)$$

(4) Setze $\hat{\chi} = \phi,\ \hat{\eta} = \psi \Rightarrow \chi = (2\pi)^{-m}\check{\hat{\hat{\chi}}} = (2\pi)^{-m}\check{\hat{\phi}},\ \eta = (2\pi)^{-m}\check{\hat{\hat{\eta}}} = (2\pi)^{-m}\check{\hat{\psi}}$

Dann wird

$$\begin{aligned}\widehat{\phi\psi} = \widehat{\hat{\chi}\hat{\eta}} = \widehat{\widehat{\chi * \eta}} &= (2\pi)^m(\chi * \eta)^\vee = (2\pi)^{-m}(\check{\hat{\phi}} * \check{\hat{\psi}})^\vee(x)\\ &= (2\pi)^{-m}\int \check{\hat{\phi}}(y)\check{\hat{\psi}}(-x-y)dy = (2\pi)^{-m}\int \hat{\phi}(-y)\hat{\psi}(x+y)dy\\ &= (2\pi)^{-m}\hat{\phi} * \hat{\psi}(x)\end{aligned}$$

(5)

$$\widehat{\tau_a\phi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\phi(\underbrace{x-a}_{x'})dx = e^{-i\langle a,\xi\rangle}\hat{\phi}(\xi)$$

□

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, $p_{\alpha\beta}(\phi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^m}|x^\alpha D_x^\beta\phi(x)|$ eine Halbnorm. p_{00} ist eine Norm, aber die $p_{\alpha\beta}$ sind möglicherweise keine Normen. Jedenfalls ist $\bigcap_{\alpha,\beta} p_{\alpha\beta}^{-1}(0) = 0$

Verallgemeinerung

Betrachte allgemeiner

(1) E Vektorraum über $\mathbb{C}$,

(2) $p_i :\ E \to \mathbb{R}_+$ Halbnorm, $i \in \mathbb{N}$,

(3) $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} p_i^{-1}(0) = 0$

Dann betrachten wir die Funktion

$$E \ni x \mapsto q(x) := \sum_{i\geqslant 1} 2^{-i}\frac{p_i(x)}{1+p_i(x)} \leqslant 1$$

6.7.16 Hilfssatz

q hat folgende Eigenschaften:

(1) $q(x) \geqslant 0$ und $q(x) = 0 \iff x = 0$

(2) $q(x+y) \leqslant q(x) + q(y)$

(3) $q(-x) = q(x)$

Solche Funktionen heißen *Quasi-Normen*.

Beweis

(1) $q \geqslant 0$ ist klar; $q(x) = 0 \Rightarrow p_i(x) = 0\ \forall i \Rightarrow x \in \bigcap p_i^{-1}(0) = \{0\}$

(2) $h(z) := \frac{z}{1+z} = 1 - \frac{1}{1+z}$, $z \geqslant 0$, ist C^∞ mit $h'(z) = \frac{1}{(1+z)^2} > 0$, d.h. h ist monoton wachsend.

$$\frac{p_i(x+y)}{1+p_i(x+y)} = h(p_i(x+y)) \leqslant h(\overbrace{p_i(x)}^{=:a} + \overbrace{p_i(y)}^{=:b})$$
$$\overset{?}{\leqslant} h(p_i(x)) + h(p_i(y)) = \frac{p_i(x)}{1+p_i(x)} + \frac{p_i(y)}{1+p_i(y)},$$

d.h. wir brauchen $h(a+b) \leqslant h(a) + h(b)$ oder $h(z) + h(b) - h(z+b) \geqslant 0$ für $z \geqslant 0$. O.k. für $z = 0$ und

$$h'(z) - h'(z+b) = \frac{1}{(1+z)^2} - \frac{1}{(1+z+b)^2} \geqslant 0 \text{ für } b \geqslant 0 \Rightarrow \text{Beh.}$$

(3) ist klar wegen $p_i(x) = p_i(-x)$.

Also ist $d(x,y) := q(x-y)$ eine Metrik auf E.

6.7.17 Definition

$(E, (p_i))$ heißt ein Fréchet-Raum, wenn (E, d) vollständig ist.

Beispiele

- $p_1 = \|\cdot\|$ sei eine Norm, $p_i := 0$ $\forall i > 1$. Dann ist $q = \frac{1}{2}\frac{\|\cdot\|}{1+\|\cdot\|}$; und E ist genau dann Fréchet, wenn E Banach.
- $\mathscr{S}$ ist *kein* normierter Raum, aber ein Fréchet-Raum.

Wir wollen jetzt feststellen, was ein geeignetes Stetigkeitskriterium für Abbildungen in E (bzw. in andere Fréchet-Räume) ist.

Sei $T : (E, d_E) \to (F, d_F)$ eine lineare Abbildung. Dann ist T stetig in $x \in E$ genau dann — wegen Linearität —, wenn T stetig ist in $x = 0$, denn: für $x_n \to x \iff x_n - x \to 0$ muss gelten $Tx_n \to Tx \iff T(x - x_n) \to 0$.
T stetig $\Rightarrow T^{-1}(B_1^F(0)) \supset B_\varepsilon^E(0)$, d.h. $q^E(x) \leqslant \varepsilon \Rightarrow q^F(Tx) < 1$,
d.h. $q^F\left(T\frac{x\varepsilon}{q^E(x)}\right) < 1$.

Zu beweisen ist folgendes Kriterium.

6.7.18 Hilfssatz

VL: Mi, 2004-06-02

Es seien $(E, (p_j)_{j\in\mathbb{N}})$, $(F, (r_j)_{j\in\mathbb{N}})$ Fréchet-Räume. Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ ist stetig genau dann, wenn zu jedem $j \in \mathbb{N}$ eine Konstante $C_j > 0$ und ein $N(j) \in \mathbb{N}$ so existiert, dass

$$(*) \quad r_j(Tx) \leqslant C_j \sup_{1\leqslant i\leqslant N(j)} p_i(x) =: C_j p^{N(j)}(x).$$

Spezialfall: E, F Banach-Räume $\Rightarrow p_j = 0$, $j \geqslant 2$; $p_1(x) = \|x\|_E$; $r_j = 0$, $j \geqslant 2, r_1(y) = \|y\|_F$. Dann reduziert sich die Abschätzung auf

$$\|Tx\|_F \leqslant C_1 \|x\|_E .$$

Beweis: Vorbemerkung: p^N ist eine Halbnorm für alle N; jedes r_j, p_i ist stetig auf F bzw. E.

1) $(*) \Rightarrow$ Stetigkeit:
   z.z. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; \delta = \delta(\varepsilon)$, so dass $q_F(Tx) < \varepsilon$ für $q_E(x) < \delta$; und es genügt die Stetigkeit in $x_0 = 0$, weil T linear ist. Übung!

2) Stetigkeit $\Rightarrow (*)$:
   T stetig, r_j stetig $\Rightarrow r_j \circ T$ stetig. Also gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass

$$r_j \circ T(B_\varepsilon^E(0)) \subset B_1^F(0), \quad \varepsilon = \varepsilon(j)$$

   Weiter ist

$$\begin{aligned} q^E(x) &= \left(\sum_{j=1}^N + \sum_{j \geqslant N+1} \right) 2^{-j} \frac{p_j(x)}{1 + p_j(x)} \\ &\leqslant \frac{1}{2} p^N(x) + \sum_{j \geqslant N+1} \frac{1}{2^j} \leqslant \frac{1}{2} p^N(x) + \frac{1}{2^N} \end{aligned}$$

   Wähle jetzt $N(j)$ so groß, dass $\frac{1}{2^{N(j)}} \leqslant \frac{\varepsilon(j)}{2}$; dann folgt aus $p^N(x) < \varepsilon(j)$ auch $q^E(x) < \frac{\varepsilon(j)}{2} + \frac{\varepsilon(j)}{2} = \varepsilon(j)$, d.h.

$$\left(p^{N(j)}\right)^{-1} [0, \varepsilon(j)) \subset B_{\varepsilon(j)}^E(0)$$

   Wähle ein $x \in E$ so, dass $p^{N(j)}\left(\frac{x\varepsilon(j)}{p^{N(j)}(x)}\right) = \varepsilon(j)$

$$\Rightarrow r_j \circ T\left(\frac{\varepsilon(j)x}{p^{N(j)}(x)}\right) \leqslant 1$$

$$\Rightarrow \boxed{r_j \circ T(x) \leqslant \frac{1}{\varepsilon(j)} p^{N(j)}(x)}$$

$\square$

$\rightsquigarrow$ *Theorie der topologischen Vektorräume*

Betrachte jetzt $E = \mathscr{S}(\mathbb{R}^m), F = \mathbb{C}$.

6.7.19 Definition

$\mathcal{L}(E, F)$ bezeichnet die stetigen linearen Abbildungen von E nach F.

Ist $(E, (p_j))$ ein Fréchet-Raum, so setzen wir $E' := \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$; E' heißt der *stetige Dualraum* von E.

Der Raum $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m) \supset L^p(\mathbb{R}^m)$ heißt der Raum der *temperierten Distributionen* (im Gegensatz zu dem Raum der *Distributionen* $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)'$ — aber $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ ist *kein* Fréchet-Raum).

$$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m) \ni \delta_a : \mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \ni \phi \mapsto \phi(a) \in \mathbb{C}$$

heißt das *Dirac-Maß* in $a \in \mathbb{R}^m$.

Nach dem Hilfssatz ist eine lineare Abbildung $u : \mathscr{S}(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{C}$ genau dann in $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $C_N > 0$ so gibt, dass

$$|u(f)| \leqslant C_N \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^m \\ |\alpha|+|\beta|\leqslant N}} |x^\alpha D_x^\beta f(x)|.$$

Beispiele

1) Für $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ setzen wir

$$u_g(f) = \int_{\mathbb{R}^m} gf(x)dx \ \in \mathbb{C}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} |u_g(f)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|dx \, \|g\|_\infty \\ &\leqslant \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^m} (1+|x|^2)^{-m} \sup(1+|x|^2)^m |f(x)|dx \\ &\leqslant C_m \sup_{\substack{|\alpha|\leqslant 2m \\ x\in\mathbb{R}^m}} |x^\alpha f(x)| \, \|g\|_\infty \end{aligned}$$

2) Wenn $g \in \mathrm{Mes}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L})$ und $(1+|x|^2)^p g \in L^1$ für ein $p \in \mathbb{R}$, dann zeigt dasselbe Argument, dass $u_g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$.

3) $\delta_a :\ \mathscr{S} \ni f \mapsto f(a) \in \mathbb{C}$ ist in $\mathscr{S}'$

Erweiterung der Operationen von $\mathscr{S}$ auf $\mathscr{S}'$ durch Transposition

(a) Differentiation

Wie kann ich $\partial^\alpha u$ definieren für $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$? Für $g \in \mathscr{S}$ soll gelten $\partial^\alpha u_g = u_{\partial^\alpha g}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial^\alpha(u_g)(f) = u_{\partial_g^\alpha}(f) &= \int_{\mathbb{R}^m} \partial_x^\alpha g(x) f(x)dx \qquad \text{partielle Integration} \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^m} g(x)\partial_x^\alpha f(x)dx \\ &= u_g((-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha f) \end{aligned}$$

6.7.20 Definition

Für $u \in \mathscr{S}'$ setzen wir $\boxed{\partial_u^\alpha(f) := u((-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha f}$

b) Multiplikation mit $a \in \mathscr{S}$: $\quad g \in \mathscr{S}$

$$a \cdot u_g(f) = u_{a\cdot g}(f) = \int a \cdot g(x)f(x)dx = \int g(x)af(x)dx = u_g(af).$$

6.7.21 Definition

Für $a \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^m), u \in \mathscr{S}'$ setzen wir

$$au(f) := u(af)$$

c) Fourier-Transformation

$$\begin{aligned}
\widehat{u}_g = u_{\widehat{g}} \Rightarrow \widehat{u}_g &= \int \widehat{g}(x)f(x)dx = \int\int e^{-i\langle x,y\rangle} g(y)f(x)dydx \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int g(y) \int e^{-i\langle y,x\rangle} f(x)dxdy \\
&= \int g(y)\widehat{f}(y)dy = u_g(\widehat{f}).
\end{aligned}$$

6.7.22 Definition

Für $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ definieren wir die Fouriertransformation durch

$$\widehat{u}(f) = u(\widehat{f}), \quad u \mapsto \widehat{u} = F'u$$

6.7.23 Satz

Die Fouriertransformation ist ein Isomorphismus von $\mathscr{S}'$ auf sich mit

$$\widehat{\widehat{F}}' = (2\pi)^m \check{F}'$$

Übung: Definiere $\check{u}$!

Beweis 1) F' ist stetig
Das heißt, wir müssen Stetigkeit erst definieren!

$$F' : \mathscr{S}' \to \mathscr{S}', u_n \to u \quad \Rightarrow F'u_n \to F'u \quad \text{Stetigkeit in } \mathscr{S}'$$

In $\mathcal{L}(E,F)$ definieren wir die Konvergenz einer Folge (T_n) wie folgt: $T_n \to T :\Leftrightarrow$

(1)
$$\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx,$$

(2) Zu jedem $j \in \mathbb{N}$ gibt es $N(j) \in \mathbb{N}$ und $C_j > 0$ so, dass

$$r_j(T_n x) \leqslant C_j p^{N(j)}(x) \quad \forall x \in E, n \in \mathbb{N}.$$

Jetzt sei also $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{S}'$ mit $u_n \to u$, d.h.

(1)
$$\lim_{n\to\infty} u_n(f) = u(f) \quad \forall f \in \mathscr{S};$$

(2)
$$|u_n(f)| \leqslant C_N \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqslant N \\ x\in\mathbb{R}^m}} |x^\alpha D_x^\alpha f(x)| \quad \forall f \in \mathscr{S}, n \in \mathbb{N}$$

Dann ist

(1)
$$\lim_{n\to\infty} \widehat{u}_n(f) = \lim_{n\to\infty} u_n(\widehat{f}) = u(\widehat{f}) = \widehat{u}(f);$$

(2)
$$\begin{aligned} |\widehat{u}_n(f)| = |u_n(\widehat{f})| &\leqslant C_N \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqslant N \\ x\in\mathbb{R}^m}} |x^\alpha D_x^\beta \widehat{f}(x)| \\ &\leqslant C_M \sup_{\substack{|\alpha|+|\beta|\leqslant N \\ x\in\mathbb{R}^m}} |x^\alpha D_x^\beta f(x)|, \text{ weil } f \mapsto \widehat{f} \text{ stetig ist in } \mathscr{S} \end{aligned}$$

$$\widehat{\widehat{u}}(f) = \widehat{u}(\widehat{f}) = u(\widehat{\widehat{f}}) = u((2\pi)^m \check{f}) = (2\pi)^m \check{u}(f) \Rightarrow \text{ Beh.}$$

□

Beispiel

$$\widehat{\delta}_a(f) = \delta_a(\widehat{f}) = \widehat{f}(a) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i\langle a,x\rangle} f(x)dx = u_{e^{-i\langle a,\cdot\rangle}}(f).$$

Wie steht es mit Faltungen? Können wir $u * f \in \mathscr{S}'$ definieren? Für $g, f, h \in \mathscr{S}$ sei

$$\begin{aligned} u_g * f &= u_{g*f} \\ (u_g * f)(h) = u_{g*f}(h) &= \int\int g(y)f(x-y)h(x)dydx \\ &= \int g(y) \int f(x-y)h(x)dxdy \\ &= \int g(y) \int \check{f}(y-x)h(x)dxdy \\ &= u_g(\check{f} * h), \text{ d.h.} \end{aligned}$$

6.7.24 Definition

Für $f, h \in \mathscr{S}$ setzen wir $(u * f)(h) = u(\check{f} * h)$.

6.7.25 Satz

Für $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m), u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ ist $u * \phi = u_h$ für eine C^∞-Funktion h, nämlich

$$h(x) = u(\phi^x), \ \phi^x(y) := \phi(x-y).$$

Das ist wohldefiniert, weil $\phi^x \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$ für festes x.

6.7.26 Satz (Approximation von Distributionen)

Zu jedem $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^m)$ gibt es eine Folge $(\phi_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $u_{\phi_n} \to u$ im oben beschriebenen Sinn.

Beweis Erinnerung an den Glättungsoperator:

$$j(x) = \tilde{j}(|x|),\ j \geqslant 0;\ j \in C_0^\infty(B_1^{R^m}(0)),\ \int j = 1$$

$$j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-m} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right);\ J_\varepsilon f(x) = j_\varepsilon * f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$$

Dann setzen wir

$$\phi_\varepsilon := j_{\frac{1}{\varepsilon}}(j_\varepsilon * u),$$

und $\left(\phi_{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ leistet das Gewünschte.

6.7.27 Satz

Die Fourier-Transformation $F'|_{L^2(\mathbb{R}^m,\mathcal{L},\lambda)}$ ist ein Isomorphismus von L^2 auf sich. Es gilt für $u_1, u_2 \in L^2$

$$(u_1, u_2)_{L^2} = (2\pi)^{-m}(\widehat{u}_1, \widehat{u}_2)_{L^2}.$$

Beweis: Wähle $(u_n) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $u_n \to u \in L^2$ in $L^2, \|u_n - u\|_{L^2} \to 0$. Dann gilt nach ...

$$\|\widehat{u}_n - \widehat{u}_m\|_{L^2}^2 = (2\pi)^m \|u_n - u_m\|_{L^2}^2,$$

d.h. $\widehat{u}_n$ ist eine L^2-CF, d.h. es gibt $v \in L^2$ mit $\widehat{u}_n \to v$ in L^2. (!) Die Konvergenz in L^2 impliziert die Konvergenz in $\mathscr{S}'$. Also $u_n \to u$ in $\mathscr{S}' \Rightarrow \widehat{u}_n \to \widehat{u}$ in $\mathscr{S}'$, aber auch $\widehat{u}_n \to v$ in $\mathscr{S}' \Rightarrow \widehat{u} = v \in L^2$, damit

$$\|\widehat{u}\|_{L^2}^2 = \lim_{n\to\infty} \|\widehat{u}_n\|_{L^2}^2 = (2\pi)^m \|u\|_{L^2}^2.$$

□

6.7.28 Satz (Poissonsche Summenformel)

Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}), \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, und es gebe $C, \varepsilon > 0$ so, dass

$$|f(x)| + |\widehat{f}(x)| \leqslant \frac{C}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}$$

Dann gilt für $T > 0$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right)$$

VL: Mo, 2004-06-07

Zeige zunächst

$$(*)\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi n) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)e^{inx}\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Beweis: Links steht eine 2π-periodische Funktion, rechts ihre Fourier-Reihe. $F(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi n)$

z.z.:

(i) F konvergiert gleichmäßig auf $[-\pi,\pi]$, $F \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$

(ii)
$$\underbrace{\widehat{F}(n)}_{\text{Fourierkoeff. (per. Fkt.)}} := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\widehat{f}(n)}_{\text{Fouriertransf.}}$$

(iii) Die Fourier-Reihe von F konvergiert.

Beweis

(i) Die Reihe ist absolut konvergent. Für $x \in [-\pi,\pi]$ ist

$$|f(x+2n\pi)| \leqslant \frac{C}{(1+|x+2n\pi|)^{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{C}{(1+(2|n|-1)\pi)^{1+\varepsilon}}$$

und $\sum \frac{1}{(1+2(|n|-1)\pi)^{1+\varepsilon}} < \infty$. Nach dem Weierstraßkriterium für gleichmäßige Konvergenz ist $\sum f(x+2n\pi)$ absolut und gleichmäßig konvergent in $[-\pi,\pi]$.
$\Rightarrow$ Sie stellt dort eine stetige Funktion dar. $\Rightarrow F \in \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

(ii)
$$\begin{aligned}
\widehat{F}(n) &:= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+2k\pi)e^{-inx}dx \\
&\overset{\text{glm. Konv}}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\pi}^{\pi} f(\underbrace{x+2k\pi}_{=:y})e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(y)e^{-in(y-2k\pi)}dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(y)e^{-iny}\underbrace{e^{2kni\pi}}_{=1}dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} f(y)^{-iny}dy \\
&\overset{\text{Lebesgue}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iny}dy = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(n)
\end{aligned}$$

(iii)
$$\text{Fourier-Reihe von } F\text{:} \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{F}(n)e^{inx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{inx}$$

Wegen $\left|\widehat{f}(n)e^{inx}\right| = \left|\widehat{f}(n)\right| < \frac{C}{(1+|n|)^{1+\varepsilon}}$ konvergiert die Reihe absolut. Nach Satz 3.6.8 (2) folgt

$$\forall x \in \mathbb{R}: \; F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{F}(n)e^{inx} \overset{\text{(ii)}}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)e^{inx}$$

$\Rightarrow (*)$

Nachtrag aus Übung: Anwendung von $(*)$ auf $g(x) := f(ax)$ mit $a > 0$ liefert nun (!)

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(ax + 2an\pi) = \frac{1}{2\pi a} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{n}{a}\right) e^{inx}$$

Mit $x = 0$ und $a = \frac{T}{2\pi}$ folgt dann

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nT) = \frac{1}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\left(\frac{2\pi n}{T}\right)$$

$\square$

Fourier-Analysis, Zeta-Funktion siehe z.B. `Patterson: Introduction to the Theory of Riemann-Zeta-Function`

Kapitel 7

Theorie der analytischen Funktionen in $\mathbb{C}$

7.1 Rückblick

a) Potenzreihen, Konvergenzradius

7.1.1 Definition

Eine Funktionenreihe $\sum_{j\geqslant 0} a_j(z-z_0)^j$ heißt (formale) *Potenzreihe* mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$ und Koeffizienten $a_j \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihe konvergiert immer für $z = z_0$. Die Potenzreihe heißt *konvergent*, falls es ein $z_1 \neq z_0$ gibt, in dem sie konvergiert.

$$\varrho := \begin{cases} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[j]{|a_j|}, & \text{falls } (\sqrt[j]{|a_j|}) \text{ beschr.} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

Konvergenzradius (KR): $R := \frac{1}{\varrho}$ (mit $\frac{1}{\infty} := 0,\ \frac{1}{0} := \infty$)

7.1.2 Satz (Konvergenzsatz)

Die PR $\sum\limits_{j\geqslant 0} a_j(z-z_0)^j$

- konvergiert in $B_R(z_0)$
- divergiert in $\mathbb{C}\backslash\overline{B_R(z_0)}$
- konvergiert gleichmäßig auf $B_r(z_0)\ \forall\ r < R$.

Zusatz: Über die Konvergenz auf dem Rand $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$ lässt sich im allgemeinen nichts sagen.

Beweis der Aussage über gleichmäßige Konvergenz: O.B.d.A. $z_0 = 0, R > 0$. Sei $z_1 \in \mathbb{C}$, $r < |z_1| < R$
$\Rightarrow \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[j]{|a_j|} < \frac{1}{z_1} \Rightarrow \sqrt[j]{|a_j|} < \frac{1}{|z_1|}$ für fast alle $j \geqslant 0$
$\Rightarrow \sqrt[j]{|a_j|}|z_1| < 1$ für fast alle $j \geqslant 0 \Rightarrow |a_j||z_1|^j < 1$ für fast alle $j \geqslant 0$

$\Rightarrow \exists M: \ |a_j||z_1|^j \leqslant M \ \forall j \geqslant 0$
Sei nun $z \in B_R(z_0)$: $|a_j z^j| \leqslant \frac{M}{|z_1|^j}|z|^j = M(\frac{r}{|z_1|})^j \ \frac{r}{|z_1|} < 1, \sum(\frac{r}{|z_1|})^j < \infty \Rightarrow$ $\sum a_j z^j$ gleichmäßig konvergent auf $B_r(z_0)$.

$B_r(z_0)$ heißt Konvergenzscheibe oder *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

Beispiele

1) Exponentialreihe: $\sum \frac{z^j}{j!}, \quad R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n!}} = \infty$

   Quotientenkriterium PR: $\sum a_j(z - z_0)^j$
   Sind $a_j \neq 0$ für fast alle j und $\exists \lim \frac{|a_j|}{|a_{j+1}|}$, dann ist $R = \lim \frac{|a_j|}{|a_{j+1}|}$.

2) Geometrische Reihe $\sum_{j \geqslant 0} z^j, \quad R = 1$

3) Sinus und Cosinusreihe: $\sum_{j \geqslant 0} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} z^{2j+1}$, $\sum_{j \geqslant 0} \frac{(-1)^j}{(2j)!} z^{2j}, \quad R = \infty$

4) $\sum_{j \geqslant 1} \frac{(-1)^j}{j!} z^j, \quad R = 1$

7.1.3 Definition

Nach dem Konvergenzsatz stellt $\sum_{j \geqslant 0} a_j(z - z_0)^j$ in $B_R(z_0)$ eine stetige Funktion $f: B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ dar. Sei $U \subset \mathbb{C}$. $f: U \to \mathbb{C}$ heißt *analytisch* in U, wenn jedes $z_0 \subset U$ eine Umgebung V besitzt und $\exists \sum a_j(z - z_0)^j$, so dass $f(z) = \sum_{j \geqslant 0} a_j(z - z_0)^j$ in V.

Beispiel: Polynome, Exponentialfunktion, cos, sin (= Summen der entsprechenden Reihen)

b) Rechnen mit Potenzreihen (vgl. Satz 3.4.5)

7.1.4 Satz

Es seien $f(z) = \sum_{j \geqslant 0} a_j(z - z_0)^j$ und $g(z) = \sum_{j \geqslant 0} b_j(z - z_0)^j$ konvergent mit KR R_1 bzw. R_2.

1) Dann hat $f + g$ die Reihendarstellung

$$(f+g)(z) = \sum_{j \geqslant 0} (a_j + b_j) z^j \text{ in } B_R(z_0), \ R = \min(R_1, R_2)$$

   Der KR der Reihe ist $\geqslant \min(R_1, R_2)$

2) Analog: $(fg)(z) = \sum_{j \geqslant 0} (\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k})(z - z_0)^j$ (Cauchy-Produkt)

3) Ist $a_0 \neq 0$, dann besitzt $\frac{1}{f}$ eine Potenzreihendarstellung für $|z - z_0| \leqslant \rho$, wobei ρ so, dass $|a_1|\rho + |a_2|\rho^2 + \ldots < |a_0|$

Folgerung: Die Menge der analytischen Funktionen auf einer offenen Menge U ist eine $\mathbb{C}$-Algebra.

7.1.5 Umbildungssatz

Ist $f(z) = \sum_{j \geqslant 0} a_j (z - z_0)^j$ konvergent in $B_R(z_0)$, so ist f in jedem $z_1 \in B_R(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickelbar.

$$f(z) = \sum_{k \geqslant 0} b_k (z - z_1)^k \text{ für } |z - z_1| < R - |z_1 - z_0| \text{ mit } b_k = \sum_{j \geqslant k} \binom{j}{k} a_j (z_1 - z_0)^{j-k}$$

Beweis

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{j \geqslant 0} a_j (z - z_0)^j = \sum_{j \geqslant 0} a_j (z - z_1 + z_1 - z_0)^j \\ &= \sum_{j \geqslant 0} a_j \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (z - z_1)^j (z_1 - z_0)^{j-k} \\ &= \sum_{k \geqslant 0} \left(\sum_{j \geqslant k} \binom{j}{k} a_j (z_1 - z_0)^{j-k} \right) (z - z_1)^j \end{aligned}$$

Rechtfertigung: Großer Umordnungssatz.

c) Holomorphie, Komplexe Ableitung (vgl. 4.2.11)

7.1.6 Definition

$f : U \to \mathbb{C}$ heißt $\mathbb{C}$-*differenzierbar* (komplex differenzierbar) in $z_0 \in U$, falls

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z) \in \mathbb{C}.$$

f heißt *holomorph*, wenn f $\mathbb{C}$-differenzierbar in jedem $z \in U$ ist.

Erinnerung (4.2.12): f ist genau dann $\mathbb{C}$-differenzierbar, wenn $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-differenzierbar und $Df(z_0) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-linear.

7.1.7 Satz (Holomorphie der Potenzreihe)

Die Potenzreihe $f(z) = \sum a_j (z - z_0)^j$ habe den KR $R > 0$. Dann ist f in $B_R(z_0)$ unendlich oft $\mathbb{C}$-differenzierbar, insbesondere ist f holomorph. Es gilt:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^k f = f^{(k)}(z) = \sum_{j \geqslant k} \binom{j}{k} k! a_j (z - z_0)^{j-k}$$

mit $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$. (Taylor'sche Formel der Koeffizienten)

Beweis 3.4.5

$f(x) = \sum_{j \geqslant 0} a_j z^j$, $R > 0$ *VL: Mi, 2004-06-09*

$\Rightarrow$ Für $|z| < R$ ist f komplex differenzierbar und es gilt

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Die Potenzreihe ist die Taylorreihe der durch die Potenzreihe definierte Funktion.

Identitätssatz: Wenn f konvergent in $|z| < R$ und $f(z_n) = 0$ für eine unendliche Nullfolge (z_n), dann ist $f \equiv 0$.
Potenzreihen lassen sich zusammensetzen: f konvergiere in $|z| < R_f$, $f(0) = 0$, g konvergiere in $|w| < R_g$ und es sei $f(B_{R_f}(0)) \subset B_{R_g}(0)$; dann ist auch $g \circ f$ durch eine Potenzreihe gegeben

$$g \circ f(z) = \sum_{j \geqslant 0} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} (f(z))^j.$$

In der Regel schwierig auszurechnen!

7.1.8 Satz (Die Bürmann-Lagrange-Reihe)

Es sei $f = h^{-1}$, h konvergent in $|z| < R_h$ und $h(B_{\tilde{R}_h}(0)) \subset B_{R_f}(0)$. Dann gilt

$$g \circ f(z) \overset{w=f(z)}{=} g \circ f(h(w)) = g(w) + \sum_{j \geqslant 1} a_j w^j$$

mit

$$a_j = \frac{1}{j!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{j-1} \Big|_{z=0} \left(g'(z) \left(\frac{z}{h(z)} \right)^j \right), \quad j \in \mathbb{N}.$$

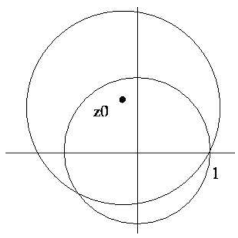
O.B.d.A Entwicklungspunkt $z = 0$
D.h. für $\sum_{j \geqslant 0} a_j \underbrace{(z - z_0)}_{w}{}^j$ betrachte $\sum a_j w^j$ in $|w| < R$. Für konkrete Funktionen ist das jedoch nicht so.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{j \geqslant 0} z^j, \quad |z| < 1$$

Verschiebung des Entwicklungspunktes

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1 - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{(1 - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{1 - z_0})} = \frac{1}{1 - z_0} \sum_{j \geqslant 0} \left(\frac{z - z_0}{1 - z_0} \right)^j$$

konvergiert für $|z - z_0| < |1 - z_0|$.



Konkret

$$\sum_{j \geqslant 0} a_j z^j = \sum_{j \geqslant 0} a_j (z - z_0 + z_0)^j = \sum_{j \geqslant 0} a_j \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} z_0^{j-l} (z - z_0)^l$$

$$= \sum_{l \geqslant 0} (z - z_0)^l \sum_{j \geqslant l} a_j \binom{j}{l} z_0^{j-l} = \sum_{l \geqslant 0} \frac{f^{(l)}(z_0)}{l!} (z - z_0)^l.$$

(d) Der Begriff der analytischen Funktion

Erinnerung: 7.1.3 Definition

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$. f heißt in G *analytisch* $\iff$ f besitzt eine Potenzreihenentwicklung um jeden Punkt $z \in G$.

Beispiele

(1) Alle ganzen Funktionen (KR $R = \infty$) sind analytisch in $\mathbb{C}$. (ganz rational = Polynom)

(2) $f(z) = \frac{1}{1-z}$ ist analytisch in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

(3) Was ist mit $f(z) = \sqrt{1+z} = (1+z)^{1/2} = \sum_{j \geqslant 0} \binom{1/2}{j} z^j$, KR $R = 1$? Für $z_0 \in \mathbb{C}$ ist $\sqrt{1+z} = \sqrt{1+z_0+z-z_0} = \sqrt{1+z_0}\sqrt{1+\frac{z-z_0}{1+z_0}}$, $|z_0| < 1$. Wenn z_0 so gewählt wird, dass $|1+z_0| > 1$, so wird der Konvergenzradius größer; damit weiß ich noch nicht, wo $\sqrt{1+z}$ analytisch ist bzw. sich *analytisch fortsetzen lässt*.

7.1.9 Definition

Es sei f eine Potenzreihe in $B_R(z_0)$.
Eine analytische Funktion $\tilde{f} : G \to \mathbb{C}$, $G \supset B_R(z_0)$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$, heißt *analytische Fortsetzung* von f, falls $\tilde{f}\big|_{B_R(z_0)} = f$.

Bemerkung: Nach dem Identitätssatz ist $\tilde{f}$ eindeutig bestimmt.

Erinnerung: Jede analytische Funktion in G ist holomorph, das heißt ∞ oft komplex differenzierbar in G.

Umkehrung: Es sollte gelten, dass $f(z) = \sum_{j \geqslant 0} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!}(z-z_0)^j$ – Konvergenz?

Kurvenintegrale in $\mathbb{C}$: $I := [a,b]$. G ein Gebiet in $\mathbb{C}$, $c : I \to G$, c sei stetig und stückweise differenzierbar, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig

$$\Rightarrow \int_c f(z)dz = \int_c f = \int_I f \circ c(t)c'(t)dt$$

Anpassung an den Differentialform-Kalkül: $z = x + iy \mapsto (x,y) \in \mathbb{R}^2$; $c(t) = c_1(t) + ic_2(t) \mapsto (c_1, c_2)(t)$; $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_c f &= \int_I (u \circ c(t) + iv \circ c(t))(c_1'(t) + ic_2'(t))dt \\
&= \int_I (u \circ c \cdot c_1'(t) - v \circ c \cdot c_2'(t))dt + i\int_I (u \circ c \cdot c_2'(t) + v \circ c \cdot c_1'(t))dt \\
&= \int_I \left[\omega_f^{\mathrm{Re}}(c')(t) + i\omega_f^{\mathrm{Im}}(c')(t)\right] dt = \int_c \omega_f^{\mathrm{Re}} + i\int_c \omega_f^{\mathrm{Im}},
\end{aligned}$$

wobei $\omega_f^{\mathrm{Re}} = udx - vdy$ und $\omega_f^{\mathrm{Im}} = udy + vdx$.
Um den Satz von Stokes anwenden zu können, berechnen wir

$$d\omega_f^{\mathrm{Re}} = -\frac{\partial u}{\partial y} + \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx \wedge dy = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx \wedge dy$$
$$d\omega_f^{\mathrm{Im}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

Beachte: f holomorph in $G \Rightarrow$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten in G, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\Rightarrow d\omega_f^{\mathrm{Re}} = d\omega_f^{\mathrm{Im}} = 0$$

Beispiel: $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$; $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$
$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}$

7.1.10 Satz (Integralsatz von Cauchy)

VL: Mo, 2004-06-14

Es sei f holomorph in G und $c : I \to G$ ein einfach geschlossener, stetiger und stückweise differenzierbarer Weg in G, sodass das Innengebiet von c in G enthalten ist. Dann gilt

$$\int_c f(z)dz = \int_c f = 0.$$

Gegenbeispiel $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $c(t) = e^{it}$, $-\pi < t \leqslant \pi$, $f(z) = \frac{1}{z}$

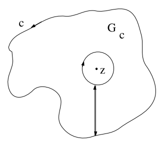
$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_c f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 1$$

7.1.11 Satz (1. Integralformel von Cauchy)

Es sei f holomorph in G und $c : I \to G$ ein einfach geschlossener, positiv orientierter, stetiger und stückweise differenzierbarer Weg in G und bezeichne G_c das Innengebiet c, sodass das Innengebiet von c in G enthalten ist. Für $z \in G_c$ gilt dann

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Beweis



Zunächst sei $c = c_\varepsilon$, $c_\varepsilon(t) = z + \varepsilon e^{it}, \varepsilon \ll 1$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\varepsilon} \frac{(f(\zeta) - f(z)) + f(z)}{\zeta - z} d\zeta =: I + II$$

$$\begin{aligned} II &= \frac{f(z)}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varepsilon i e^{it}}{\varepsilon e^{it}} dt = f(z) \\ |I| &\leqslant C\varepsilon \quad \forall \varepsilon \Rightarrow I = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Formel ist richtig für $c = c_\varepsilon$, ε klein. Nach dem Integralsatz 7.1.10 gilt

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{c} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) + O(\delta) \quad \forall \delta \in (0, \delta_0).$$

Mit $\delta \to 0$ folgt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Bemerkung Ist $z \in G\backslash\overline{\text{Innengebiet von } c}$, so ist $\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$ nach 7.1.10.

7.1.12 Satz (2. Integralformel von Cauchy)

$$\frac{d^n f}{dz^n}(z) = f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{c} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Beweis Nach dem Satz über Differentiation unter dem Integralzeichen und

$$\left|\frac{1}{(\zeta - z - h)^k} - \frac{1}{(\zeta - z)^k}\right| \overset{\text{MWS der}}{\underset{\text{reellen Abl.}}{\leqslant}} |h| \sup_{0<t<1}\left|\frac{k}{(\zeta - z - th)^{k+1}}\right| \leqslant \frac{k}{\delta^{k+1}},$$

wenn $\underline{|h| \leqslant h_0} \leqslant 1$ und h_0 so gewählt ist, dass $\overline{B_{h_0}(z)} \subset G$, dann setzen wir $\delta = d(\overline{B_{h_0}(z)}, c(I))$. Also folgt die Behauptung. □

Frage Sind holomorphe Funktionen analytisch, das heißt besitzen sie Taylorentwicklungen um jeden Punkt ihres Definitionsbereiches?
f holomorph in G, $z_0 \in G$, $R' > R > 0$ so, dass $B_{R'}(z_0) \subset G$. Dann ist nach 7.1.11 für $|z - z_0| \leqslant R$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta - z_0| = R'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta - z_0| = R'} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0})} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta - z_0| = R'} \sum_{j \geqslant 0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^j d\zeta \end{aligned}$$

wegen $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| \leqslant \frac{R}{R'} < 1$. Weil die Reihe gleichmäßig konvergiert, folgt

$$f(z) = \sum_{j \geqslant 0}(z - z_0)^j \frac{1}{2\pi i}\oint_{|\zeta - z_0| = R'} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{-j-1} d\zeta$$

7.1.13 Folgerung

Es sei f holomorph in G und $z_0 \in G$. Dann lässt sich f um z_0 in eine Potenzreihe entwickeln, deren Konvergenzradius $\geqslant d(z_0, \mathcal{C}G)$ ist. Insbesondere ist jede holomorphe Funktion analytisch.

Beispiele

(1) $f(z) = \frac{1}{1-z}$ holomorph in $\mathbb{C}\setminus\{1\}$; die Potenzreihenentwicklung (von $z_0 \neq 1$) hat den Konvergenzradius $|z_0 - 1|$.

(2) $f(z) = \frac{z}{e^z-1} = \sum_{j\geqslant 0} \frac{B_j}{j!} z^j$ hat den Konvergenzradius 2π. (regulär in $z_0 = 0$ und $|f(\pm 2\pi i)| = \infty$)

7.1.14 Folgerung

Sei f holomorph in G , $z_0 \in G$, $\overline{B_R(z_0)} \subset G$. dann gibt es eine Konstante $M > 0$, so dass

$$\left|\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\right| \leqslant \frac{M}{R^n}.$$

Dabei können wir $M := \sup_{|\zeta - z_0| = R} |f(\zeta)| < \infty$ wählen.

7.1.15 Folgerung (Satz von Liouville)

Eine beschränkte ganze Funktion ist konstant.

Beweis Wegen der Beschränktheit von f gilt für $M := \|f\|_\infty < \infty$ und jedes $R > 0$, nach 7.1.14,

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leqslant \frac{M}{R^n} \quad \overset{R\to\infty}{\Rightarrow} \quad \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 \quad \text{für } n \geqslant 1. \quad \Rightarrow f(z) = f(0).$$

7.1.16 Satz (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes Polynom vom Grad > 0 hat mindestens eine (komplexe) Nullstelle.

Beweis Sei $p(z)$ vom Grad $\geqslant 1$ mit $a_n = 1$ (o.B.d.A), so dass $|p(z)| \geqslant \frac{1}{2}|z|^n$ für $|z| \geqslant R$. Weiter ist $\frac{1}{p}$ ganz, also $\left|\frac{1}{p(z)}\right| \leqslant M$ für $|z| \leqslant 2R$.
Aber für $|z| \geqslant 2R$ gilt $\left|\frac{1}{p(z)}\right| \leqslant \frac{2}{|z|^n} \leqslant \frac{2}{(2R)^n}$, d.h. $\frac{1}{p}$ ist beschränkt und damit konstant. - Widerspruch □

7.1.17 Satz (Das Maximumprinzip)

Es sei f holomorph in G und nicht konstant. Dann kann $|f(z)|$ in keinem inneren Punkt von G maximal werden. In anderen Worten: ist $\overline{G}$ kompakt und f auf $\overline{G}$ noch stetig, so nimmt $|f|$ das Maximum auf ∂G an.

Beweis Sei $z_0 \in G$ und $|f(z_0)|$ ein (lokales) Maximum.
Dann ist $i_0 := \min\{i \in \mathbb{N}; f^{(j)}(z_0) \neq 0\} < \infty$ und wir können wegen der Konvergenz der Taylorreihe in $B_\varepsilon(z_0) \subset G$, $\varepsilon > 0$, schreiben

$$f(z_0+h) = f(z_0) + \sum_{j \geqslant 1} \frac{f^{(j)}(z_0)}{j!} h^j = f(z_0) + h^{i_0} \frac{f^{(i_0)}(z_0)}{i_0!} + O(|h|^{i_0+1})$$

Dann wählen wir $h = |h| \cdot e^{\sqrt{-1}\theta}$ und schreiben $\frac{f^{(i_0)}(z_0)}{f(z_0) i_0!} = \rho e^{\sqrt{-1}\theta_0}$, $\rho > 0$, so dass

$$h^{i_0} \frac{f^{(i_0)}(z_0)}{i_0!} = |h|^{i_0} e^{i_0\sqrt{-1}\theta} \rho e^{\sqrt{-1}\theta_0} f(z_0) = |h|^{i_0} \rho e^{\sqrt{-1}(i_0\theta+\theta_0)} f(z_0)$$

Wähle nun θ so, dass $i_0\theta + \theta_0 = 2\pi$

$$\Rightarrow \frac{h^{i_0} f^{(i_0)}(z_0)}{i_0!} = |h|^{i_0} \rho f(z_0).$$

Schließlich sei $|O(h^{i_0+1})| \leqslant C|h|^{i_0+1}$, so dass

$$\begin{aligned}
|f(z_0+h)| &\geqslant |f(z_0) + |h|^{i_0} \rho f(z_0)| - C|h|^{i_0+1} \\
&= |f(z_0)|(1 + |h|^{i_0}\rho) - C|h|^{i_0+1} \\
&= |f(z_0)| + |h|^{i_0} \rho |f(z_0)| - |h|^{i_0+1} C \\
&= |f(z_0)| + \underbrace{|h|^{i_0}(\underset{>0}{\rho} \underset{>0}{|f(z_0)|} - |h| C)}_{>0 \text{ für } |h| < \frac{\rho|f(z_0)|}{C}}
\end{aligned}$$

Widerspruch

7.1.18 Bemerkungen

VL: Mi, 2004-06-16

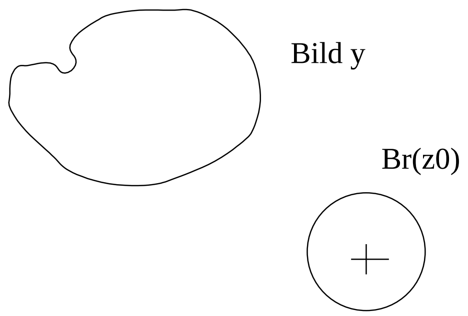
1) Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen; f holomorph in G ($\Longleftrightarrow: f \in \mathcal{O}(G)$). Dann ist f unendlich oft $\mathbb{C}$- differenzierbar in G (insbesondere ist $f \in \mathcal{C}^\infty(G, \mathbb{C})$).

   In jeder Kreisscheibe $B \subset G$ gelten die Cauchy-Integralformeln:

$$\frac{d^k}{dz^k} f(z) = f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{(z-\zeta)^{k+1}} d\zeta \quad \forall z \in B, \forall k \in \mathbb{N}$$

   Beweis Entwicklungslemma: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise C^1 und einfach geschlossen. Sei $g : |\gamma| := \text{Bild}(\gamma) \to \mathbb{C}$ stetig und $F : \mathbb{C} \backslash |\gamma| \to \mathbb{C}$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$



F ist analytisch: In jeder Kreisscheibe $B = B_r(z_0),\ B \cap |\gamma| = \emptyset$, gilt

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{g(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$$

$\square$

Sei nun $z_0 \in G, B_R(z_0) = B \subset G$. Wir wenden das Entwicklungslemma an auf $\gamma = \partial B,\ g := f|_{\partial B_R(z_0)}$. Wegen der Cauchy-Formel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} =: F(z)$$

ist $f = F$ in $B_r(z_0), r < R$, in eine Potenzreihe entwickelbar und

$$f^{(k)}(z_0) = F^{(k)}(z_0) \overset{\text{Taylor}}{=} k! a_k = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$$

$\square$

2) $f \in \mathcal{O}(G), f = u + iv, u = \operatorname{Re} f, v = \operatorname{Im} f \Rightarrow u, v \in C^{\infty}(G)$ und u, v harmonisch, das heißt $\Delta u = \Delta v = 0, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Beweis: $f \in \mathcal{O}(G) \Rightarrow f$ erfüllt die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \overset{\text{Schwarz}}{=} 0$$

Bemerkung: u, v heißen harmonisch konjugiert (d.h. $\exists f \in \mathcal{O}(G), f = u + iv$).

Umgekehrt: Sei $U \in \mathcal{C}^{\infty}(G), \Delta u = 0$. Dann gibt es in jeder Kreisscheibe $B \subset G$ ein $f \in \mathcal{O}(B), u = \operatorname{Re} f$.

7.1.19 Satz

Die folgenden Aussagen über eine *stetige* Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sind äquivalent:

1) f ist holomorph (d.h. $\mathbb{C}$ differenzierbar).
2) Für jedes Dreieck $\Delta \subset G$: $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.
3) f hat lokale Stammfunktionen.
4) Für jede Kreisscheibe $B \subset G$ gilt
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in B.$$
5) f ist analytisch (d.h. um jeden Punkt in eine Potenzreihe entwickelbar).

Beweisschema

$$\begin{tikzcd}
 & (2) \arrow[r, Rightarrow, "\text{Integrabilitätsbedingung}"] & (3) \arrow[dr, Rightarrow, "\text{Satz von Morera}"] & \\
(1) \arrow[ur, Rightarrow, "\text{Lemma von Goursat}"] \arrow[dr, Rightarrow, "\text{Cauchy-Integralformel}"'] & & & (1) \\
 & (4) \arrow[r, Rightarrow, "\text{Entwicklungslemma}"] & (5) \arrow[ur, Rightarrow, "\text{gliedweise Differentiation}"'] &
\end{tikzcd}$$

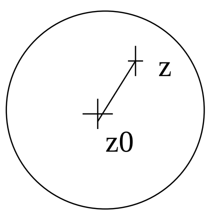
Bemerkung

1) $f \in C^1(G)$; f $\mathbb{C}$-differenzierbar $\iff \omega = f(z)dz$ geschlossen $\iff d\omega = 0 \iff$ CR-Gl. erfüllt.
f stetig in G, $f(z)dz$ ist geschlossen $\overset{\text{Def.}}{\iff}$ $f(z)dz$ ist lokal exakt, das heißt lokal $\exists g :\ dg = f(z)dz \iff$ lokal $\frac{dg}{dz} = f$ (f hat Stammfkt.)

2) $f \in C^1(G)$ holomorph $\int_{\partial\Delta} f(z)dz \overset{\text{Stokes}}{=} \int_\Delta d(f(z)dz) = 0$

Beweis von (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) (Satz von Morera)
(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $z_0 \in G, B_r(z_0) \subset G$. Integrabilitätsbedingung: stetige 1-Form ω auf $B_r(z_0)$ ist exakt $\iff \int_{\partial\Delta}\omega = 0$.

$$g(z) = \int_{z_0}^{z}\omega \quad \text{Stammfunktion}$$



Nach dem Integrabilitätskriterium folgt: $\exists g \in C^1$ mit $dg = \omega = f(z)dz$
$\Rightarrow \boxed{\frac{dg}{dz} = f \text{ in } B_r(z_0)}$

(3) $\Rightarrow$ (1)

$$\begin{aligned}\text{lokal } \exists g \in C^1,\ \frac{dg}{dz} = f &\Rightarrow g \text{ ist } \mathbb{C} \text{ differenzierbar}\\ &\Rightarrow g \text{ ist unendlich oft } \mathbb{C}\text{-differenzierbar}\\ &\Rightarrow f \text{ ist } \mathbb{C}\text{-differenzierbar}\end{aligned}$$

7.1.20 Die Argument- und Logarithmusfunktion

Für $z \in \mathbb{C}^*$ setzen wir

$$\operatorname{Arg} z = \left\{\varphi \in \mathbb{R} : e^{i\varphi} = \frac{z}{|z|}\right\} = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

mit $\{\arg z\} = \operatorname{Arg} z \cap [-\pi, \pi)$. $z \mapsto \operatorname{Arg} z$ ist vieldeutig. Hauptzweig des Arguments:

$$\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \{(x{,}0) : x \leqslant 0\} \text{ geschlitzte Ebene}$$

$\arg : \mathbb{C}_- \to (-\pi, \pi) \in C^\infty$, weil $P : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{C}_- \in C^\infty$ invertierbar.

$$P^{-1}(z) = (|z|, \arg z) \in C^\infty$$

Für $z \in \mathbb{C}^*$ setzen wir

$$\operatorname{Log} z = \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} = \{\log|z| + i(\arg z + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}$$

Definition Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine holomorphe Funktion $l \in \mathcal{O}(G)$ heißt eine *Logarithmusfunktion*, wenn

$$e^{l(z)} = z \quad \forall z \in G.$$

Bemerkungen

1) Sei $l \in \mathcal{O}(G)$ eine Logarithmusfunktion. Dann ist $\tilde{l} \in \mathcal{O}(G)$ genau dann eine Logartihmusfunktion, wenn $\exists n : \tilde{l} = l + 2\pi i n$

"$\Rightarrow$": $e^{\tilde{l}-l} = 1 \ \Rightarrow \tilde{l} - l \in 2\pi i k(z),\ k(z) \in \mathbb{Z}$
$\Rightarrow \tilde{l}(z) = l(z) + 2\pi i k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$

"$\Leftarrow$": $e^{\tilde{l}} = e^l \underbrace{e^{2\pi i n}}_{=1}$

2) $e^{l(z)} = z \ \Rightarrow l'(z) = \frac{1}{z}$

3) Hauptzweig des Logarithmus:

$$\log : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$$

$$\log z = \log|z| + i \arg z,\ C^\infty$$

(holomorph: Sei z, w mit $e^z = w, \log w = z; D(\log)(w) = (D(\exp)(z))^{-1}, \quad \mathbb{C}-$ linear)

4) Es existiert eine Logarithmusfunktion auf jeder Menge $\mathbb{C}\setminus$Halbstrahl.

5) Eine Logarithmusfunktion ist eine Stammfunktion der $\frac{dz}{z}$.

Schwierigkeit

$$\log z = \log(-\alpha^2 \pm i\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \pm\pi$$

D.h. log ist nicht stetig in $\mathbb{C}$. Problem $\rightsquigarrow$ Riemannsche Flächen

Ziel: eine allgemeinere Cauchy-Formel

7.1.21 Definition (Umlaufzahl)

Sei $\gamma:\ [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise C^1, $\gamma(a) = \gamma(b)$, $z \notin |\gamma|$. Dann nennt man

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

die *Umlaufzahl (Index)* von γ bezüglich z.

Beispiel

$$[0,2\pi] : t \overset{\gamma_1}{\mapsto} e^{it} : \quad \operatorname{ind}_{\gamma_1}(0) = 1$$

$$[0,2\pi] : t \overset{\gamma_2}{\mapsto} e^{i2t} : \quad \operatorname{ind}_{\gamma_2}(0) = 2$$

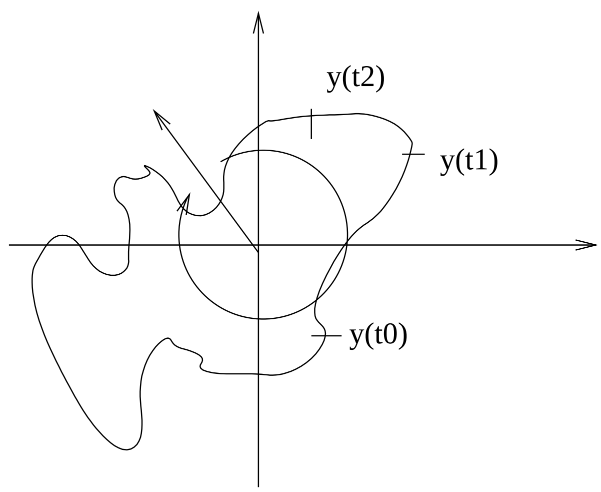
7.1.22 Lemma

$$\operatorname{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$$

Beweis O.B.d.A. $z = 0$. $\forall z \in [a,b]\ \exists U_\tau \ni z:\ \gamma(U) \subset V = \mathbb{C}\backslash H$ (H Halbstrahl mit Ursprung in 0: $H_x = \{tx : t \geqslant 0\}, |x| = 1$)
$\{U_\tau\}$ Überdeckung von $[a,b]$ (kompakt) $\overset{\text{(Lebesgue Lemma)}}{\Longrightarrow}$

$$\exists a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = b : \quad \gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset V_i = \mathbb{C}\backslash H_i$$

Sei F_i eine Logarithmusfunktion auf $V_i, \gamma_i := \gamma|_{[t_i;t_{i+1}]}, \gamma_i([t_i,t_{i+1}]) \subset V_i, F_i$ Stammfunktion der $\frac{d\zeta}{\zeta}$.



$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = &\int_{\gamma_0} \frac{d\zeta}{\zeta} + \int_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \ldots + \int_{\gamma_n} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ =&[F_0(\gamma(t_1)) - F_0(\gamma(t_0))] + [F_1(\gamma(t_2)) - F_1(\gamma(t_1))] + \\ &\ldots + [F_n(\gamma(t_{n+1})) - F_n(\gamma(t_n))] \\ =&\underbrace{[F_n(\gamma(t_{n+1})) - F_0(\gamma(t_0))]}_{\in 2\pi i\mathbb{Z}} + \underbrace{[F_0(\gamma(t_1)) - F_1(\gamma(t_1))]}_{\in 2\pi i\mathbb{Z}} + \\ &\ldots + \underbrace{[F_j(\gamma(t_{j+1})) - F_{j+1}(\gamma(t_{j+1}))]}_{\in 2\pi i\mathbb{Z}} + \ldots\end{aligned}$$

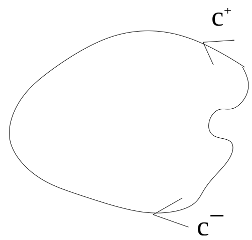
VL: Mo, 2004-06-21

7.1.23 Satz

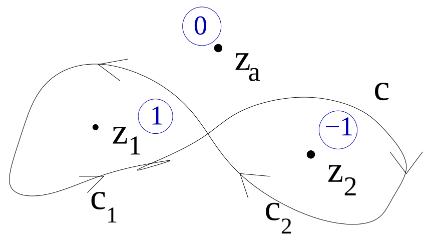
Sei $c : I \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg, dann gilt für $z \notin c(I)$:

1) $\operatorname{ind}_c(z) \in \mathbb{Z}$
2) $\operatorname{ind}_c(z)$ ist lokal konstant.
3) Ist $c = c_1 * c_2$, so gilt $\operatorname{ind}_c(z) = \operatorname{ind}_{c_1}(z) + \operatorname{ind}_{c_2}(z)$

Beispiele



c einfach geschlossen, $\operatorname{ind}_{c_\pm}(z) = \pm 1$, $\operatorname{ind}^n_{c_\pm}(z) = \pm n$, $n \in \mathbb{N}$;



7.1.24 Definition

Es sei c ein geschlossener Weg.

1) Wir definieren das *Innengebiet* von c als

$$\operatorname{Int} c := \{z \in \mathbb{C} \setminus c(I);\ \operatorname{ind}_c(z) \neq 0\}$$

und das *Außengebiet* von c als

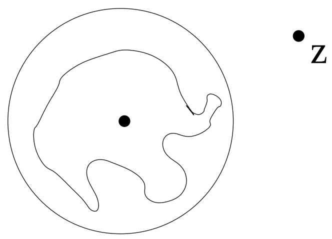
$$\operatorname{Ext} c := \{z \in \mathbb{C} \setminus c(I);\ \operatorname{ind}_c(z) = 0\}.$$

2) Wir nennen c *einfach geschlossen*, wenn gilt:

$$\operatorname{ind}_c(z) = 1 \;\forall\; z \in \operatorname{Int} c.$$

3) Wir nennen c *nullhomolog* in einem Gebiet G mit $c(I) \subset G$, wenn $\operatorname{Int} c \subset G$. Ein Gebiet G heißt *homologisch einfach zusammenhängend*, wenn jeder geschlossene Weg in G nullhomolog in G ist.

Beispiel $B_R(0)$ ist homologisch einfach zusammenhängend, $B_R(0) \setminus 0$ nicht.



$$\Rightarrow \operatorname{ind}_c(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{d\zeta}{\zeta - z}\text{holomorph} \to 0 \text{ für } |z| \to \infty$$
$$\Rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{B}_R(0) \subset \operatorname{Ext} c$$

7.1.25 Satz (Der allgemeine Satz von Cauchy)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, dann sind die folgenden Bedingungen für einen geschlossenen Weg c in G äquivalent:

1) $\int_c f(\zeta)d\zeta = 0 \;\forall f \in \mathcal{O}(G)$

2) $\operatorname{ind}_c(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \;\forall f \in \mathcal{O}(G), z \in G \setminus c(I)$

3) $\operatorname{Int} c \subset G$

Beweis

(1) ⇒ (2) Betrachte $\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}d\zeta = h_f(z)$. Nun ist die Funktion: $G \ni \zeta \mapsto \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} \in \mathbb{C}$, $z \in G$, holomorph $\Rightarrow h_f(z) \equiv 0$ nach (1).

(2) ⇒ (1) Übung

(2) ⇒ (3) Annahme: Es gibt $z \in \operatorname{Int} c \setminus G$. Dann ist $f(\zeta) := \frac{1}{\zeta - z}$ holomorph in G und $0 \neq \operatorname{ind}_c(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{d\zeta}{\zeta-z}$ im Widerspruch zu (1)

(3) ⇒ (2) Wir haben z.z., dass $h_f(z) \equiv 0$ für $z \in G(I)$ und $f \in \mathcal{O}(G)$.

1. Schritt: Für $z \in \operatorname{Ext} c$ gilt: $h_f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \Rightarrow h_f \in \mathcal{O}(\operatorname{Ext} c)$ mit $\lim_{|z|\to\infty} h_f(z) = 0$.

2. Schritt: Für $z \in G$ ist $h_f(z)$ holomorph (Ü) $\Rightarrow$ wegen $G \cap \operatorname{Ext} c \neq \emptyset$ ist $h_f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ und h_f ist beschränkt $\overset{\text{Liouville}}{\Rightarrow}$ h_f konstant $\Rightarrow h_f \equiv 0$.

Konvergenzsätze von Weierstraß

7.1.26 Definition

Sei G ein Gebiet und $(f_n) \subset \mathcal{O}(G)$. Dann heißt die Folge (f_n) in G *kompakt konvergent* gegen f, wenn gilt:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \text{ gleichmäßig in jeder kompakten Teilmenge von G}$$

Beispiel $f_n(z) := \sum_{j=0}^{n} z^j$ in $G = B_1(0) \Rightarrow (f_n)$ ist kompakt konvergent gegen $f(z) = \frac{1}{1-z}$

7.1.27 Satz (Weierstraß)

Sei (f_n) in G kompakt konvergent gegen f, $(f_n) \subset \mathcal{O}(G)$

1) Dann ist $f \in \mathcal{O}(G)$.
2) $(f_n^{(k)})$ ist kompakt konvergent $f^{(k)}$.

Beweis

1) Nach dem Satz von Morera genügt es zu zeigen, dass f in G wegunabhängig integrierbar ist

$$\iff \int_c f(\zeta)d\zeta = 0 \text{ für jeden geschlossenen Weg c mit } \operatorname{Int} c \subset G$$

Für einen solchen Weg gilt:

$$0 = \int_c f_n(\zeta)d\zeta \underset{n\to\infty}{\to} \int_c f(\zeta)d\zeta$$

2) Sei $K \subset G$ eine kompakte Menge. Wegen der Überdeckungseigenschaft müssen wir die Behauptung nur beweisen für $\overline{B_\varepsilon(z_0)}$, wenn $\overline{B_{2\varepsilon(z_0)}}(z_0) \subset G$. Für $z \in \overline{B_{\varepsilon(z_0)}(z_0)}$ gilt dann

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(z) &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = 2\varepsilon(z_0)} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \\ &\underset{n\to\infty}{\to} \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = 2\varepsilon(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \end{aligned}$$

7.1.28 Satz: Weierstraßscher Doppelreihensatz

Es sei $f_n(z) := \sum_{j\geqslant 0} a_{n_j}(z - z_0)^j$ konvergent in $|z - z_0| < R \; \forall n$ und $\sum_{n\geqslant 0} f_n(z) =:$ $f(z)$ sei kompakt konvergent in $|z - z_0| < R$. Dann gilt

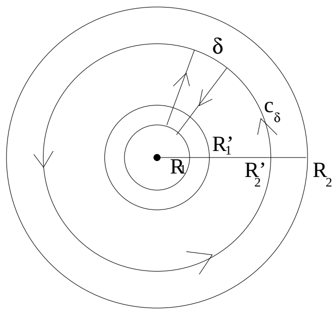
$$f(z) = \sum_{j\geqslant 0} \left(\sum_{n\geqslant 0} a_{n_j} \right) (z - z_0)^j \text{ für } |z - z_0| < R$$

Beweis: Übung

7.2 Der Residuensatz

Vorüberlegung: Holomorphe Funktionen in einem Kreisring

Es sei $G_{R_1 R_2} := z \in \mathbb{C} : R_1 < |z| < R_2,\ 0 \leqslant R_1 < R_2 \leqslant \infty$. Sei $f \in \mathcal{O}(G_{R_1 R_2})$ und $R_1 < R_1' < |\varepsilon| < R_2' < R_2$.



c_δ einfach geschlossen in G $\Rightarrow 0 = \int_{c_\delta} f(\zeta) d\zeta$,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \underset{\delta \to 0}{\rightarrow} \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{|\zeta| = R_2'} - \oint_{|\zeta| = R_1'} \right) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta =: I(z) + II(z) \\
I(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta| = R_2'} \frac{f(\zeta)}{\zeta(1 - z/\zeta)} d\zeta = \sum_{j \geqslant 0} \frac{z^j}{2\pi i} \int_{|\zeta| = R_2'} f(\zeta) \zeta^{-j-1} d\zeta \\
II(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta| = R_1'} \frac{f(\zeta)}{z(\zeta/z - 1)} d\zeta = \sum_{j \geqslant 1} \frac{z^{-j}}{2\pi i} \oint_{|\zeta| = R_1'} f(\zeta) \zeta^j d\zeta \\
&= \sum_{j \geqslant 1} \frac{z^{-j}}{2\pi i} \int_{|\zeta| = R_1'} f(\zeta) \zeta^{j-1} d\zeta
\end{aligned}$$

Wenn f holomorph ist in $B_{R_\varepsilon}(0)$, dann treten (natürlich!) keine negativen Potenzen auf, andernfalls aber schon:

$$f(z) := e^{1/z} = \sum_{j \geqslant 0} \frac{z^{-j}}{j!}$$

7.2.1 Satz

Ist $f \in \mathcal{O}(\dot{B}_\varepsilon(z_0))$, so existiert eine Entwicklung der Form

$$f(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j (z - z_0)^j,$$

die gleichmäßig konvergiert für $0 < \varepsilon_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \infty$. Diese Entwicklung heißt die *Laurent-Entwicklung* von f um z_0.

7.2.2 Satz

VL: Mi, 2004-06-23

$B_{R_1,R_2} = \{z \in \mathbb{C}; R_1 < |z| < R_2\}$, $0 \leqslant R_1 < R_2 \leqslant \infty$. Ist $f \in \mathcal{O}(B_{R_1,R_2})$, so existiert eine in B_{R_1,R_2} kompakt konvergente Entwickung (die *Laurent-Entwicklung*)

$$f(z) = \sum_{j \geqslant 0} a_j z^j + \sum_{j \leqslant -1} a_j z^j$$

mit

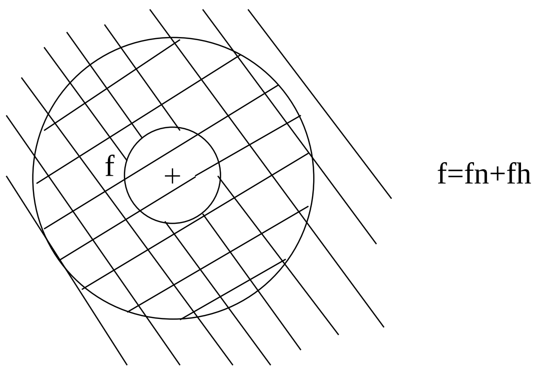
$$(*) \quad a_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=R} f(\zeta)\zeta^{-j-1} d\zeta$$

für $R_1 < R < R_2$. Die Summe über $j \geqslant 0$ heißt der *Nebenteil* f_n von f in B_{R_1,R_2}, die Summe über $j < 0$ der *Hauptteil* f_h.

Bemerkung

1) Die Entwicklung ist eindeutig bestimmt wegen $(*)$.

2) Der Nebenteil konvergiert in $|z| < R_2$ (und ist dort holomorph), der Hauptteil in $|z| > R_1$ (und ist dort holomorph).



Betrachte jetzt $B_{0R}(z_0) = \dot{B}_R(z_0)$.

7.2.3 Definition

Verhalten von $f \in \mathcal{O}(\dot{B}_R(z_0))$ in z_0

(a) Wenn $f_h \equiv 0$, so heißt z_0 eine *hebbare Singularität* von f; in diesem Fall wird f durch f_n zu einer holomorphen Funktion in $B_R(z_0)$ fortgesetzt.

(b) Wenn f_h ein Polynom in $(z - z_0)^{-1}$ ist, so heißt z_0 ein *Pol* von f. Ist die Ordnung von f_h in $(z - z_0)^{-1} = l$, so heißt z_0 ein *Pol der Ordnung* l.

(c) Wenn weder a) noch b) gilt, so heißt z_0 eine *wesentliche Singularität* von f.

7.2.4 Satz

Sei $f \in \mathcal{O}(\dot{B}_R(z_0))$.

1) z_0 ist genau dann eine hebbare Singularität, wenn

$$\sup_{0<|z-z_0|\leqslant R'<R} |f(z)| < \infty \quad \text{für ein } R' \in (0, R).$$

2) z_0 ist ein Pol von f genau dann, wenn

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty.$$

3) (Satz von Casorati-Weierstraß)
z_0 ist genau dann eine wesentliche Singularität von f, wenn für jedes $\varepsilon \in (0, R)$ gilt: $f(\dot{B}_\varepsilon(z_0))$ ist dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis:

1) z_0 hebbar $\Rightarrow$ f beschränkt in $B_{R'}(z_0)$ für $0 < R' < R$. Sei f beschränkt in $B_{R'}(z_0)$ und $0 < \varepsilon < R'' < R'$. Dann gilt nach Cauchy

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=R''} f(\zeta)(\zeta-z_0)^{-j-1} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta-z_0|=\varepsilon} f(\zeta)(\zeta-z_0)^{-j-1} d\zeta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{ mit } M := \sup_{0<|\zeta-z_0|\leqslant R'} |f(z)| \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned} |a_j| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0+\varepsilon e^{i\theta})||\varepsilon^{-j-1}|\varepsilon d\theta \\ &\leqslant \frac{M}{2\pi}\varepsilon^{-j} \cdot 2\pi = M\varepsilon^{-j} \overset{\varepsilon\to 0}{\to} 0 \quad \forall j \leqslant -1. \end{aligned}$$

2) f hat einen Pol der Ordnung l

$$\Leftrightarrow f_h(z) = \sum_{j=-l}^{-1} a_j(z-z_0)^j = a_l(z-z_0)^{-l}(\underbrace{1 + O(z-z_0)}_{\text{Polynom vom Grad } l-1})$$

$\Rightarrow$ es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass

$$C^{-1}|z-z_0|^{-l} \leqslant |f_h(z)| \leqslant C|z-z_0|^{-l} \quad \Rightarrow \lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty. \ (**)$$

Es gelte jetzt $(**)$, das heißt O.B.d.A. $|f(z)| \geqslant 1$ in $\dot{B}_R(z_0)$. Dann ist die Funktion

$$h(z) = \frac{1}{f(z)} = 0 \text{ in } \mathcal{O}(B_{R''}(z_0)) \text{ für } 0 < R'' < R',$$

und es gilt $|h(z)| \leqslant 1$ dort, und $\lim_{z\to z_0} h(z) = 0$. Nach (1) ist h fortsetzbar zu $\tilde{h} \in \mathcal{O}(B_{R''}(z_0))$ durch $\tilde{h}(0) = 0$.

$$\Rightarrow \tilde{h}(z) = (z-z_0)^l g(z)$$

für ein $l \in \mathbb{N}, g \in \mathcal{O}(B_{R''}(z_0)), g(z_0) \neq 0$. Also ist $f(z) = (z-z_0)^{-l}\frac{1}{g(z)}$.

3) Sei $f(B_\varepsilon(z_0))$ dicht in $\mathbb{C}$ für $\varepsilon \in (0,R)$. Dann kann f nicht beschränkt sein. Es kann aber auch nicht gelten, dass $|f(z)| \to \infty$ für $z \to z_0$, weil sonst $|f(z)| \geqslant 1$ für $0 < |z-z_0| < \varepsilon_0$ für ein $\varepsilon_0 \in (0,R)$. Also ist z_0 eine wesentliche Singularität von f.
Sei umgekehrt z_0 eine wesentliche Singularität von f.
Annahme: $f(B'_{\varepsilon_0}(z_0))$ ist nicht dicht in $\mathbb{C}$, das heißt es gibt $\omega \in \mathbb{C}$ und $\delta > 0$ so, dass $|f(z)-\omega| \geqslant \delta$ für $z \in \dot{B}_\varepsilon(z_0)$. Betrachte dann die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{f(z)-\omega} \in \mathcal{O}(\dot{B}_{\varepsilon_0}(z_0)),$$

und beachte

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)-\omega|} \leqslant \frac{1}{\delta}$$

das heißt (o.B.d.A) $g \in \mathcal{O}(B_{\varepsilon_0}(z_0))$.

1. Fall: $g(z_0) \neq 0$.
2. Fall: $g(z_0) = 0 \Rightarrow g(z) = (z-z_0)^l g_1(z)$ mit $g_1 \in \mathcal{O}(B_{\varepsilon_0}(z_0)), g_1(z_0) \neq 0$

$g(z) = (z-z_0)^l g_1(z)$ mit $l \in \mathbb{Z}_+$ und $g_1(z_0) \neq 0$. Dann folgt

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)} = w + \frac{1}{(z-z_0)^l g_1(z)},$$

das heißt es gelten die Voraussetzungen von (1) oder von (2). Dann ist z_0 aber keine wesentliche Singularität. $\Rightarrow$ Widerspruch. □

Anmerkung $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ hat in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität. Für $|z| \geqslant R$ ist $e^z = e^x \cdot e^{iy} \overset{!}{=} \rho e^{i\theta} \neq 0$. Dann wähle $x = \log \rho$ und $y = \theta + 2k\pi$, wobei $x^2 + y^2 > R^2$.

7.2.5 Definition

Es sei $f \in \mathcal{O}(\dot{B}_R(z_0))$. Dann heißt

$$a_{-1}(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = R'(<R)} f(\zeta)d\zeta =: \operatorname{Res} f(z_0)$$

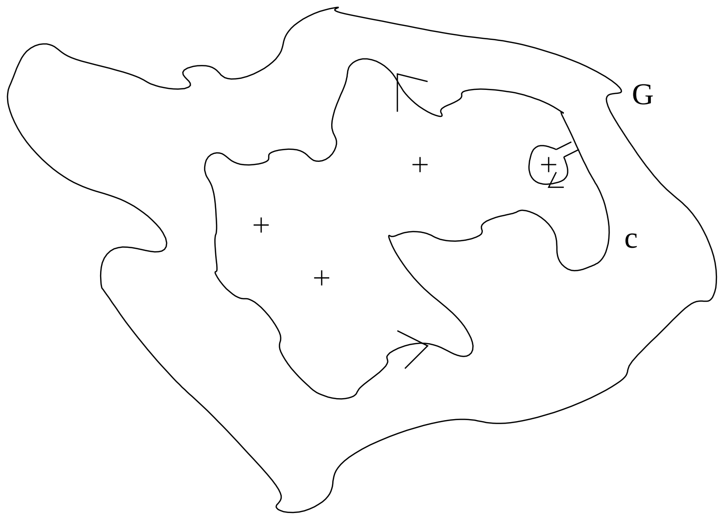
das *Residuum* von f in z_0. Ist $f \in \mathcal{O}(G \setminus \{z_0\})$, dann definieren wir $\operatorname{Res} f(z_0)$ genauso.

7.2.6 Satz (Residuensatz)

Es sei G ein Gebiet, c ein einfach geschlossener Weg in G und $A \subset \operatorname{Int} c$ eine endliche Menge, $A = \{z_1, \ldots, z_n\}$. Dann gilt für jedes $f \in \mathcal{O}(G \backslash A)$

$$\int_c f(\zeta)d\zeta = 2\pi i \sum_{z \in \operatorname{Int} c} \operatorname{Res} f(z) = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_j)$$

Beweis Beweis genau ausführen!

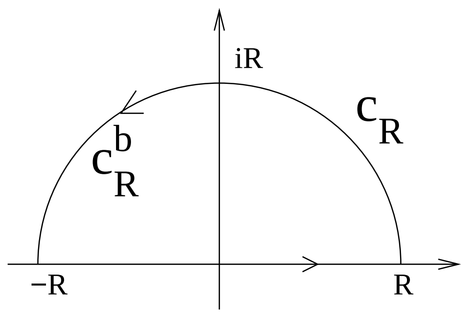


Zur Anwendung des Residuensatzes

1)

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right] =: f_+(z) - f_-(z)$$



Dann gilt

$$\int_{C_R} f(z)dz = \int_{C_R} f_+(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res} f_+(i)$$

$$\left|\int_{C_R^b} f(z)dz\right| = \left|iR\int_0^\pi f(Re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta\right| \leqslant R\int_0^\pi \frac{d\theta}{|1+R^2e^{i2\theta}|}$$

$$\leqslant \frac{R\pi}{R^2-1} \overset{R\to\infty}{\to} 0$$

$$\operatorname{Res} f_+(i) = \operatorname{Res}|_{z=i} \frac{1}{2i(z-i)} = \frac{1}{2i}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi$$

VL: Mo, 2004-06-28

7.2.7 Definition

Eine Funktion f heißt in G *meromorph*, wenn sie in G holomorph ist bis auf Polstellen.

Beispiele

1) $f(z) = \frac{1}{\sin z},\ z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ist meromorph in $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen in den Punkten $k\pi$, denn

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(z - k\pi + k\pi) = \sin(z - k\pi)\cos k\pi \\ &= (-1)^k \sin(z - k\pi) = (-1)^k \left[(z - k\pi) - \frac{(z - k\pi)^3}{6} + \dots\right] \\ &= (-1)^k (z - k\pi)\left[1 + O(|z - k\pi|^2)\right]\end{aligned}$$

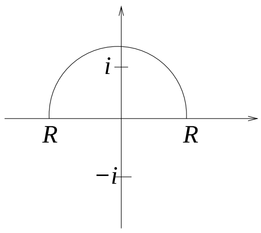
2) Jede rationale Funktion $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit $p, q \in \mathbb{C}[z]$ ist meromorph mit $\{\text{Polstellen}\} \subset q^{-1}(0)$.

Anwendungen des Residuensatzes

1) $I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n},\ n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}I = \lim_{\mathbb{R}\to\infty} \int_{c_R} \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^n} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{|z=i} \frac{1}{((z-i)(z+i))^n} \\ &= 2\pi i \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}_{|z=i} (z+i)^{-n}\end{aligned}$$

Pol n-ter Ordnung



$g(z) := \frac{1}{(z+i)^n}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(z+i)^{-n} &= (-n)(z+i)^{-n-1} \\ \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}_{|z=i} (z+i)^{-n} &= (-n)\cdots(-2n+2)(z+i)^{-2n+1} \\ &= (-1)^{n-1} n(n+1)\cdots(2n-2)(2i)^{-2n+1} \\ &= 2^{-2n+1}(-1)^{2n-1} i \frac{(2(n-1))!}{(n-1)!} \\ \Rightarrow I = -2\pi i \frac{1}{(n-1)!} 2^{-2n+1} i \frac{(2(n-1))!}{(n-1)!} &= \frac{\pi}{4^{n-1}} \binom{2(n-1)}{n-1}\end{aligned}$$

Alternativ:

$$2\pi i\frac{1}{(z-i)^n(z+i)^n}=\frac{2\pi i}{(z-i)^n(z-i+2i)^n}=\frac{2\pi i}{(2i)^n(z-i)^n(1+\frac{z-i}{2i})^n}$$

$$=\frac{2\pi i}{(2i)^n(z-i)^n}\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)^{-n}$$

$$=\frac{2\pi i}{(2i)^n(z-i)^n}\sum_{j\geqslant 0}\binom{-n}{j}\left(\frac{z-i}{2i}\right)^j$$

$$\Rightarrow 2\pi i\operatorname{Res}_{|z=i}{}^{\text{"}}=\frac{2\pi i}{(2i)^n}\binom{-n}{n-1}(2i)^{-n+1}$$

$$=\frac{4\pi i^2}{(2i)^{2n}}\frac{(-n)(-n+1)\cdots(-n-(n-1)+1)}{(n-1)!}$$

$$=\frac{-4\pi}{4^n(-1)^n}(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)\cdots(2n-2)}{(n-1)!}$$

$$=\frac{\pi}{4^{n-1}}\binom{2(n-1)}{n-1}$$

2)

$$I=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx\quad(\text{Achtung: }\int_0^\infty\frac{|\sin x|}{x}=\infty!)$$

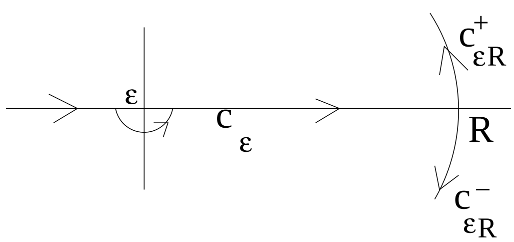
$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2ix}dx$$

$$=\frac{1}{4i}\int_{c_\varepsilon}\left[\frac{e^{i\zeta}}{\zeta}+\frac{e^{-i\zeta}}{\zeta}\right]d\zeta$$

$$[\zeta=Re^{i\theta}=R\cos\theta+iR\sin\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ e^{i\zeta}=e^{-R\sin\theta}e^{iR\cos\theta}]$$

$$=\frac{1}{4i}\lim_{R\to\infty}\left[\oint_{c^+_{\varepsilon R}}\frac{e^{i\zeta}}{\zeta}d\zeta+\underbrace{\oint_{c^-_{\varepsilon R}}\frac{e^{-i\zeta}}{\zeta}d\zeta}_{=0\text{ (Integralsatz)}}\right]$$

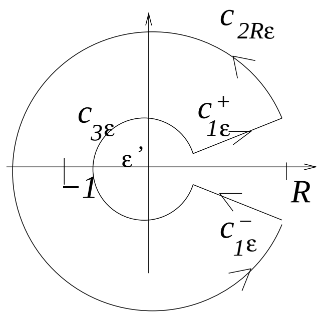
$$=\frac{1}{4i}2\pi i\operatorname{Res}_{|z=0}\frac{e^{iz}}{z}=\frac{2\pi i}{4i}=\frac{\pi}{2}$$



3)

$$I:=\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^n},\ n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 2\text{ und }n\text{ ungerade}$$

$$u = x^n,\ du = nx^{n-1}dx = nu^{\frac{n-1}{n}}dx$$
$$\Rightarrow I = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{u^{\frac{1}{n}-1}du}{1+u}$$
$$\zeta^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log\zeta} = e^{\frac{1}{n}(\log|\zeta|+i\arg\zeta)}, \log\zeta = \log|\zeta| + i\arg\zeta,\ 0 \leqslant \arg\zeta < 2\pi$$



$$c^+_{1\varepsilon}:\ t \mapsto te^{i\varepsilon},\ \varepsilon' \leqslant t \leqslant R,\quad \left(c^-_{1\varepsilon}\right)^{-1}:\ t \mapsto te^{-i(2\pi-\varepsilon)},\ \varepsilon, \varepsilon' \ll 1$$

$$\begin{aligned}
\int_{c(\varepsilon,k)} \frac{\zeta^{\frac{1}{u}-1}d\zeta}{1+\zeta} &= 2\pi i \operatorname{Res}_{|z=-1} \frac{z^{\frac{1}{n}-1}}{1+z} \\
&= 2\pi i \operatorname{Res}_{|z=-1} \frac{z^{\frac{1}{n}-1}}{z-(-1)} = 2\pi i \text{ ``}(-1)^{\frac{1}{n}-1}\text{''} \\
&= 2\pi i e^{(\frac{1}{n}-1)\log(-1)} = 2\pi i e^{(\frac{1}{n}-1)[\log|-1|+i\pi]} \\
&= 2\pi i e^{i\pi\frac{1-n}{n}}
\end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon,\varepsilon'\to 0\\ R\to\infty}} \int_{c^+_R} \frac{\zeta^{\frac{1}{n}-1}d\zeta}{1+\zeta} = \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{1+x}dx, \text{ denn}$$

$$\begin{aligned}
\left(te^{i\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}-1} &= e^{(\frac{1}{n}-1)\log t}e^{i\varepsilon} = c^{\frac{1}{n}-1)[\log t+i\varepsilon]} \\
&= t^{\frac{1}{n}-1}e^{i(\frac{1}{n}-1)\varepsilon} \to t^{\frac{1}{n}-1}, \text{ aber} \\
\left(te^{i(2\pi-\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{n}-1} &= e^{\left(\frac{1}{n}-1\right)[\log t+i(2\pi-\varepsilon)]} \\
&= t^{\frac{1}{n}-1}e^{i(\frac{1}{n}-1)(2\pi-\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} t^{\frac{1}{n}-1}e^{2\pi i\frac{1-n}{n}}
\end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon,\varepsilon'\to 0\\ R\to\infty}} \int_{c^-_R} \frac{\zeta^{\frac{1}{n}-1}d\zeta}{1+\zeta} = e^{2\pi i\frac{1-n}{n}} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{1+x}dx$$
$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{n}-1}}{1+x}dx\left(1-e^{2\pi i\frac{1-n}{n}}\right) = 2\pi i e^{i\pi(\frac{1-n}{n})}$$

7.3 Anwendungen auf Primzahlen

$\mathscr{P} = \{2,3,5,7,11,13,\cdots\} = \{p_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ Menge der Primzahlen

Hauptsatz der Arithmetik

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{\alpha_p(n)}$ mit $\alpha_p(n) \in \mathbb{Z}_+$; $\alpha_p(n) \neq 0$ nur für endlich viele $p \in \mathscr{P}$. Diese Darstellung ist eindeutig.

Satz (Euklid) $\#p = \infty$

Euler $\sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p} = \infty \Rightarrow$ Euklid
Wäre z.B. $\frac{1}{p_n} \leqslant \frac{c}{n^2} \iff p_n \geqslant \frac{1}{c} n^2$, so $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{p_n} \leqslant c \sum \frac{1}{n^2} < \infty$.

7.3.1 Definition

Die für $\operatorname{Re} s > 1$ definierte Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n \geqslant 1} n^{-s}$$

heißt die *Riemannsche ζ-Funktion.*

Wir schreiben $s = \sigma + i\tau$ und erhalten

$$n^{-s} = e^{-s \log n} = e^{-\sigma \log n - i\tau \log n}$$

$\Rightarrow$ für $\operatorname{Re} s = \sigma \geqslant 1 + \delta$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=k+1}^{k+l} n^{-s} \right| &\leqslant \sum_{n=k+1}^{k+l} n^{-\sigma} \leqslant \int_k^\infty x^{-\sigma} dx = \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma}\Big|_k^\infty \\ &= \frac{k^{1-\sigma}}{\sigma - 1} \leqslant \frac{k^{1-\sigma}}{\delta}, \end{aligned}$$

d.h. die Reihe für ζ ist gleichmäßig konvergent in $\operatorname{Re} s = \sigma \geqslant 1 + \delta$, $\delta > 0$. Insbesondere ist nach dem Konvergenzsatz ζ holomorph in $\operatorname{Re} s > 1$.

7.3.2 Hilfssatz

ζ ist holomorph in $\operatorname{Re} s > 1$. Ferner gilt

$$\lim_{\sigma \to 1+} \zeta(\sigma) = \infty.$$

Eulers Idee: für $\operatorname{Re} s > 1$

$$\begin{aligned} \zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} n^{-s} &= \sum_{n \geqslant 1} \left(\prod_{p \in \mathscr{P}} p^{\alpha_p(n)} \right)^{-s} = \sum_{n \geqslant 1} \prod_{p \in \mathscr{P}} \left(p^{-s}\right)^{\alpha_p(n)} \\ &= \sum_{\substack{\alpha_p \in \mathbb{Z}_+ \\ p \in \mathscr{P}}} \prod \left(p^{-s}\right)^{\alpha_p} = \prod_{p \in \mathscr{P}} \left(\sum_{\alpha_p \in \mathbb{Z}_+} (p^{-s})^{\alpha_p} \right) \\ &= \prod_{p \in \mathscr{P}} (1 - p^{-s})^{-1} \end{aligned}$$

$$p \geqslant 2: \ \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{p} \geqslant \frac{1}{p^\sigma}$$

7.3.3 Satz (Eulers Produktdarstellung)

Für $\operatorname{Re} s > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

Beweis: Wie vorher für $\mathscr{P}_N = \{p_1, \dots, p_N\}$ und $\mathbb{N}(N) = \{n \in \mathbb{N};\ \alpha_{p_i}(n) \neq 0$ nur für $1 \leqslant i \leqslant N\}$; dann $N \to \infty$. □

7.3.4 Satz (Euler)

$$\sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p} = \infty$$

Beweis: Für $R \gg 0$ gibt es $\delta > 0$, so dass für $1 < \sigma \leqslant 1 + \delta$

$$3e^R \leqslant \zeta(\sigma) = \prod_{p \in \mathscr{P}} (1 - p^{-\sigma})^{-1}$$

Also gibt es $N = N(R)$ so, dass

$$\begin{aligned} 2e^R \leqslant \prod_{p \in \mathscr{P}_N} (1 - p^{-\sigma})^{-1} \Rightarrow \log(2e^R) &\leqslant \sum_{p \in \mathscr{P}_N} - \log(1 - p^{-\sigma})^{-1} \\ &= \sum_{p \in \mathscr{P}_N} \left[\log 1 + p^{-\sigma} \frac{1}{(1 - \theta_p p^{-\sigma})^2} \right] \\ &\leqslant 4 \sum_{p \in \mathscr{P}_N} p^{-\sigma} \leqslant 4 \sum_{p \in \mathscr{P}} p^{-1} \end{aligned}$$

VL: Mi, 2004-06-30

Zum Beweis vom Satz von Euler

$$\sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p} = \infty$$

$$\zeta(s) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-s} = \prod_{p \in \mathscr{P}} (1 - p^{-s})^{-1}, \quad \operatorname{Re} s = \operatorname{Re}(\sigma + i\tau) = \sigma > 1$$

$$\mathscr{P}_n = \{p_i\}_{i=1}^n, \quad \mathbb{N}(n) = \left\{ m \in \mathbb{N};\ m = \textstyle\prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_{p_i}(m)} \right\}$$

$$\prod_{i=1}^m (1 - p_i^{-s})^{-1} = \Pi_m(s) \quad \text{ist holomorph in} \operatorname{Re} s > 1$$

$$\Pi_m(s) = \prod_{i=1}^{m}(1-p_i^{-s})^{-1} = \prod_{i=1}^{m}\sum_{j_i \geqslant 0} p_i^{s j_i}$$

$$p_i^{-s} = e^{-s\log p_i} \quad \text{holomorph in } \mathbb{C}$$

$$|p_i^{-s}| = e^{-\sigma\log p_i} \leqslant e^{-\log 2} = \frac{1}{2} \quad \text{Damit folgt die Konvergenz.}$$

$$\begin{aligned}\Pi_m(s) &= \sum_{j_1,\dots,j_m \geqslant 0} (p_1^{-s})^{j_1}\cdots(p_m^{-s})^{j_m} \qquad j_i = \alpha_{p_i}(l(j_1,\dots,j_m))\\ &= \sum_{j_1,\dots,j_m\geqslant 0}\left(\prod_{j=1}^{m} p_i^{j_i}\right)^{-s} = \sum_{l\in\mathbb{N}(n)} l^{-s}\\ &\Rightarrow |\Pi_{n+k}(s)-\Pi_n(s)| = \left|\sum_{l\in\mathbb{N}(n+k)\setminus\mathbb{N}(n)} l^{-s}\right|\end{aligned}$$

Zu $\tilde{k}\in\mathbb{N}$ gibt es $n(k)$, so dass $\tilde{k}\in\mathbb{N}(n(\tilde{k}))$. Mit diesem n ist

$$|\Pi_{n+k}(s)-\Pi_n(s)| \leqslant \sum_{l>\tilde{k}} l^{-\sigma} \leqslant \frac{\tilde{k}^{1-\sigma}}{1-\sigma} \overset{\tilde{k}\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

das heißt

$$\lim_{n\to\infty}\Pi_n(s) =: \prod_{p\in\mathscr{P}}(1-p^{-s})^{-1} = \zeta(s).$$

Bemerkung Für $s=\sigma>1$ ist $\Pi_n(\sigma)$ monoton wachsend. Wir haben dann benutzt, dass für $\sigma = s > 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\log\sum_{l\in\mathbb{N}(n)} n^{-\sigma} &= \log\prod_{i=1}^{n}(1-p_i^{-\sigma})^{-1}\\ &= -\sum_{i=1}^{n}\log(1-p_i^{-\sigma}) \qquad (+\text{MWS})\\ &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{(-p_i^{-\sigma})^j}{j}\\ &= \sum_{i=1}^{n}p_i^{-\sigma} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\geqslant 2}(-1)^{j-1}\frac{(-p_j^{-\sigma})^j}{j} =: \sum_{i=1}^{n}p_i^{-\sigma} + R_n(\sigma)\end{aligned}$$

und $R_n(\sigma)$ ist holomorph. Die Identität gilt für $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$ und jedes s. Deshalb können wir betrachten

$$\begin{aligned}
|R_{n+k}(s) - R_n(s)| &\leqslant \sum_{i=n+1}^{n+k} \sum_{j\geqslant 2} p_i^{-\sigma j} = \sum_{i=n+1}^{n+k} p_i^{-2\sigma} \sum_{j\geqslant 0} p_i^{-\sigma j} \\
&\leqslant \sum_{i=n+1}^{n+k} p^{-2\sigma} \frac{1}{1-p_i^{-\sigma}} \leqslant 2 \cdot \sum_{j=n+1}^{n+k} p_i^{-2\sigma} \\
&\leqslant 2 \cdot \sum_{l\geqslant p_{n+1}} l^{-2\sigma} = 2\frac{p_{n+1}^{1-2\sigma}}{2\sigma-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \\
&\text{glm. in } \operatorname{Re} 2s \geqslant 1+2\delta \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Re} s = \sigma \geqslant \frac{1}{2} + \delta
\end{aligned}$$

das heißt $\lim_{n\to\infty} R_n(s) =: R(s)$ ist holomorph in $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, also insbesondere ist $|R_n(0)| \leqslant c$ für $\sigma \geqslant 1$.

Gauß $2 < p = 4l + r, \quad 0 \leqslant r \leqslant 3 \;\Rightarrow\; r = 1$ oder $r = 3$. Ist dann mit $\mathscr{P}[4, r] = \{p \in \mathscr{P};\ p \equiv r \pmod 4\}$

$$\sharp\mathscr{P}[4,1] = \sharp\mathscr{P}[4,3] = \infty?$$

Dirichlet Fragen wir nach $\sharp\mathscr{P}[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{N}$ und $(a, b) = 1$! O.B.d.A. (!) $b < a$. $\mathbb{Z}_a = \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ Ring; $\mathbb{Z}_a^* = \{\text{Einheiten von } \mathbb{Z}_a\}$ ist eine endliche abelsche Gruppe der Ordnung $\phi(a)$. $\widehat{\mathbb{Z}_a^*}$:=Charaktergruppe= $\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_a^*, \mathbb{C}^*)$. Dann gilt:

7.3.5 Hilfssatz

Sei G eine endliche abelsche Gruppe, $\widehat{G}$ die Charaktergruppe.

1) $|\chi(g)| = 1 \quad \forall \chi \in \widehat{G}, g \in G$
2) $\sum_{g\in G} \chi(g) = \delta_{\chi\chi_0}|G|, \quad \chi_0 = 1_{\widehat{G}},\ \chi_0(g) = 1.$
3) $\sum_{\chi\in\widehat{G}} \chi(g) = \delta_{ge}|\widehat{G}|.$

Wähle jetzt $c \in \mathbb{N}$ mit $cb = 1 \pmod a$. Für ein $\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_a^*}$ setzen wir

$$\bar{\chi}(n) = \begin{cases} 0, & (n, a) > 1 \\ \chi(n + a\mathbb{Z}), & (n, a) = 1 \end{cases}$$

Dann gilt (!) $\bar{\chi}(n_1 n_2) = \bar{\chi}(n_1)\bar{\chi}(n_2)$.

7.3.6 Definition

Es sei $a \in \mathbb{N}$, $\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_a^*}$. Die *Dirichletsche L-Reihe* zu χ wird definiert durch

$$L(\chi, s) := \sum_{n\geqslant 1} \bar{\chi}(n) n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Es ist $L(\chi_0, s) = \zeta(s)$, für $a = 1$.

7.3.7 Hilfssatz

Für $\operatorname{Re} s > 1$ ist

$$L(\chi, s) = \prod_{p \in \mathscr{P}} (1 - \bar{\chi}(p) p^{-s})^{-1}.$$

Beweis genau wie vorher - wegen der Multiplikativität von $\bar{\chi}$!. □

Dann ist

$$\begin{aligned}
\log L(\chi, s) &= -\sum_{p \in \mathscr{P}} \log(1 - \bar{\chi}(p) p^{-s}) \\
&= -\sum_{p \in \mathscr{P}} \sum_{j \geqslant 1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} (-\bar{\chi}(p) p^{-s})^j \\
&= \sum_{p \in \mathscr{P}} \sum_{j \geqslant 1} \frac{1}{j} (\bar{\chi}(p) p^{-s})^j \\
&= \sum_{p \in \mathscr{P}} \bar{\chi}(p) p^{-s} + R_\chi(s)
\end{aligned}$$

mit $R_\chi(s)$ holomorph in $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$.

Jetzt bildet Dirichlet

$$\begin{aligned}
\sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_a^*}} \bar{\chi}(c) \log L(\chi, s) &= \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_a^*}} \sum_{p \in \mathscr{P}} \bar{\chi}(c) \bar{\chi}(p) p^{-s} + \tilde{R}(s) \\
&\quad \text{mit } \tilde{R}(s) \text{holomorph in } \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}. \\
&= \sum_{p \in \mathscr{P}} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_a^*}} \bar{\chi}(p) p^{-s} + \tilde{R}(s) \\
&= \sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \nmid a}} \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_a^*}} \chi((c + a\mathbb{Z})) p^{-s} + \tilde{R}(s) \\
&= \sum_{\substack{p \in \mathscr{P} \\ p \equiv b(a)}} \phi(a) p^{-s} + \tilde{R}(s)
\end{aligned}$$

Die linke Seite schreiben wir jetzt als

$$\xi(s) = \sum_{\chi \in \widehat{\mathbb{Z}_a^*} \setminus \{\chi_0\}} \bar{\chi}(c) \log L(\chi, s),$$

aber wir können nur dann etwas schließen, wenn die Summe beschränkt bleibt für $s \to 1$. Betrachten wir also für $\chi \neq \chi_0$

$$
\begin{aligned}
L(\chi, s) &= \sum_{n \geqslant 1} \bar{\chi}(n) n^{-s} = \sum_{\substack{l \geqslant 1 \\ 0 \leqslant k \leqslant a-1}} \bar{\chi}(la+k)(la+k)^{-s} \\
&= \sum_{\substack{l \geqslant 1 \\ 0 \leqslant k \leqslant a-1 \\ (k,a)=1}} \chi(k + a\mathbb{Z})(la+k)^{-s} \\
&\overset{\text{wg. 7.3.5,2)}}{=} \sum_{\substack{l \geqslant 1 \\ 0 \leqslant k \leqslant a-1 \\ (k,a)=1}} \bar{\chi}(la+k)\left[(la+k)^{-s} - (la)^{-s}\right] \\
&= \sum_{\substack{l \geqslant 1 \\ 0 \leqslant k \leqslant a-1 \\ (k,a)=1}} \bar{\chi}(la+k) \int_{la}^{la+k} \frac{(-s)}{x^{1+s}} dx
\end{aligned}
$$

Damit wird

$$
\begin{aligned}
|L(\chi, s)| &\leqslant |s| \sum_{l,k} \left| \int_{la}^{la+k} \frac{dx}{x^{1+s}} \right| \leqslant |s| \sum_{s,k} \int_{la}^{la+k} \frac{dx}{x^{1+\sigma}} \\
&\leqslant a^2 |s| \sum_{l} (la)^{-1-\sigma} \leqslant a^{2-1-\sigma} |s| \sum_{l \geqslant 1} \frac{1}{l^{\sigma+1}} \\
&\text{gleichmäßig konvergent für } \operatorname{Re} s \geqslant \delta > 0
\end{aligned}
$$

Also ist $L(\chi, s)$ holomorph sind in $\operatorname{Re} s > 0$, wenn $\chi \neq \chi_0$!! Weil die Faktoren des Primzahlproduktes holomorph in $\operatorname{Re} s > 0$ sind, gilt auch: $\log L(\chi, s)$ ist holomorph in $\operatorname{Re} s > 0$ für $\chi \neq \chi_0$, so dass

$$
\xi(s) = \phi(a) \sum_{\substack{p \equiv a(b) \\ p \in \mathscr{P}}} p^{-s} + O(1)
$$

für $\operatorname{Re} s = \sigma \to 1 + 0$.

7.3.8 Satz (Dirichlet)

Die Reihe

$$
\sum_{\substack{p \equiv b(a) \\ p \in \mathscr{P}}} \frac{1}{p}
$$

divergiert.

Die Verteilung der Primzahlen wird gemessen durch

$$
\pi(x) := \sharp \{p \in \mathscr{P}; p \leqslant x\} = \sum_{p \leqslant x} 1
$$

7.3.9 Satz (Hadamard, de la Vallé-Poussin)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} \log x = 1.$$

VL: Mo, 2004-07-05

PNT=The Prime Number Theorem

$$\pi(x) = \sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\ p\leqslant x}} 1 \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{x}{\log x}$$

Was wir wissen

$$(1) \quad \zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s} = -\prod_{p\in\mathscr{P}} (1-p^{-s})^{-1}, \quad \operatorname{Re} s > 1$$

und dort ist ζ holomorph.

$$\log \zeta(s) = -\sum_{p\in\mathscr{P}} \log(1-p^{-s}), \quad \operatorname{Re} s > 1$$

$\overset{\text{Ü}}{\Rightarrow} \zeta(s) \neq 0$ für $\operatorname{Re} s > 1$.

Schritt 1 ζ in $\operatorname{Re} s > 1$. Vermutung: ζ hat einen einfachen Pol in $s = 1$ mit $\operatorname{Res} \zeta(1)$.

Beweis

$$\begin{aligned}\zeta(s) - \frac{1}{s-1} &= \sum_{n\geqslant 1} n^{-s} - \int_1^\infty t^{-s} dt = \sum_{n\geqslant 1} \int_n^{n+1} [n^{-s} - t^{-s}] dt \\ &= \sum_{n\geqslant 1} (-1) \int_n^{n+1} \int_n^t (-s) u^{-s-1} du\, dt\end{aligned}$$

Wir schätzen ab

$$\left| \int_n^{n+1} \int_n^t (-s) u^{-s-1} du\, dt \right| \leqslant |s| \int_n^{n+1} \int_n^t u^{-\operatorname{Re} s - 1} du\, dt \leqslant |s| n^{-\operatorname{Re} s - 1}$$

$\Rightarrow$ Wenn wir schreiben

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \zeta_1(s),$$

so ist (nach Weierstraß) ζ_1 holomorph in $\operatorname{Re} s > 0$.

7.3.10 Satz

ζ besitzt eine meromorphe Fortsetzung von $\operatorname{Re} s > 1$ und $\operatorname{Re} s > 0$ mit einem einfachen Pol in $s = 1$ und $\operatorname{Res} \zeta(1) = 1$.

Schritt 2 1. Reduktion des PNT. Wir betrachten jetzt die Funktion

$$\vartheta(x) := \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in \mathscr{P}}} \log p$$

Dann ist das PNT äquivalent zu "$\vartheta(x) \sim x$". Dazu betrachten wir die Abschätzungen

(1) $\vartheta(x) \leqslant \log x \cdot \pi(x)$, das heißt

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant \frac{\pi(x)}{x/\log x}$$

(2) Für $0 < \varepsilon < 1$ gilt

$$\begin{aligned} \vartheta(x) &\geqslant \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leqslant x} \log p \geqslant \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leqslant x} (1-\varepsilon) \log x \\ &= (1-\varepsilon) \log x \sum_{x^{1-\varepsilon} < p \leqslant x} 1 = (1-\varepsilon) \log x \, (\pi(x) - \pi(x^{1-\varepsilon})) \\ &\geqslant (1-\varepsilon) \log x \, (\pi(x) - x^{1-\varepsilon}) \end{aligned}$$

das heißt

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \geqslant (1-\varepsilon) \frac{\log x \, \pi(x)}{x} - \underbrace{(1-\varepsilon) \log x \cdot x^{-\varepsilon}}_{\longrightarrow 0, \ x \to \infty \ \forall \varepsilon > 0}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log x}{x},$$

falls einer der beiden Limites existiert.

Schritt 3 $\vartheta(x) \leqslant Cx$ (Tschebychef)

$$n \in \mathbb{N}: \quad 2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{j=1}^{2n} \binom{2n}{j} \geqslant \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Sei $p \mid \frac{(2n)!}{(n!)^2} \Rightarrow p \leqslant 2n$. Gilt $n < p \leqslant 2n$, so gilt $p \mid \binom{2n}{n}$

$$\Rightarrow 2^{2n} \geqslant \prod_{n < p \leqslant 2n} p = \prod_{n < p \leqslant 2n} e^{\log p} = e^{\sum_{n < p \leqslant 2n} \log p} = e^{\vartheta(2n) - \vartheta(n)}$$

$\Rightarrow \vartheta(2n) - \vartheta(n) \leqslant 2n \log 2$

Annahme Wir haben für alle $x \geqslant 2$ und ein $C > 0$

$$\vartheta(x) - \vartheta\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant Cx$$

Dann bestimmen wir $j \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{x}{2^j} \geqslant 2 > \frac{x}{2^{j+1}}$, $j = j(x)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \vartheta(x) = \vartheta(x) - \vartheta\left(\frac{x}{2^{j+1}}\right) &= \sum_{k=0}^{j} \left[\vartheta\left(\frac{x}{2^k}\right) - \vartheta\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)\right] \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{j} C \frac{x}{2^k} \leqslant C \cdot x \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2Cx, \end{aligned}$$

das heißt die Behauptung!

Zum Beweis der Annahme Beachte, dass $\vartheta(x) = \vartheta([x])$ und $\vartheta(x) \nearrow$. Dann ist mit $x = [x] + (x - [x])$, $\frac{x}{2} = \frac{[x]}{2} + \frac{x-[x]}{2}$, $[x] = 2l + m, m = 0{,}1$; $\Rightarrow \frac{x}{2} = l + \frac{m}{2} + \frac{x-[x]}{2}$, $\Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = l = \left[\frac{[x]}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}\vartheta(x) - \vartheta\left(\frac{x}{2}\right) &= \vartheta([x]) - \vartheta\left(\left[\frac{x}{2}\right]\right) = \vartheta([x]) - \vartheta\left(\left[\frac{[x]}{2}\right]\right) \leqslant \vartheta([x]) - \vartheta\left(\frac{[x]}{2} - 1\right) \\ &\leqslant \vartheta([x]) - \vartheta\left(\frac{[x]}{2}\right) + \vartheta\left(\frac{[x]}{2}\right) - \vartheta\left(\frac{[x]}{2} - 1\right) \\ &\leqslant C[x] + \log\frac{[x]}{2} \leqslant C[x]\left(1 + \frac{\log\frac{[x]}{2}}{[x]}\right) \\ &\leqslant (C+\varepsilon)[x] \quad \text{für } [x] \geqslant x(\varepsilon)\end{aligned}$$

aber nur, wenn

$$(3) \quad \vartheta(n) - \vartheta\left(\frac{n}{2}\right) \leqslant Cn \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Übung: (3) ist wahr.

Schritt 4 2. Reduktion des PNT. Betrachte das Integral

$$I := \int_1^\infty \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt$$

Dann gilt "$\vartheta(x) \sim x,\ x \to \infty$", wenn I konvergiert.

Beweis

$$I \text{ konvergent} \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, T > 0 : \forall\, T' \geqslant T \qquad \left|\int_T^{T'} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt\right| \leqslant \varepsilon$$

$$\text{und } \vartheta(x) \sim x \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \forall x \geqslant x_\varepsilon :\ 1 - \varepsilon \leqslant \frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant 1 + \varepsilon$$

Annahme I ist konvergent, aber $\vartheta(x) \nsim x$.
1. Fall: Es gibt $\lambda > 1$ so, dass $\frac{\vartheta(x_n)}{x_n} \geqslant \lambda$ für $x_n \to \infty$. Dann betrachten wir

$$\begin{aligned}\int_{x_n}^{\lambda x_n} \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \geqslant \int_{x_n}^{\lambda x_n} \frac{\vartheta(x_n) - t}{t^2} dt \geqslant \int_{x_n}^{\lambda x_n} \frac{\lambda x_n - t}{t^2} dt \ \Big|_{1 \leqslant t \leqslant \lambda}^{t = u \cdot x_n} \\ = \int_1^\lambda \frac{\lambda - u}{u^2} du =: C > 0 \ \text{ — Widerspruch!}\end{aligned}$$

2.Fall: Es gibt $0 < \lambda < 1$ mit $\frac{\vartheta(x_n)}{x_n} \leqslant \lambda$ für $x_n \to \infty$. Analog: Ü.

Zwischenspiel

7.3.11 Satz

Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ beschränkt und lokal integrierbar. Dann ist die Funktion

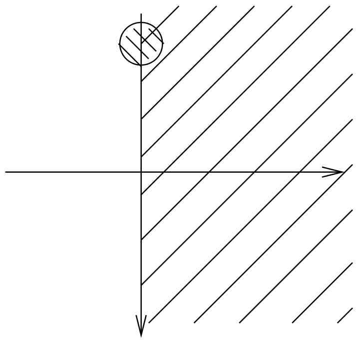
$$\mathcal{L}f(z) := \int_0^\infty e^{-zt} f(t)dt$$

(die sog. *Laplace-Transformation* von f) holomorph in $\operatorname{Re} z > 0$. Falls $\mathcal{L}f$ holomorph ist in einer offenen Umgebung von $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, so konvergiert

$$I(f) := \int_0^\infty f(t)dt$$

und ist gleich $\mathcal{L}f(0)$.

Beweis Später!



Schritt 5 Verbindung des Integrals I mit ζ

$$I = \int_1^\infty \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \qquad \left| \begin{array}{c} t = e^u \\ 0 \leqslant u \leqslant \infty \\ dt = tdu = e^u du \end{array} \right|$$

$$= \int_1^\infty \frac{\vartheta(e^u) - e^u}{e^{2u}} e^u du = \int_0^\infty \underbrace{(\vartheta(e^u)e^{-u} - 1)}_{=:f(u)} du.$$

Dann wird für $\operatorname{Re} z > 0$

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^\infty e^{-zu}(\vartheta(e^u)e^{-u} - 1)du$$

$$= \int_0^\infty e^{-(z+1)u}\vartheta(e^u)du - \int_0^\infty e^{-zu}du \qquad \left| \begin{array}{c} x = e^u \\ x \geqslant 1 \\ dx = xdu \end{array} \right|$$

$$= \int_0^\infty x^{-z-1}\vartheta(x)\frac{dx}{x} - \frac{1}{z} = \int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{z+2}}dx - \frac{1}{z}$$

$$\mathcal{L}f(z) = \int_1^\infty x^{-z-2}\vartheta(x)dx - \frac{1}{z} \qquad |s = 1 + z$$

$$\mathcal{L}f(s-1) = \int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}}dx - \frac{1}{s-1}$$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}} dx &= \int_1^\infty x^{-s-1} \sum_{p \leqslant x} \log p \, dx = \sum_{i=1}^\infty \int_{p_i}^{p_{i+1}} x^{-s-1} \sum_{p_j \leqslant x} \log p_j \, dx \\
&= \sum_{i=1}^\infty \vartheta(p_i) \int_{p_i}^{p_{i+1}} x^{-s-1} dx = \sum_{i \geqslant 1} \vartheta(p_i) \frac{p_{i+1}^{-s} - p_i^{-s}}{-s} \\
&= \frac{1}{s} \sum_{i \geqslant 1} \vartheta(p_i)(p_i^{-s} - p_{i+1}^{-s}) \\
&= \frac{1}{s} \sum_{i \geqslant 1} \frac{\log p_i}{p_i^s} \qquad \text{Abelsche partielle Summation} \\
&= \frac{1}{s} \sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{\log p}{p^s} =: \frac{1}{s} \Phi(s)
\end{aligned}
$$

Also gilt

$$\boxed{\mathcal{L}f(z) = \tfrac{1}{1+z} \Phi(z+1) - \tfrac{1}{z}}$$

Beachte nun, dass für $\operatorname{Re} s > 1$

$$\boxed{-\tfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \textstyle\sum_{p \in \mathscr{P}} \tfrac{p^{-s} \log p}{1 - p^{-s}} = \textstyle\sum_{p \in \mathscr{P}} \tfrac{\log p}{p^s - 1}}$$

VL: Mi, 2004-07-07

PNT

$$\pi(x) = \#\{p \in \mathscr{P};\ p \leqslant x\} = \sum_{p \leqslant x} 1 \sim \frac{x}{\log x}$$

(1)

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} n^{-s} = \prod_{p \in \mathscr{P}} (1 - p^{-s})^{-1}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

(2)

$$\log \zeta(s) = -\sum_{p \in \mathscr{P}} \log(1 - p^{-s}), \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

(3)

$$\text{PNT} \iff \log(x)\pi(x) \overset{x \to \infty}{\sim} x.$$

Mit $\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p$ gilt:

$$\text{PNT} \iff \vartheta(x) \sim x.$$

(4)

$$I := \int_1^\infty \frac{\vartheta(t) - t}{t^2} dt \quad \text{konvergent} \qquad \Rightarrow \vartheta(x) \sim x.$$

(5)

$$I = \int_0^\infty \underbrace{(\vartheta(e^u) e^{-u} - 1)}_{=: f(u)} du$$

macht es einladend, den folgenden Satz zu benutzen:

7.3.11 Satz Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ beschränkt und messbar und die in $\operatorname{Re} z > 0$ holomorphe Funktion $\mathcal{L}f(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)dt$ besitze eine holomorphe Fortsetzung in einer Umbebung von $\operatorname{Re} z \geqslant 0$. Dann ist $I = \mathcal{L}f(0)$ konvergent.

(6) $\vartheta(x) = O(x)$, d.h. f ist beschränkt. f ist auch messbar, weil ϑ eine stückweise konstante Funktion ist.

(7) Mit $\Phi(s) := \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\log p}{p^s}$ holomorph in $\operatorname{Re} s > 1$, gilt

$$\mathcal{L}f(z) = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

(8) Wir haben für $\operatorname{Re} s > 1$: $\zeta(s) \neq 0$ und

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{p^{-s}\log p}{1-p^{-s}} = \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\log p}{p^s - 1} = \Phi(s) + \sum_{p\in\mathscr{P}} \log p \left(\frac{1}{p^s-1} - \frac{1}{p^s}\right) \\ &= \Phi(s) + \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\log p}{p^s(p^s-1)} =: \Phi(s) + \Phi_1(s) \end{aligned}$$

mit Φ_1 holomorph in $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$. Also finden wir $(z = s-1)$

$$\mathcal{L}f(s-1) = \frac{\Phi(s)}{s} - \frac{1}{s-1} = -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{\Phi_1(s)}{s} - \frac{1}{s-1}.$$

Zu zeigen: Die rhs besitzt eine holomorphe Fortsetzung in einer kleinen Umgebung eines jeden Punktes $s = 1 + i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(9) $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \zeta_1(s)$ mit ζ_1 holomorph in $\operatorname{Re} s > 0$.

(10a) Das Verhalten von $\mathcal{L}f$ in der Nähe von $z = 0 \iff s = 1$:
Wir haben für $|s-1| < 1$, $s \neq 1$

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'}{s\zeta(s)} &= \frac{-(s-1)^{-2} + \zeta_1'(s)}{s((s-1)^{-1} + \zeta_1(s))} = \frac{(s-1)}{(s-1)^2} \left(\frac{-1 + (s-1)^2\zeta_1'(s)}{s(1 + \zeta_1(s)(s-1))}\right) \\ &= -\frac{1}{s-1}\left(\frac{1+O(s-1)}{1+O(s-1)}\right) = -\frac{1}{s-1}(1 + O(s-1)) = -\frac{1}{s-1} + \zeta_2(s) \end{aligned}$$

mit ζ_2 holomorph in $|s-1| \leqslant \varepsilon$ für ein $\varepsilon \in (0{,}1)$. Also wird für $|s-1| \leqslant \varepsilon$

$$\mathcal{L}f(s-1) = \frac{1}{s-1} - \zeta_2(s) - \frac{1}{s}\Phi_1(s) - \frac{1}{s-1} = -\frac{1}{s}\Phi_1(s) - \zeta_2(s)$$

holomorph!

(10b) Das Verhalten von $\mathcal{L}f(s-1)$ in der Nähe von $s = 1 + i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$:
Es genügt zu zeigen, dass $\zeta(1 + i\alpha) \neq 0$.
Es sei $1 + i\alpha$ eine Nullstelle von ζ von der Ordnung $\mu \in \mathbb{Z}_+$; $\mu = 0$ bedeutet das, was wir wollen: $\zeta(1 + i\alpha) \neq 0$. Es sei weiter $1 + 2i\alpha$ eine Nullstelle der

Ordnung $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Weil $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\overline{s})$, sind dann auch $1 - i\alpha$ und $1 - 2i\alpha$ Nullstellen von der Ordnung μ bzw. ν. Wir betrachten jetzt den Ausdruck

$$\Psi(\varepsilon) = \sum_{k=-2}^{2} \varepsilon\Phi(\varepsilon + 1 + ik\alpha)\binom{4}{2+k}, \quad \varepsilon > 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\Psi(\varepsilon) =& \varepsilon \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\log p}{p^{\varepsilon+1+i(k-2)\alpha}} = \varepsilon \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\log p}{p^{\varepsilon+1}} \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} p^{-i(k-2)\alpha} \\ =& \varepsilon \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\log p}{p^{\varepsilon+1}} \left(p^{\frac{i\alpha}{2}} + p^{-\frac{i\alpha}{2}}\right)^4 = \varepsilon \sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{\log p}{p^{\varepsilon+1}} \left(p^{\frac{i\alpha}{2}} + \overline{p^{\frac{i\alpha}{2}}}\right)^4 \geqslant 0\end{aligned}$$

$\Psi(s) = -\frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \Phi_1(s)$
$\varepsilon\Phi(1+\varepsilon+i\beta) = -\varepsilon\frac{-\zeta'(1+\varepsilon+i\beta)}{\zeta(1+\varepsilon+i\beta)} - \underbrace{\varepsilon\Phi_1(1+\varepsilon+i\beta)}_{\to 0}$
$1 + i\beta$ Nullstelle von ζ der Ordnung λ
$\Rightarrow \zeta(1+\varepsilon+i\beta) = \varepsilon^{\lambda}\tilde{\zeta}(1+\varepsilon+i\beta)$, $\tilde{\zeta}(1+i\beta) \neq 0$
$\Rightarrow \zeta'(1+\varepsilon+i\beta) = \lambda\varepsilon^{\lambda-1}\tilde{\zeta}(1+\varepsilon+i\beta) + \varepsilon^{\lambda}\tilde{\zeta}'(1+\varepsilon+i\beta)$
$\Rightarrow \frac{\zeta'}{\zeta}(1+\varepsilon+i\beta) = \frac{\lambda\varepsilon^{\lambda-1}\tilde{\zeta}(1+\varepsilon+i\beta)+\varepsilon^{\lambda}\tilde{\zeta}'(1+\varepsilon+i\beta)}{\varepsilon^{\lambda}\tilde{\zeta}(1+\varepsilon+i\beta)}$
$\Rightarrow -\varepsilon\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\varepsilon+i\beta) = -\lambda + O(\varepsilon)$
In der Nähe von $s-1$ gilt $\Phi(s) = \frac{1}{s-1} + \Phi_2(s)$ mit Φ_2 holomorph in $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$.

Weiter berechnen wir die Grenzwerte für $\varepsilon \to 0$.

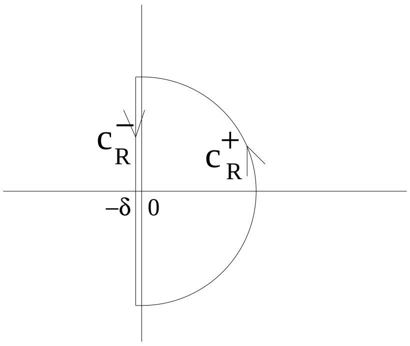
$$\begin{aligned}&\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon \pm i\alpha) = -\mu; \\ &\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon \pm 2i\alpha) = -\nu; \\ &\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\Phi(1+\varepsilon) = 1\end{aligned}$$

Also folgt

$$0 \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0} \Psi(\varepsilon) = \binom{4}{2}\cdot 1 - \mu\left(\binom{4}{1} + \binom{4}{3}\right) - \nu\cdot 2 = 6 - 8\mu - 2\nu$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = 0} \ \square$$

Beweis (von 7.3.11)
Wähle $T > 0$ und bilde $\mathcal{L}_T f(z) = \int_0^T e^{-zt} f(t)dt$, so dass $\mathcal{L}_T f$ holomorph in $\mathbb{C}$.
Zu zeigen: $\lim_{T\to\infty} \mathcal{L}_T f(0) = \mathcal{L} f(0)$.



$c_R = c_R^+ * c_R^-$;

$R > 0$ beliebig aber fest;

$\delta = \delta(R) > 0$, so dass

$\mathcal{L}f$ holomorph in $\{\operatorname{Re} z > -\delta; |z| < R\}$

Dann gilt

$$\mathcal{L}f(0) - \mathcal{L}_T f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_R} [\mathcal{L}f(z) - \mathcal{L}_T f(z)] h(z) \frac{dz}{z},$$

wenn $h(z)$ holomorph in $\mathbb{C}$ und $h(0) = 1$. Wir wählen $h(z) := e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)$. Also ist abzuschätzen

$$\left| \int_{c_r^+} [\mathcal{L}f(z) - \mathcal{L}_T f(z)] e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right|$$

und weiter, für $z = Re^{i\theta}$, $|\theta| < \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}\left| e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| \leqslant & e^{(\operatorname{Re} z)T}\left|\left(1 + \frac{R^2 e^{2i\theta}}{R^2}\right)\frac{1}{Re^{i\theta}}\right| = e^{(\operatorname{Re} z)T}\frac{1}{R}\left|e^{-i\theta} + e^{i\theta}\right| \\ = & 2e^{(\operatorname{Re} z)T}\frac{\cos\theta}{R} = 2e^{(\operatorname{Re} z)T}\frac{\operatorname{Re} z}{R^2}\end{aligned}$$

und

$$|\mathcal{L}f(z) - \mathcal{L}_T f(z)| = \left|\int_T^\infty e^{-zt} f(t)dt\right| \leqslant \|f\|_\infty \int_T^\infty e^{-\operatorname{Re} z t} dt = \|f\|_\infty \frac{e^{-\operatorname{Re} z T}}{\operatorname{Re} z}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \left|[\mathcal{L}f(z) - \mathcal{L}_T f(z)] e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{1}{z}\right| \leqslant 2\|f\|_\infty R^{-2} \\ &\Rightarrow \left|\int_{c_R^+} [\mathcal{L}f(z) - \mathcal{L}_T f(z)] e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \leqslant \frac{C}{R}\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\int_{c_R^-} [\mathcal{L}f(z) - \mathcal{L}_T f(z)] e^{zT}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z} =: I_T + II_T$$

mit

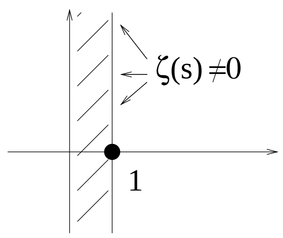
$$I_T = \int_{c_R^-} e^{zT} g(z) dz; \quad \text{mit} \quad |g(z)| \leqslant C_R.$$

Aber $|e^{zT}| \leqslant 1$ und $\lim_{T\to\infty} e^{zT} = 0$ auf $c_R^- \Rightarrow I_T \to 0$ für $T \to \infty$.
$II_T \to 0$, $T \to \infty$ gilt aber auch, mit den selben Abschätzungen wie vorher! (Übung)

Bernhard Riemann (1826-1866): 1859 "Über die Primzahlen unter einer gegebenen Größe" *VL: Mo, 2004-07-12*
Riemanns Kernidee: nutze die analytischen Eigenschaften von ζ!

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} =: \zeta_1(s), \ \ \operatorname{Re} s > 0$$

ζ_1 holomorph



Aber was ist mit $\operatorname{Re} s \leqslant 0$?

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 e^{-tn} t^{s-1} dt \Big|^{nt=u} = \frac{1}{\Gamma(s)} n^{-s} \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt = n^{-s}, \ \ \operatorname{Re} s > 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \zeta(s) &= \sum_{n\geqslant 1} n^{-s} = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty e^{-tn} t^{s-1} dt \\ &\overset{\text{Lebesgue!}}{=} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \sum_{n\geqslant 1} \left(e^{-t}\right)^n t^{s-1} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} t^{s-1} dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt \end{aligned}$$

7.3.12 Satz

1) Γ ist holomorph und $\neq 0$ für $\operatorname{Re} s > 0$.

2) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, insbesondere ist $\Gamma(n+1) = n!$.

3) Γ besitzt eine meromorphe Fortsetzung nach $\mathbb{C}$, mit einfachen Polen an den Punkten $s = -j$, $j \in \mathbb{Z}_+$, und $\operatorname{Res} \Gamma(-j) = \frac{(-1)^j}{j!}$.

4) $\frac{1}{\Gamma}$ ist holomorph in $\mathbb{C}$, also ganz, mit einfachen Nullstellen bei $s = -j$.

Beweis: Wir beschränken uns auf das Verhalten von Γ in der Nähe von $s = 0$.
$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}$ meromorph in $\operatorname{Re} s > -1$ mit einzigem Pol bei $s = 0$.

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(1) + O(s)}{s} = \frac{\Gamma(1)}{s} + O(1),$$

d.h.

$$\operatorname{Res}\Gamma(0) = \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1 = \frac{(-1)^0}{0!}$$

Allgemein gilt

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+k+1)}{s(s+1)\cdots(s+k)}$$

meromorph in $\operatorname{Re} s > -k-1$ mit einfachen Polen bei $s = 0, -1, \ldots, -k$.

Rest Übung □

Wir zerlegen jetzt

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right)\frac{t^{s-1}}{e^t-1} =: \zeta_2(s) + \zeta_3(s)$$

Wichtige Bemerkung: ζ_3 ist holomorph in $\mathbb{C}$, also ganz!
Ferner gilt $\zeta_3(-j) = 0$ für $j \in \mathbb{Z}_+$.
Weiter ist

$$\begin{aligned}
\zeta_2(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^1 t^{s-2}\frac{t}{e^t-1}dt = \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{j\geqslant 0}\int_0^1 \frac{B_j}{j!}t^{s-2+j}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{j\geqslant 0}\frac{B_j}{j!}\frac{1}{s+j-1} \qquad s = -j+1 \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)}\left(\frac{B_0}{0!}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2\cdot 1!}\frac{1}{s} + \frac{B_2}{2!}\frac{1}{s+1} + \frac{B_4}{4!}\frac{1}{s+3} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(s)(s-1)} - \frac{1}{2\Gamma(s)s} + \sum_{j\geqslant 1}\frac{B_{2j}}{(2j)!}\frac{1}{\Gamma(s)(s+2j-1)}
\end{aligned}$$

7.3.13 Satz

1) ζ ist meromorph in $\mathbb{C}$ mit einem einzigen Pol erster Ordnung in 1, $\operatorname{Res}\zeta(1) = 1$.

2) $\zeta(-2k) = 0,\ k \in \mathbb{N}$ (die *trivialen Nullstellen*)

$$\zeta(-2k+1) = -\frac{B_{2k}}{2k},\ k \in \mathbb{N}, \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2}$$

Zur Funktionalgleichung der ζ-Funktion

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-tn^2\pi}t^{\frac{1}{2}-1}dt\Big|^{u=n^2\pi t} &= (n^2\pi)^{-\frac{s}{2}}\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{s}{2}-1}dt \\
&= n^{-s}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)
\end{aligned}$$

Setze jetzt

$$\psi(t) := \sum_{n\geqslant 1} e^{-n^2\pi t},\ t \geqslant 0,$$

so dass für $t \geqslant 1$

$$\psi(t) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} e^{-n\pi t} = \frac{1}{e^{\pi t} - 1} \leqslant \frac{1}{2} e^{-\pi t}$$

Andererseits erfüllt Jacobis ϑ-Funktion

$$\vartheta(t) = 2\psi(t) + 1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 \pi t}$$

die Relation

$$\boxed{\vartheta(t) = t^{-\frac{1}{2}} \vartheta(\tfrac{1}{t})}$$

Nun ist für $0 < t < 1$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \psi(t) &= \frac{1}{2}(\vartheta(t) - 1) \leqslant \frac{1}{2}\vartheta(t) \leqslant \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \vartheta(\frac{1}{t}) \\ &\leqslant \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} (1 + 2\psi(\frac{1}{t})) \leqslant \frac{1}{4} t^{-\frac{1}{2}} (1 + e^{-\frac{n\pi}{t}}) \\ &\leqslant \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

D.h. für $\operatorname{Re} s > 1$ gilt

$$\xi(s) := \zeta(s) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty \psi(t) t^{\frac{s}{2} - 1} dt$$

holomorph für $\operatorname{Re} s > 1$. Wir zerlegen wieder

$$\xi(s) = \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) \psi(t) t^{\frac{s}{2}-1} dt =: \xi_1(s) + \xi_2(s)$$

$$\begin{aligned} \xi_2(s) &= \int_1^\infty \psi(t) t^{\frac{s}{2}-1} dt \quad \Big| \quad t = \tfrac{1}{u},\ 0 < u \leqslant,\ dt = -\tfrac{1}{u^2} du = -t \tfrac{du}{u}, \text{ d.h. } \tfrac{dt}{t} = -\tfrac{du}{u} \\ &= \int_0^1 \psi\left(\frac{1}{u}\right) u^{-\frac{s}{2}-1} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\vartheta\left(\frac{1}{u}\right) - 1\right) u^{\frac{s}{2}-1} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \vartheta(u) u^{\frac{1-s}{2}-1} du - \frac{1}{2} \int_0^1 u^{-\frac{s}{2}-1} du \\ &= \int_0^1 \left(\psi(u) + \frac{1}{2}\right) u^{\frac{1-s}{2}-1} du - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-s/2}\right) \\ &= \xi_1(1-s) + \frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1-s}{2}-1} du + \frac{1}{s} \\ &= \xi_1(\underbrace{1-s}_{=s' \Leftrightarrow s = 1-s'}) + \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\xi_1(s) = \xi_2(1-s) + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}$$

$\Rightarrow \xi_1$ ist meromorph in $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen in $s = 0{,}1$.

$$\xi_2(s) = \xi_1(1-s) + \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} \text{ für } s \neq 0{,}1$$

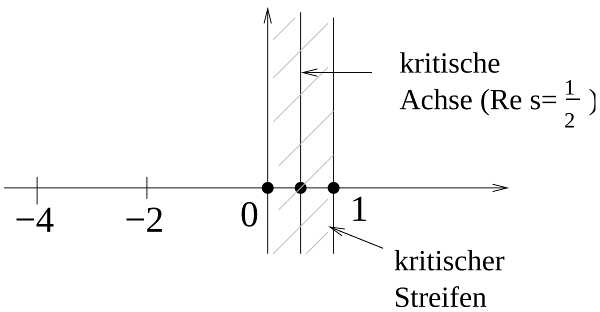
7.3.14 Satz

Die Funktion

$$\xi(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

ist meromorph in $\mathbb{C}$ mit einfachen Polen in $s = 0$ und $s = 1$, und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\xi(1-s) = \xi(s)$$



Bericht über weitere Arbeit an der Primzahlvermutung

Gauß Vorschlag

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) = \underbrace{\int_2^x \frac{dt}{\log t}}_{\text{Integrallogarithmus}} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x}{\log x}$$

Beginn der *asymptotischen Analysis*

Riemann

$$\pi_0(x) := \begin{cases} \pi(x), & x \notin \mathscr{P}, \\ \pi(x) - \frac{1}{2}, & x \in \mathscr{P} \end{cases}$$

$$f(x) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{\pi_0(x^{\frac{1}{n}})}{n}$$

$$\Rightarrow \pi_0(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu(n)}{n} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right),$$

wobei

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & \alpha_p(n) > 1 \text{ für ein } p, \\ (-1)^r, & \text{wenn } \alpha_p(n) = 1 \text{ für genau } r\ p's \end{cases}$$

Dann gilt

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{R} \\ \zeta(1/2\pm ß\alpha)}} \left(\mathrm{Li}(x^{1/2+i\alpha}) + \mathrm{Li}(x^{1/2-i\alpha})\right) + \int_x^\infty \frac{dt}{(t^2-1)t\log t} - \log 2$$

Betrachte jetzt (für $|\alpha| \leqslant T$)

$$\tilde{\zeta}(\alpha) := \zeta\left(\frac{1}{2} + i\alpha\right) \sim \frac{T}{\pi}\log\frac{t}{\pi} - \frac{T}{\pi} = \#\text{Nullstellen}$$

7.3.15 Riemannsche Vermutung (RH)

Außer den trivialen Nullstellen haben alle Nullstellen von ζ den Realteil $\frac{1}{2}$.

v. Koch: RH $\Rightarrow \pi(x) - \mathrm{Li}(x) = O_\varepsilon(x^{1/2+\varepsilon})$

Stieltjes: Beweis von RH — niemals publiziert

1896 PNT Hadamard, de la Vallée-Poussin:

$$\pi(x) - \mathrm{Li}(x) = O\left(e^{-c(\log x)^\alpha}\right), \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

Vinogradov: $\alpha = \frac{3}{5}$

Gauß: Es ist experimentell immer $\pi(x) < \mathrm{Li}(x)$; gilt evtl. immer?

Littlewood: $\exists x_0 \in \mathbb{N}: \ \pi(x_0) \geqslant \mathrm{Li}(x_0)$
Skewes: $x_0 \leqslant e^{e^{e^{7,705}}}$

Numerisch: Die ersten 1,5 Milliarden von nichttrivialen Nullstellen haben $\mathrm{Re} = \frac{1}{2}$.

Levinson: Der Prozentsatz von Nullstellen auf der kritischen Achse ist mindestens $\frac{2}{5}$.

Index